

文章编号: 1004-4353 (2024) 02-008-07

蔡氏电路的非线性动力学探析

董齐, 徐红梅

(延边大学 理学院, 延吉 吉林 133002)

摘要: 针对基尔霍夫电压定律、基尔霍夫电流定律及各元器件的特性, 提出了一种基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路, 并建立一个新型蔡氏电路的数学模型. 利用该模型, 得出相轨迹图、Lyapunov 指数图、Poincaré 截面图和分岔图. 对基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路的非线性动力学特性进行分析表明, 该忆阻器的蔡氏电路具有更复杂、更丰富的混沌现象与非线性动力学行为. 研究结果可为相关混沌电路、图像加密等提供参考.

关键词: 新型三阶忆阻器; 蔡氏电路; 混沌系统; 相轨迹图; 非线性动力学

中图分类号: TM132 **文献标志码:** A

Nonlinear dynamic analysis of Chua circuit

DONG Qi, XU Hongmei

(College of Engineering, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: A new Chua circuit based on a novel third order memristor is proposed, in the light of Kirchhoff voltage law, Kirchhoff current law and the characteristics of each component. The phase trajectory diagram, Lyapunov exponent diagram, Poincaré cross section diagram and bifurcation diagram are obtained by building and utilizing the mathematical model of the new Chua circuit. The nonlinear dynamic characteristics of the Chua circuit based on a novel third order memristor is analyzed, and the results show that the new Chua circuit exhibit more complex and abundant chaotic phenomena and nonlinear dynamic behaviors, provide references for the research of chaotic circuit and image encryption.

Keywords: novel third order memristor; Chua circuit; chaotic system; phase trajectory diagram; nonlinear dynamic

0 引言

忆阻器是一种能够表示磁通与电荷关系的电路器件^[1]. 由于其有记忆功能, 且具有体积小、功耗低等优点^[2], 因此在保密通信^[3]、非易失性存储器^[4]、电路设计^[5]和人工神经网络^[6]等领域得到广泛应用. 近年来, 一些学者将忆阻器应用到混沌电路设计中^[7]. 例如, 吴淑花等^[8]利用 2 个荷控忆阻器模型设计了 1 个最简五阶混沌电路, 并利用常规动力学分析方法研究了该电路的基本动力学特性. 王振等^[9]提出一种基于双忆阻器的文氏桥混沌电路, 研究显示该电路的稳定性与非零特征根和零特征根密切相关.

蔡氏电路^[10]是一种简单的非线性混沌电路, 因其制作简单且可以表现出标准的混沌理论行为, 因此被

投稿日期: 2024-01-18

第一作者: 董齐 (1998—), 男, 硕士研究生, 研究方向为混沌动力学.

通信作者: 徐红梅 (1975—), 女, 博士, 教授, 研究方向为混沌动力学.

一些学者称为“混沌系统的典范”. 2021年,于永斌等^[11]提出一种新型三阶忆阻器,研究表明该新型三阶忆阻器在滤波器中具有良好的非线性特性. 基于上述研究,本文将蔡氏电路中的蔡氏二极管替换为文献[11]中提出的新型三阶忆阻器,并通过非线性动力学分析方法研究了其混沌特性.

1 建模与仿真

新型三阶忆阻器的模型通常分为磁控与荷控2种类型. 文献[11]中提出的新型三阶忆阻器为磁控忆阻器模型,其电荷(q)与磁通(φ)之间的关系为:

$$q(\varphi) = a\varphi + b\varphi^2 + c\varphi^3. \quad (1)$$

式(1)中, a 、 b 和 c 为常量. 由式(1)可得到新型三阶忆阻器的忆导 $W(\varphi)$ 的表达式:

$$W\varphi = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = a + 2b\varphi + 3c\varphi^2. \quad (2)$$

在新型三阶忆阻器两端施加正弦电压激励 $2\sin(2\pi ft)$,并设新型三阶忆阻器两端的电压为 u (流经电流为 i),则有:

$$\begin{cases} u = 2\sin(2\pi ft), \\ i = W(\varphi)u = (a + 2b\varphi + 3c\varphi^2)u, \\ \frac{d\varphi}{dt} = u. \end{cases} \quad (3)$$

参考文献[12],取 $a = 1/7$, $b = 2/7$, $c = 4/7$.

