第 50 卷 第 2 期
2024 年 6 月

延 边 大 学 学 报(自然科学版)
Journal of Yanbian University (Natural Science Edition)

Vol. 50 No. 2
Jun. 2024

文章编号：1004-4353（2024）02-0054-06

基于矩信息的不确定集下 CVaR 的定量统计稳健性

刘兆萌，韩有攀

（西安工程大学 理学院，西安 710600）

摘要： 研究了在最坏情况下 CVaR 的定量统计稳健性 . 首先，推导出了 CVaR 关于随机向量是 Lipschitz 的；其次，证明了在 Kantorovich 度量下，分布不确定集在某一确定点附近是局部 Lipschitz 的，由此得出分布式鲁棒 CVaR 模型的最优值函数满足 Lipschitz 连续性；最后，在最坏情况下推导出了 CVaR 的定量统计稳健性 .

关键词： 鲁棒风险度量；不确定集；定量统计稳健性；条件风险价值

中图分类号： O221.5　　　**文献标志码：** A

Quantitative statistical robustness of conditional value at risk with moment-based uncertainty set

LIU Zhaomeng，HAN Youpan

（*School of Science*，*Xi'an Polytechnic University*，*Xi'an 710600*，*China*）

Abstract: The quantitative statistical robustness of conditional value at risk (CVaR) in the worst-case is studied. Firstly，CVaR is Lipschitz with random vectors. Secondly，the distribution uncertainty set is locally Lipschitz near a certain point under the Kantorovich metric，thereby the optimal value function of the distributed robust CVaR model satisfies Lipschitz continuity. Finally，the quantitative statistical robustness of the worst-case CVaR is derived.

Keywords: robust risk measure；uncertainty set；quantitative statistical robustness ；conditional value at risk

0 引言

1999 年，Rockafellar 等 [1] 首次提出了用 CVaR 来刻画风险度量（条件风险价值）. 由于 CVaR 考虑了超过 VaR 的尾部风险，且其还可满足 VaR 不具备的次可加性质，因此其受到了学者们的关注 . 但在实际问题中，由于样本数据很可能受到污染而使数据带有噪音，因此判断带有噪音的估计量与基于精准数据的估计量之间的差异（这种差异被称为统计稳健性）是否在某个概率距离下可控尤为重要 . 1971 年，Hampel[2] 首次给出了定性统计稳健性的经典概念 .

2021 年，Wang 等 [6] 提出了一种验证尾部分布不变风险度量的统计稳健性的定量方法，并将风险领域中的统计稳健性研究由定性扩展到定量 . 基于上述研究，本文研究了基于矩信息构建的不确定集合下条件

投稿日期： 2024-04-12
基金项目： 国家自然科学基金（11501434）；陕西省自然科学基金（2023-JC-YB-063）
第一作者： 刘兆萌（1999—），女，硕士研究生，研究方向为金融优化和最优化理论 .
通信作者： 韩有攀（1980—），男，博士，副教授，研究方向为金融优化、集值优化和传统优化理论 .

风险度量 CVaR 的定量统计稳健性，并得出了基于真实数据的估计量与基于无污染的估计量之间的差异是可控的结论 .

本文使用以下符号：$\mathbf{P}(\mathbb{R}^k)$ 表示在 k 维向量上由 ξ 诱导的所有概率测度的集合；K 表示某些有限维向量或矩阵空间的笛卡尔积中的闭凸锥；$\mathbb{H}(S_1, S_2; \mathrm{d}) := \max\{\mathbb{D}(S_1, S_2; \mathrm{d}), \mathbb{D}(S_2, S_1; \mathrm{d})\}$ 表示两个集合 S_1, S_2 之间的 Hausdorff 距离，其中，$\mathbb{D}(S_1, S_2; \mathrm{d}) := \sup_{x \in S_1} \mathrm{d}(x, S_2)$ 表示在度量 d 下 S_1 与 S_2 的偏差 .

1　预备知识

1.1　风险度量 CVaR

假设某金融资产的收益为 ξ，其分布为 P，概率密度函数为 $p(\xi)$，同时 ξ 具有有限的的期望 μ 和协方差 Σ. 若给定置信水平 $\beta \in (0,1)$，则该金融资产的风险价值 VaR 的定义可表示如下：

$$\mathrm{VaR}_{\beta}^{P}(\xi) = \min\left\{\eta \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\eta} \xi p(\xi) \mathrm{d}\xi \geqslant \beta\right\}.$$

由于 $\mathrm{VaR}_{\beta}^{P}(\xi)$ 不满足风险理论中的次可加性，从而不满足一致性风险度量标准，且 VaR 不是一个凸风险度量，因此 Rockafellar 等 [1] 提出了 VaR 的一个凸近似风险度量——CVaR，其定义为：

$$\mathrm{CVaR}_{\beta}^{P}(\xi) = \mathbb{E}_P[\xi \mid \xi \geqslant \mathrm{VaR}_{\beta}^{P}(\xi)] = \frac{1}{1-\beta}\int_{VaR_{\beta}^{P}(\xi)}^{+\infty} \xi p(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

1.2　基于矩条件的 CVaR

在上述 CVaR 的定义中，其概率分布是已知且精确的 . 然而在实际情况中，由于往往只知道部分相关信息，因此无法得到 CVaR 的准确分布，只能给出一个大致范围 . 大致范围用不确定集 $\mathbb{P}$ 表示 . 为了估计不确定集合上的风险值，本文引入如下模型 [8]：

$$\max_{P \in \mathbb{P}} \ \mathrm{CVaR}_{\beta}^{P}(\xi). \tag{2}$$

目前构建不确定集的方式主要有矩信息和概率距离，因基于矩信息的不确定集的构造方式易于求解，故本文采用基于矩信息的不确定集来近似表示 CVaR 的准确分布，如式（3）所示 :

$$\max_{P \in \mathbb{P}} \ \mathrm{CVaR}_{\beta}^{P}(\xi) := \left\{P \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^k) : \mathbb{E}_P[\Psi(\xi)] \in \mathcal{K}\right\}. \tag{3}$$

其中：Ψ 是以 ξ 为自变量的随机映射，其主要取决于诸如样本均值和样本方差之类的信息 . 为了刻画 CVaR，本文考虑以下由一阶矩和二阶矩构造的分布不确定集 [9]：

$$\mathbb{P}(u_N) = \mathbb{P}(\mu_N, \Sigma_N, \gamma_1, \gamma_2) := \left\{P \in \mathbf{P}(\Xi) : \begin{array}{l} \mathbb{E}_P[\xi - \mu_N]^T \Sigma_N^{-1} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[\xi - \mu_N] \leqslant \gamma_1 \\ \mathbb{E}_P[(\xi - \mu_N)(\xi - \mu_N)^T] \leqslant \gamma_2 \Sigma_N \end{array}\right\}, \tag{4}$$

其中：μ_N 和 Σ_N 分别是样本均值和样本协方差；γ_1 和 γ_2 为正不确定参数，其反映了样本均值和样本协方差的不确定程度并且决定了不确定集的大小；$\Xi \subset \mathbb{R}^k$ 是关于 ξ 的真实概率分布的支撑集；$\mathbf{P}(\Xi)$ 是支撑集为 Ξ 里的所有概率分布的集合 . 为了下文证明不确定集的 Lipschitz 连续性，使用 Schur 补将不确定集（4）改写成（3）的形式 :

$$\boldsymbol{\Psi}(\xi) = \boldsymbol{\Psi}(\xi, u) := \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -\Sigma_N & \mu_N - \xi \\ (\mu_N - \xi)^T & -\gamma_1 \end{bmatrix} \\ (\xi - \mu_N)(\xi - \mu_N)^T \quad -\gamma_2 \Sigma_N \end{pmatrix}. \tag{5}$$

将模型（2）中的不确定集具体化为不确定集（5）的形式后，则模型（2）可以表示为如下的分布式鲁棒优化问题：

$$\max_{P\in\mathbb{P}(u)} \mathrm{CVaR}_{\beta}^{P}(\xi) \ . \tag{6}$$

为了下文表述方便，将模型（6）的最优值函数记为$f(u_N)$．由于刻画统计稳健性需要量化两个概率分布之间的距离，因此本文采用如下定义1中的ζ－度量和Kantorovich度量来量化概率分布之间的距离．