在初始状态为 $\varphi(0) = 0$ Wb, f 为1、2、5和60 Hz等4种频率下,利用四阶龙格—库塔算法(ode45)对式(3)分别进行求解可得到新型三阶忆阻器在 u - i 平面上的伏安特性曲线,如图1(a) — (e)所示.

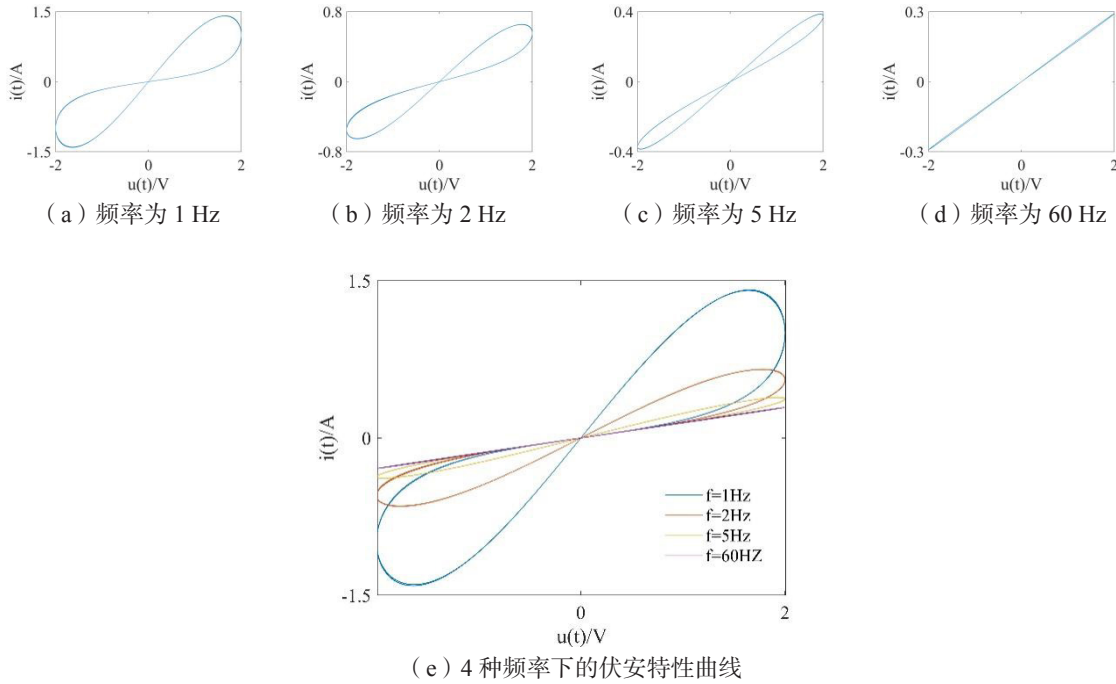


图1 新型三阶忆阻器的伏安特性曲线

由图1可知,在低频信号作用下,新型三阶忆阻器的伏安特性曲线是滞回曲线. 当频率逐渐升高时,新型三阶忆阻器的伏安特性曲线逐渐趋于一条直线,说明该模型符合忆阻器的特性.

2 新型三阶忆阻器蔡氏电路

2.1 蔡氏电路

蔡氏电路的电路图如图 2 所示, 其中 R_N 为蔡氏二极管, r 为电感的寄生电阻值.

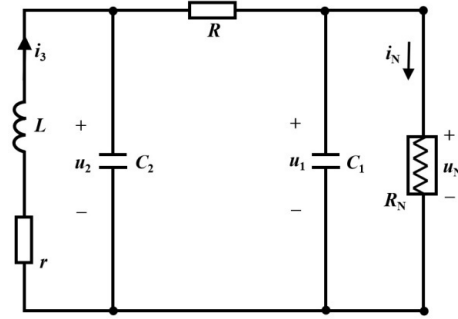


图 2 蔡氏电路图

2.2 基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路

用新型三阶忆阻器和 1 个负电导 $-G$ 构成的忆阻电路替换蔡氏电路中的蔡氏二极管即可得基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路, 如图 3 所示.