定义1 令$P,Q\in \mathrm{P}(\Xi)$，G是Ξ上的实值可测函数族．若分布P，Q满足$\mathrm{dl}_G(P,Q):=\sup_{g\in G}|\mathrm{E}_P[g(\xi)]-\mathrm{E}_Q[g(\xi)]|$，则$\mathrm{dl}_G(P,Q)$被称为分布$P$，$Q$上带有$\zeta$结构的度量，简称$\zeta$－度量．进一步，若将上式中的$g$设定为模不大于1的Lipschitz连续函数，则记$G=\{g:g\text{是lipschitz的}，L(\mathrm{g})\leqslant 1\}$．此时$\zeta$－度量便转化为Kantorovich度量，并记为$\mathrm{dl}_{K,k}(P,Q)$，其中下标$K,k$表示在$\mathrm{P}(\mathbb{R}^k)$上的Kantorovich度量．

2 模型的最优值函数的连续性

2.1 CVaR的Lipschitz连续性

记$P_N:=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\xi^i}$和$Q_N:=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\tilde{\xi}^i}$分别是$P$和$Q$的经验分布，其中$\delta_\xi$表示在$\xi$点的狄拉克概率测度．

定理1 CVaR在$\mathrm{P}(\Xi)$上关于随机变量ξ是Lipschitz连续的，即：

$$\left|\mathrm{CVaR}_{\beta}^{P_N}(\xi)-\mathrm{CVaR}_{\beta}^{Q_N}(\tilde{\xi})\right|\leqslant\frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{N}\left\|\xi-\tilde{\xi}\right\| .$$

证明 在分布P中，可用公式$\mathrm{CVaR}_{\beta}^{P_N}(\xi)=\inf\left\{\eta+\dfrac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{0,\xi-\eta\}\,\mathrm{d}P(\xi)\right\}$[1]计算CVaR，该公式满足：

$$\left|\mathrm{CVaR}_{\beta}^{P_N}(\xi)-\mathrm{CVaR}_{\beta}^{Q_N}(\tilde{\xi})\right|\leqslant\frac{1}{1-\beta}\sup_{\eta\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}\max\{0,\xi-\eta\}\,\mathrm{d}(P_N-Q_N)(\xi)\right|=$$

$$\frac{1}{1-\beta}\sup_{\eta\in\mathbb{R}}\frac{1}{N}\left|\sum_{i=1}^{N}(\max\{0,\xi^i-\eta\}-\max\{0,\tilde{\xi}^i-\eta\})\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\beta}\sup_{\eta\in\mathbb{R}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\max\{0,\xi^i-\eta\}-\max\{0,\tilde{\xi}^i-\eta\}\right|.$$

由于$|\max\{0,\xi^i-\eta\}-\max\{0,\tilde{\xi}^i-\eta\}\leqslant|\xi^i-\tilde{\xi}^i|$，故上式可变为：$\left|\mathrm{CVaR}_{\beta}^{P_N}(\xi)-\mathrm{CVaR}_{\beta}^{Q_N}(\tilde{\xi})\right|\leqslant\dfrac{1}{1-\beta}\times\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\xi^i-\tilde{\xi}^i\right|$.
由此可得定理1成立．

2.2 不确定集的Lipschitz连续性

令$\delta>0$，记$\mathcal{N}(u_N,\delta):=\{u:\|u_N-u\|\leqslant\delta\}$，其中$\|u_N-u\|$表示$\|\mu_N-\mu\|+\|\Sigma_N-\Sigma\|+|\gamma_1|+|\gamma_2|$．下证在$u_N$的邻域内，模型中的不确定集是Lipschitz连续的，即定理2.

定理2 给定u_N，$\exists\sigma_1>0$使得$\mathrm{P}(u_N)$在Kantorovich度量下局部Lipschitz连续，即：

$$\mathbb{H}(\mathbb{P}(\tilde{u}_N),\mathbb{P}(\hat{u}_N);\mathrm{dl}_{K,\ \mathrm{k}})\leqslant\sigma_1\left\|\tilde{u}_N-\hat{u}_N\right\|,\ \forall\tilde{u}_N,\hat{u}_N\in\mathcal{N}(u_N,\delta) .$$

证明 由文献[10]中的定理4可得：

$$\mathrm{dl}_{K,k}(\tilde{P},\hat{P})\leqslant\sup_{\xi,\ \xi'\in\Xi}\|\xi-\xi'\|\ \sup_{g\in G}|\mathbf{E}_{\tilde{P}}[g(\xi)-\mathbf{E}_{\hat{P}}[g(\xi)]|,\quad\forall\tilde{P},\hat{P}\in\mathrm{P}(\Xi) , \tag{7}$$