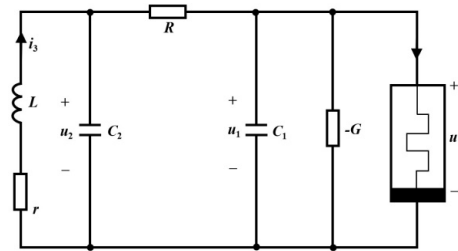


图 3 基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路图

2.3 新型三阶忆阻器蔡氏电路的数学模型

根据基尔霍夫电压定律、基尔霍夫电流定律和图 3 中各元件特性, 可得图 3 所示电路的状态方程:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -\frac{u_1}{RC_1} + \frac{u_2}{RC_1} + \frac{u_1 G}{C_1} - \frac{u_1 W(\varphi)}{C_1}, \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{u_1}{RC_2} - \frac{u_2}{RC_2} + \frac{i_3}{C_2}, \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{u_2}{L} - \frac{ri_3}{L}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = u_1. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $W(\varphi) = a + 2b\varphi + 3c\varphi^2$. 令 $C_2=1$, $R=1$. 设 $x=u_1$, $y=u_2$, $z=i_3$, $w=\varphi$, $m=1/C_1$, $n=1/L$, $s=r/L$, $e=G$, 则状态方程式 (4) 可以改写为:

$$\begin{cases} \dot{x} = m(y - x + ex - W(w)x), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -ny - sz, \\ \dot{w} = x. \end{cases} \quad (5)$$

其中: $W(w) = a + 2bw + 3cw^2$. 式 (5) 表明, 基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路是一个四维的系统.

2.4 相轨迹图

参考文献 [12], 本文选取式 (5) 中各参数的值为 $m=10$, $n=100/7$, $s=0.1$, $e=9/7$, $a=1/7$, $b=$

$2/7$, $c = 4/7$, 设置初始条件为 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$, 使用四阶龙格—库塔算法, 对式 (5) 所描述的系统进行求解, 可得系统的二维相轨迹图和三维相轨迹图, 分别如图 4 (a) — (f) 和图 5 (a) — (d) 所示. 新型三阶忆阻器的两端电压与流经的电流之间的伏安关系, 如图 6 所示. 基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路的 4 个状态变量的时域波形, 如图 7 所示.