其中$G:=\left\{g:\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}:\sup_{\xi\in\Xi}|g(\xi)|\leqslant 1\right\}$．下面估计$\mathrm{dl}_G:=\sup\mathbf{E}_{\tilde{P}}[g(\xi)-\mathbf{E}_{\hat{P}}[g(\xi)]|$．首先需要证明函数$\varPsi$关于参数$u_N$是Lipschitz连续的．

$$\|\varPsi(\xi,\tilde{u}_N)-\varPsi(\xi,\hat{u}_N)\|=\left\|\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}-\tilde{\Sigma}_N & \tilde{\mu}_N-\xi\\(\tilde{\mu}_N-\xi)^T & -\tilde{\gamma}_1\end{bmatrix}\\(\xi-\tilde{\mu}_N)(\xi-\tilde{\mu}_N)^T-\tilde{\gamma}_2\tilde{\Sigma}_N\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}-\hat{\Sigma}_N & \hat{\mu}_N-\xi\\(\hat{\mu}_N-\xi)^T & -\hat{\gamma}_1\end{bmatrix}\\(\xi-\hat{\mu}_N)(\xi-\hat{\mu}_N)^{\mathrm{T}}-\hat{\gamma}_2\hat{\Sigma}_N\end{pmatrix}\right\|\leqslant$$

$$\left\|\begin{bmatrix}-\tilde{\Sigma}_N & \tilde{\mu}_N-\xi\\(\tilde{\mu}_N-\xi)^T & -\tilde{\gamma}_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\hat{\Sigma}_N & \hat{\mu}_N-\xi\\(\hat{\mu}_N-\xi)^T & -\hat{\gamma}_1\end{bmatrix}\right\|+$$

$$\left\|(\xi\text{-}\tilde{\mu}_N)(\xi\text{-}\tilde{\mu}_N)^T-\tilde{\gamma}_2\tilde{\Sigma}_N-(\xi-\hat{\mu}_N)(\xi-\hat{\mu}_N)^{\mathrm{T}}+\hat{\gamma}_2\hat{\Sigma}_N\right\|\leqslant$$

$$\left\|\tilde{\Sigma}_N+\hat{\Sigma}_N\right\|+2\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+|-\tilde{\gamma}_1+\hat{\gamma}_1|+$$

$$2\|\xi\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+\left\|\tilde{\mu}_N\tilde{\mu}_N{}^T-\hat{\mu}_N\hat{\mu}_N{}^T\right\|+\left\|-\tilde{\gamma}_2\tilde{\Sigma}_N+\hat{\gamma}_2\hat{\Sigma}_N\right\|\leqslant$$

$$\left\|\tilde{\Sigma}_N+\hat{\Sigma}_N\right\|+2\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+|-\tilde{\gamma}_1+\hat{\gamma}_1|+2\|\xi\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+$$

$$\|\tilde{\mu}_N\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+\|\hat{\mu}_N\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+|\tilde{\gamma}_2|\left\|\tilde{\Sigma}_N-\hat{\Sigma}_N\right\|+\left|\hat{\Sigma}_N\right|\|\tilde{\gamma}_2-\hat{\gamma}_2\|\leqslant$$

$$\max\left\{|\tilde{\gamma}_2|+1,\,4+\|\tilde{\mu}_N\|+\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|,\,\hat{\Sigma}_N\right\}\max\left\{1,\|\xi\|\right\}\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|\leqslant$$

$$C_{u^0}\max\left\{1,\|\xi\|\right\}\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|.$$

其中，C_{u^0} 取决于 u^0 和 δ，最后的一个不等式由 $\left(|\tilde{\gamma}_2|,\|\tilde{\mu}_N\|,\|\hat{\mu}_N\|,\left\|\hat{\Sigma}_N\right\|\right)\leqslant\|u_0\|+\delta$ 得出 . 依据上式中最后一个不等式可得，存在常数 $\bar{C}_{u^0}>0$ 使得

$$\mathrm{H}(P(\tilde{u}_N),P(\hat{u}_N);\mathrm{dl}_g)\leqslant\bar{C}_{u^0}\|\tilde{u}_N-\hat{u}_N\|. \tag{8}$$

此时 $\bar{C}_{u^0}=C_{u^0}\max\left\{\|\xi\|,1\right\}$. 于是综合式（7）和式（8）可得：

$$\mathrm{H}(P(\tilde{u}_N),P(\hat{u}_N);\mathrm{dl}_{K,k})\leqslant\sup_{\xi,\xi'\in\Xi}\|\xi-\xi'\|\bar{C}_{u^0}\|\tilde{u}_N-\hat{u}_N\|.$$

由上式可得定理 2 成立，此时 $\sigma_1:=\sup_{\xi,\xi'\in\Xi}\|\xi-\xi'\|\bar{C}_{u^0}$.

2.3　最优值函数的 Lipschitz 连续性

为了得到模型（6）中最优值函数 $f(u_N)$ 的 Lipschitz 连续性，本文引入如下引理 1.

引理 1[7]　假设 $\mathrm{CVaR}_\beta(\xi)$ 关于随机变量 ξ 是 Lipschitz 连续的，且在点 u_N 上 $\mathrm{P}(u_N)$ 在 Kantorovich 度量下局部 Lipschitz 连续，则在点 u_N 上最优值函数 $f(u_N)$ 是 Lipschitz 连续的，即存在 $\sigma>0$ 使得：

$$|f(\tilde{u}_N)-f(\hat{u}_N)|\leqslant\sigma\|\tilde{u}_N-\hat{u}_N\|,\ \forall\tilde{u}_N,\hat{u}_N\in N(u_N,\delta).$$

由于定理 1 和定理 2 已经分别证明了引理 1 中的假设是成立的，因此由定理 1 和定理 2 以及引理 1 可得模型（6）最优值函数的 Lipschitz 连续性 .

3　分布式鲁棒 CVaR 的定量统计稳健性

设 $P\in\mathrm{P}(\Xi)$ 是随机向量 ξ 的真实概率分布，$\xi^1,\cdots,\xi^N$ 是由 P 生成的独立同分布样本 . 然而，在实践中，从经验分布中得到的样本 $\xi^1,\cdots,\xi^N$ 可能受到污染 . 用 $\tilde{\xi}^1,\cdots,\tilde{\xi}^N$ 包含表示包含噪声的数据 . 显然，样本可能不是由 P 生成的，而是由未知的分布生成的，我们将这个未知分布记为 Q . P 和 Q 都是未知的 . 为了便于讨论，假设 $\tilde{\xi}^1,\cdots,\tilde{\xi}^N$ 也是独立同分布的 . 用 $(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}$ 表示 $\mathbb{R}^k\times\cdots\times\mathbb{R}^k$ 的笛卡尔积，用 $B(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}$ 表示其 Borel sigma 代数，用 $P^{\otimes N}$ 表示边际分布 P 在可测空间 $\left((\mathbb{R}^k)^{\otimes N},B(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}\right)$ 上的概率测度，$Q^{\otimes N}$ 表示边际分布 Q 在

可测空间 $\left((\mathbb{R}^k)^{\otimes N}, B(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}\right)$ 上的概率测度.

为了得到定量统计稳健性,将分布 P' 限定在如下范围内: $\mathcal{M}_k^{\phi}:=\left\{P'\in\mathbb{P}(\Xi):\int_{\mathbb{R}^k}\phi(t)P'(\mathrm{d}t)<\infty\right\}$. 其中, $\phi(t):=\|t\|$.

引理2[12] 令 $\vec{t}:=(t^1,\cdots,t^n)\in(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}$, 若 $\Psi:=\left\{\psi:(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}\to\mathbb{R}\left|\psi(\vec{\tilde{t}})-\psi(\vec{\hat{t}})\right|\leqslant\frac{L}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\tilde{t}^i-\hat{t}^i\right\|,\forall\vec{\tilde{t}},\vec{\hat{t}}\in(\mathbb{R}^k)^{\otimes N}\right\}$ 成立, 则有 $\mathrm{dl}_{\Psi}(P^{\otimes N},Q^{\otimes N})\leqslant L\,\mathrm{dl}_{K,k}(P,Q)$.

定理3 (CVaR的定量统计稳健性) 在定理1和定理2的基础上, 设 γ_1 和 γ_2 是确定的, ϕ 是连续函数, $P,Q\in Mk_k^{\phi}$, 则存在一个常数 $C_1>0$, 使得对所有 $N\in\mathrm{N}$ 都有 $\mathrm{dl}_{K,1}(P^{\otimes N}\circ f^{-1},Q^{\otimes N}\circ f^{-1})\leqslant C_1\,\mathrm{dl}_{K,k}(P,Q)$.