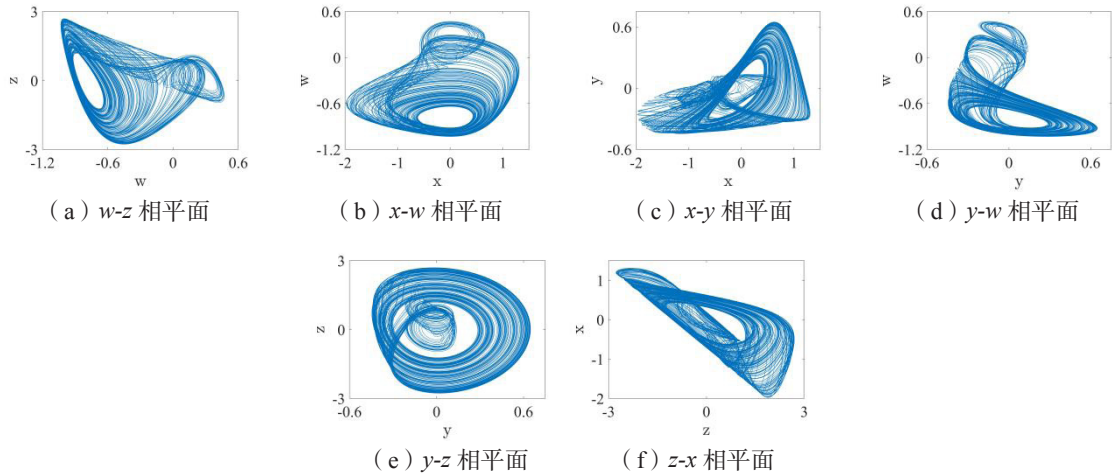


图4 二维相轨迹图

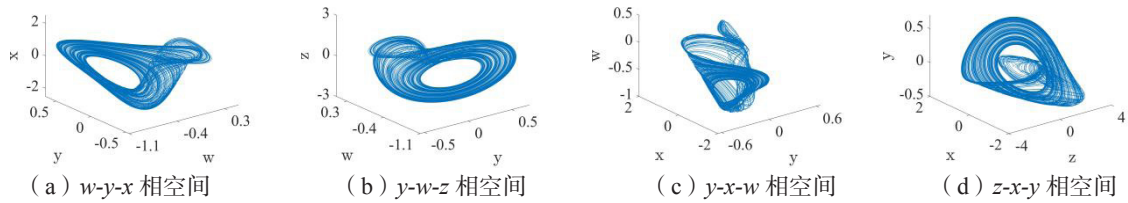


图5 三维相轨迹图

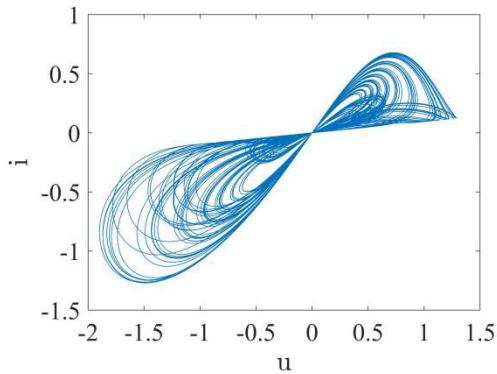
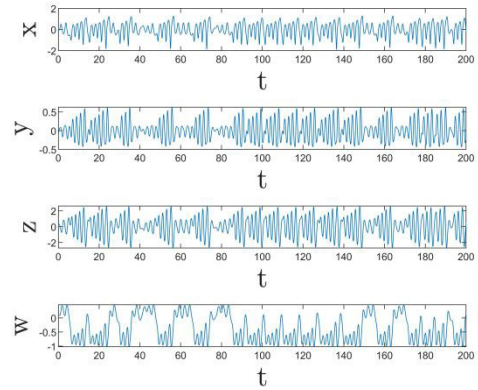
图6 新型蔡氏电路中忆阻器的 $u-i$ 平面图

图7 4个不同状态变量的时域波形图

由图 4 和图 5 可以看出, 各相平面和相空间上的混沌吸引子均具有复杂的拉伸和扭曲结构. 这表明在上述参数取值下, 式 (5) 描述的系统处于混沌状态. 图 6 表明, 在该系统中, 新型三阶忆阻器两端的伏安特性也呈现出整体稳定, 部分混沌的特性. 图 7 为貌似随机的、非周期性的 4 个状态变量的时域波形.

3 新型蔡氏电路的动力学特性分析

3.1 平衡点集与稳定性

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$, 由此可得式 (5) 所描述的系统的平衡点为集合 $A = \{(x, y, z, w) | x = y = z = 0, w = g\}$.

其中, g 是一个实数. 该集合表明, w 坐标上的点集均为平衡点. 在平衡点处对式 (5) 所描述的系统进行线性化处理, 可得该系统的 Jacobi 矩阵 J 为:

$$\begin{bmatrix} P & m & 0 & Q \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -n & -s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中: $P = m[-1 + e - W(g)]$, $Q = -2mx(b + 3cg)$. 由此可得平衡点集合 A 的特征根方程为:

$$\lambda^4 + \{1 + m + s + m[W(g) - e]\}\lambda^3 + \{m(1 + s)[W(g) - e] + (1 + m)s + n\}\lambda^2 + m\{(n + s)[W(g) - e] + n\}\lambda = 0. \quad (7)$$