证明 根据 $\mathrm{dl}_{K,1}$ 的定义有:

$$\begin{aligned}&\mathrm{dl}_{K,1}(P^{\otimes N}\circ f^{-1},Q^{\otimes N}\circ f^{-1})=\sup_{g\in G}\left|\int_{\mathbb{R}}g(t)P^{\otimes N}\circ f^{-1}(\mathrm{d}t)-\int_{\mathbb{R}}g(t)Q^{\otimes N}\circ f^{-1}(\mathrm{d}t)\right|=\\&\sup_{g\in G}\left|\int_{\Xi^{\otimes N}}g(f(\vec{\xi}^N))P^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)-\int_{\Xi^{\otimes N}}g(f(\vec{\xi}^N))Q^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)\right|,\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $\vec{\xi}^N:=(\xi^1,\cdots,\xi^N)$. 下证 $g(\hat{f}(\vec{\xi}^N))$ 的Lipschitz连续性以及其积分的有限性. 令 $R_1:=\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|=\left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\xi}^i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\xi}^i\right\|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|$, $R_2:=\left\|\tilde{\Sigma}_N-\hat{\Sigma}_N\right\|$. 则有:

$$\begin{aligned}R_2=&\left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{\xi}^i-\tilde{\mu}_N)(\tilde{\xi}^i-\tilde{\mu}_N)^T-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\xi}^i-\hat{\mu}_N)(\hat{\xi}^i-\hat{\mu}_N)^T\right\|\leqslant\\&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|(\tilde{\xi}^i-\tilde{\mu}_N)(\tilde{\xi}^i-\tilde{\mu}_N)^T-(\hat{\xi}^i-\hat{\mu}_N)(\hat{\xi}^i-\hat{\mu}_N)^T\right\|=\\&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\tilde{\xi}^i(\tilde{\xi}^i)^T-\tilde{\xi}^i\tilde{\mu}_N{}^T-\tilde{\mu}_N(\tilde{\xi}^i)^T+\tilde{\mu}_N\tilde{\mu}_N{}^T-\hat{\xi}^i(\hat{\xi}^i)^T-\hat{\xi}^i\hat{\mu}_N{}^T-\hat{\mu}_N\hat{\mu}_N{}^T\right\|=\\&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\tilde{\xi}^i\right\|\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|+\left\|\hat{\xi}^i\right\|\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|+2\left\|\tilde{\xi}^i\right\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+2\|\hat{\mu}_N\|\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|+\|\tilde{\mu}_N\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|+\|\hat{\mu}_N\|\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|\right)\leqslant\\&\frac{3}{N}\sup_{i=1,\cdots,N}\left\{2\left\|\tilde{\xi}^i\right\|,\left\|\hat{\xi}^i\right\|,\|\tilde{\mu}_N\|,2\|\hat{\mu}_N\|\right\}\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|+\|\tilde{\mu}_N-\hat{\mu}_N\|\right)\leqslant\\&\frac{6}{N}\sup_{i=1,\cdots,N}\left\{2\left\|\tilde{\xi}^i\right\|,\left\|\hat{\xi}^i\right\|,\|\tilde{\mu}_N\|,2\|\hat{\mu}_N\|\right\}\sum_{i=1}^{N}\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|.\end{aligned}$$

综上, 可得 $R_1+R_2\leqslant\left(\frac{1}{N}+\frac{6}{N}\sup_{i=1,\cdots,N}\left\{2\left\|\tilde{\xi}^i\right\|,\left\|\hat{\xi}^i\right\|,\|\tilde{\mu}_N\|,2\|\hat{\mu}_N\|\right\}\right)\sum_{i=1}^{N}\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|$. 因为函数 g 以常数1 Lipschitz连续, 所以根据Lipschitz连续的定义有:

$$\begin{aligned}&|g(f(\tilde{\xi}^1,\cdots,\tilde{\xi}^N))-g(f(\hat{\xi}^1,\cdots,\hat{\xi}^N))|\leqslant|(f(\tilde{\xi}^1,\cdots,\tilde{\xi}^N)-f(\hat{\xi}^1,\cdots,\hat{\xi}^N))|=\\&|(f(\tilde{u}_N)-f(\hat{u}_N)|\leqslant C_2(R_1+R_2)\leqslant\frac{C_1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\tilde{\xi}^i-\hat{\xi}^i\right\|.\end{aligned}\tag{10}$$