其中: $W(g) = a + 2bg + 3cg^2$. 由于式 (5) 所描述的系统对 g 的变化十分敏感, 所以选择 g 为可变参数. 当 $m = 10$, $n = 100/7$, $s = 0.1$, $e = 9/7$, $a = 1/7$, $b = 2/7$, $c = 4/7$ 时, 可得式 (6) 所对应的特征根方程为:

$$\lambda[\lambda^3 + (17.1g^2 + 5.7g - 0.3)\lambda^2 + (18.9g^2 + 6.3g - 2.8)\lambda + 246.6g^2 + 82.2g - 21.6] = 0. \quad (8)$$

根据劳斯 (Routh) 稳定判据可知, 在上述参数条件下, 式 (5) 所描述的系统稳定的充要条件为式 (8) 中方括号内的三次多项式方程的根均具有负实部, 即:

$$\begin{cases} a_2 = 17.1g^2 + 5.7g - 0.3 > 0, \\ a_1 = 18.9g^2 + 6.3g - 2.8 > 0, \\ a_0 = 246.6g^2 + 82.2g - 21.6 > 0, \\ a_2a_1 - a_0 > 0. \end{cases} \quad (9)$$

解得 $-0.5602 < g < -0.5063$ 或 $0.1730 < g < 0.2269$.

为使平衡点集 A 不稳定, 从而导致系统产生混沌现象, 根据劳斯 (Routh) 稳定判据可知, 需要使式 (8) 中方括号内的三次多项式中的 g 满足以下 3 个条件之一:

$$-0.8969 < g < -0.5602, \quad (10)$$

$$0.5063 < g < 0.1730, \quad (11)$$

$$0.2269 < g < 0.5634. \quad (12)$$

3.2 初始状态对新型蔡氏电路系统的影响

通过对 3.1 中的基于新型三阶忆阻器的新型蔡氏电路的平衡点集与稳定性进行分析, 可知, 蔡氏电路的动力学行为主要受式 (5) 中的第 4 个状态变量 (w) 影响. 原因是, 此变量对该忆阻器非线性特性的影响最大.

设 $m = 10$, $n = 100/7$, $s = 0.1$, $e = 9/7$, $a = 1/7$, $b = 2/7$, $c = 4/7$. 设初始值 $x(0) = 0.1$, $y(0) = -0.1$, $z(0) = 0.1$, 并选择初始值 $w(0) = g$ 在区间 $[-1.5, 1.5]$ 之间变化. 在上述参数条件下, 式 (5) 所描述的系统的 Lyapunov 指数谱如图 8 所示.

本文只给出了第 4 条 L-lyapunov 曲线的一部分, 如图 8 所示. 由图 8 可知, 当 $-0.93 < g < 0.56$ 时, Lyapunov 指数 1 (蓝色曲线所示) 大于 0. 说明系统此时处于混沌状态, 这与分析新型蔡氏电路平衡点集与稳定性时所得的结果基本一致.

3.3 新型蔡氏电路的庞加莱映射与分岔图

为进一步验证式 (5) 所描述的系统非线性特性, 本文对新型蔡氏电路的庞加莱映射与分岔图进行分析. 式 (5) 所描述的系统在 $x = 0$ 截面、 $y - z$ 相平面上的庞加莱映射如图 9 (a) 所示. 在 $y = 0$ 截面、 $x - z$ 相平面上的庞加莱映射如图 9 (b) 所示. 由图 9 可以看出, 图形呈分形的几何特征 (混沌系统中, 周

期行为的庞加莱映射是一个点, 拟周期行为的庞加莱映射是一条闭合曲线, 混沌行为的庞加莱映射则表现为分形的几何特征). 由此表明式 (5) 所描述的系统处于混沌状态.

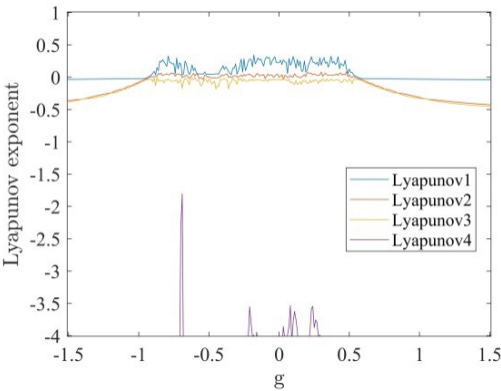


图 8 系统随参数 g 变化的 Lyapunov 指数图

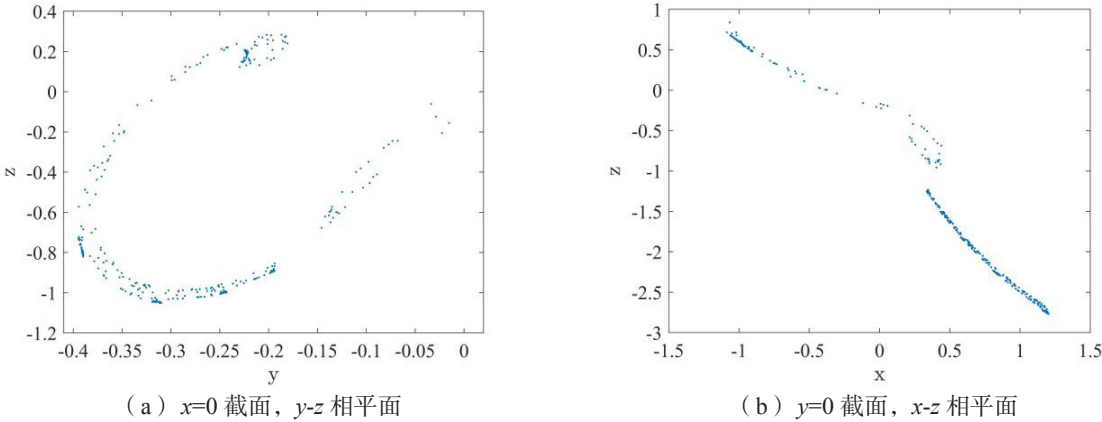


图 9 庞加莱映射图

式 (5) 所描述的系统的分岔图如图 10 所示. 观察图 8 和图 10 可知, 式 (5) 所描述的系统的 Lyapunov 指数图和分岔图中所表现的动力学行为基本相似, 即当 g 在 $[-0.93, 0.56]$ 之间变化时, 系统会表现为不同的动力学行为. 当 g 在 $[-1.5, 1.5]$ 区间内变化时, 系统所对应的动力学行为如表 1 所示.

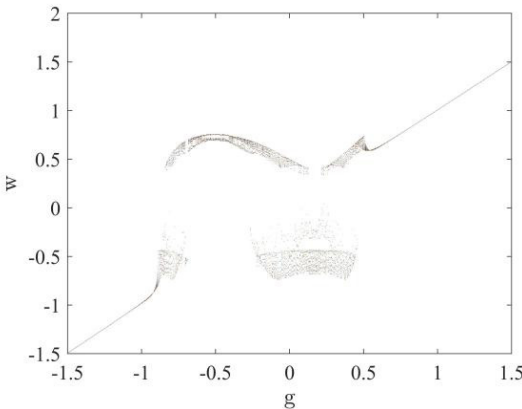


图 10 分岔图

表 1 参数 g 变化时系统的动力学行为

参数 g	动力学行为	混沌吸引子相图
$g < -0.93$	汇	$g = -1.00$ 如图 11 (a) 所示
$g = -0.92$ 附近	极限环	$g = -0.92$ 如图 11 (b) 所示
$-0.91 \leq g \leq -0.85$	第 1 个混沌区域	$g = -0.88$ 如图 11 (c) 所示
$-0.84 \leq g \leq -0.71$	双涡卷吸引子	$g = -0.80$ 如图 11 (d) 所示
$g = -0.69$ — -0.68 附近	极限环	$g = -0.69$ 如图 11 (e) 所示
$-0.67 \leq g \leq -0.22$	第 2 个混沌区域	$g = -0.32$ 如图 11 (f) 所示
$-0.21 \leq g \leq 0.12$	双涡卷吸引子	$g = -0.10$ 如图 11 (g) 所示
$0.13 \leq g \leq 0.21$	单涡卷吸引子	$g = 0.20$ 如图 11 (h) 所示
$0.22 \leq g \leq 0.44$	双涡卷吸引子	$g = 0.37$ 如图 11 (i) 所示
$0.45 \leq g \leq 0.53$	第 3 个混沌区域	$g = 0.48$ 如图 11 (j) 所示
$g = 0.54$	极限环	$g = 0.54$ 如图 11 (k) 所示
$g > 0.56$	汇	$g = 0.60$ 如图 11 (l) 所示