其中, $C_1:=C_2+12C_2(\|\xi_0\|+\sup_{\xi,\xi'\in\Xi}\|\tilde{\xi}-\hat{\xi}\|)$, ξ_0 是 Ξ 中的某个确定元素. 这表明在 $\Xi^{\otimes N}$ 上 $g(f(\cdot))$ 以常数 C_1 Lipschitz连续. 设 $\psi=g\circ f$, 于是由引理2可得:

$$\sup_{g\in G}\left|\int_{\Xi^{\otimes N}}g(f(\vec{\xi}^N))P^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)-\int_{\Xi^{\otimes N}}g(f(\vec{\xi}^N))Q^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)\right|\leqslant C_1\,\mathrm{dl}_{K,k}(P,Q).$$

由上式可得定理3成立.

由式(9)可知, 要保证 $\mathrm{dl}_{K,1}$ 有定义, 就需要积分 $\int_{\Xi^{\otimes N}}g(f(\vec{\xi}^N))P^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)$ 和 $\int_{\Xi^{\otimes N}}g(f(\vec{\xi}^N))Q^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)$

都有定义 . 固定 $(\xi_0^1,\cdots,\xi_0^N)$, 则根据式（10）可得：$|g(f(\xi^1,\cdots,\xi^N))-g(f(\xi_0^1,\cdots,\xi_0^N))| \leqslant \frac{C_1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\xi^i-\xi_0^i\right\|$. 变换上式的积分顺序可得：

$$\int_{\Xi^{\otimes N}} g(f(\vec{\xi}^N))P^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N) \leqslant \left|g(f(\xi_0^1,\cdots,\xi_0^N))\right|+\frac{C_1}{N}\int_{\Xi^{\otimes N}}\sum_{i=1}^{N}\left\|\xi^i-\xi_0^i\right\|P^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)=$$

$$\left|g(f(\xi_0^1,\cdots,\xi_0^N))\right|+\frac{C_1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Xi}\left\|\xi^i-\xi_0^i\right\|P(\mathrm{d}\xi^i)<\infty.$$

因为对于所有的 $P\in\mathcal{M}k_k^{\phi}$, 都有 $\sum_{i=1}^{N}\int_{\Xi}\left\|\xi^i-\xi_0^i\right\|P(\mathrm{d}\xi^i)<\infty$, 所以上式中的第 2 个不等式成立 . 同理可得，$\int_{\Xi^{\otimes N}} g(f(\vec{\xi}^N))Q^{\otimes N}(\mathrm{d}\vec{\xi}^N)<\infty$. 该结果证明 $\mathrm{dl}_{K,1}$ 有定义，证毕 .

4　结论

本文给出了基于矩信息的不确定集中最坏情况下 CVaR 的定量统计稳健性，相比于一维随机变量，本文得到了多维一致性风险度量 CVaR 的定量统计稳健性，这更符合实际情况 . 另外，本文将 CVaR 的研究从定性深入到定量研究，给出基于带有噪音的观测数据的估计量与基于真实数据的估计量之间的差异可控的理论指导，CVaR 的定量统计稳健性性结果为研究基于观测数据的 CVaR 优化问题解的稳定性和可靠性奠定了基础 .

参考文献：

[1] ROCKAFELLAR R T，URYASEV S. Optimization of conditional Value-At-Risk[J]. Journal of Risk，2000，2(3)：21-42.

[2] HAMPEL F R. A general qualitative definition of robustness[J]. The Annals of Mathematical Statistics，1971，42(6)：1887-1896.

[3] WANG W，XU H F，MA T J. Quantitative statistical robustness for tail-dependent law invariant risk measures[J]. Quantitative Finance，2021，21(10)：1669-1685.

[4] HUANG D，ZHU S S，Fabozzi F J，et al. Portfolio selection with uncertain exit time：A robust CVaR approach[J]. Journal of Economic Dynamics and Control，2008，32(2)：594-623.

[5] DELAGE E，YE Y Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems[J]. Operations research，2010，58(3)：595-612.

[6] GIBBS A L，SU F E. On choosing and bounding probability metrics[J]. International Statistical Review，2002，70(3)：419-435.

[7] ZHANG J，XU H，ZHANG L W，Xu H F. Quantitative stability analysis for distributionally robust optimization with moment constraints[J]. SIAM Journal on Optimization，2016，26(3)：1855-1882.

[8] GUO S Y，XU H F. Statistical robustness in utility preference robust optimization models[J]. Mathematical Programming，2021，190(1/2)：679-720.