为验证分岔图的准确性, 本文给出了不同参数 g 时式 (5) 所描述的系统的相轨迹图, 如图 11 所示. 由图 11 可以看出, 式 (5) 所描述的系统的分岔图是正确的.

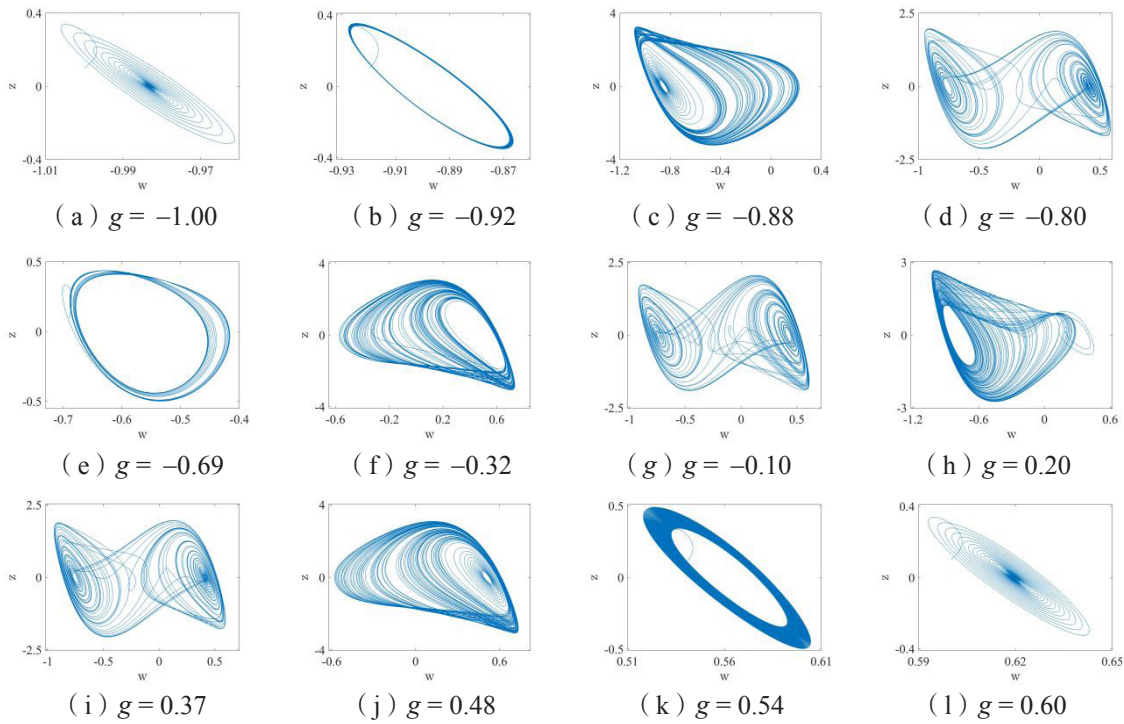


图 11 参数 g 变化时系统的相轨迹图

4 结论

针对本文提出的基于新型三阶忆阻器的蔡氏电路, 研究表明, 与传统的蔡氏电路相比, 新型三阶忆阻器的蔡氏电路表现出更复杂、更丰富的混沌现象与动力学行为. 在后续研究中, 我们将验证该成果在其他混沌电路和图像加密中的应用效果, 为研究和设计基于该忆阻混沌电路的图像加密系统提供参考.

参考文献:

[1] CHUA L O. Memristor-The missing circuit ele-ment. Circuit Theory. 1971, 18(5): 507-519. (下转第 122 页)

