文章编号：1004-4353（2024）01-0087-05

平面星体的一类 Green-Osher 不等式

袁名扬，张德燕
（淮北师范大学 数学与统计学院，安徽 淮北 235000）

摘要：基于文献 [4] 的研究，利用平面星体和对偶混合体积的性质证明了平面星体的一类 Green-Osher 不等式，并得到了该不等式等号成立的充要条件是两平面星体位似 .

关键词：平面星体；严格凸函数；Green-Osher 不等式；位似
中图分类号：O186.5　　　**文献标志码：**A

A class of Green-Osher inequality for planar star bodies

YUAN Mingyang，ZHANG Deyan
(*School of Mathematics and Statistics*，*Huaibei Normal University*，*Huaibei 235000*，*China*)

Abstract: Based on the literature [4]， a class of Green-Osher inequality for planar star bodies is proved by the properties of planar star bodies and pairwise mixed volumes. Moreover，the equality holds if and only if the two planar star bodies are homothetic.

Keywords: planar star bodies；strictly convex function；Green-Osher inequality；homothetic

0　引言

几何不等式是凸几何分析领域中的一个重要内容 . 在平面凸体和凸曲线中有很多重要的几何不等式，如经典的等周不等式 [1]、Gage 不等式 [2]、Ros 不等式 [3]，以及下面的 Green-Osher 不等式 [4]：

设 K 是一个光滑的平面严格凸体，记 $\rho(\theta)$ 为 K 的曲率半径 . 若 $F(x)$ 是 (0，+∞) 上的凸函数，则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} F(\rho)\mathrm{d}\theta \geqslant \frac{1}{2}(F(-\tilde{t}_1)+F(-\tilde{t}_2)),\tag{1}$$

其中 $\tilde{t}_1$ 和 $\tilde{t}_2$ 是 K 的 Steiner 多项式的两个实根，等号成立当且仅当 K 为圆盘 . 在文献 [4] 中，作者还定义了两个光滑平面严格凸体 K 和 W 的相对 Steiner 多项式 ：

$$A_{K,\ W}(t)=A(K)+2A(K,\ W)t+A(W)t^2\ .$$

其中 $A(K,W)=\dfrac{1}{2}\int_{\partial K}\gamma\ \mathrm{d}s$ 是混合面积，γ 是 W 的支撑函数 . 当 W 为中心对称时，作者还得到了 Wullf 型的

投稿日期：2023-12-20
基金项目：安徽省高校自然科学研究重大项目 (2022AH040067)；淮北师范大学质量工程项目 (2023jxyi001)
第一作者：袁名扬 (2000—)，男，硕士研究生，研究方向为凸几何分析 .
通信作者：张德燕 (1980—)，女，博士，副教授，研究方向为整体微分几何和凸几何分析 .

Green-Osher 不等式：$\frac{1}{2A_w}\int_{S^1}F(\rho_W)\gamma(\gamma+\gamma'')\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{1}{2}(F(-t_1')+F(-t_2'))$. 其中 ρ_W 是 K 相对于 W 的相对曲率半径，t_1' 和 t_2' 是相对 Steiner 多项式的两个实根，等号成立当且仅当 K 和 W 位似 .

2016 年，席东盟等[5] 提出了膨胀位置的定义：设 K 和 L 为两个凸体，若 $o\in K\cap W$ 且 $r(K，L)L\subseteq K\subseteq R(K，L)L$ ，则称 K 和 L 互为膨胀位置，其中 $r(K，\mathrm{L})=\max\{t>0\mid x+tL\subseteq K且x\in\mathbf{R}^n\}$ ，$R(K，\mathrm{L})=\max\{t>0\mid x+tL\supseteq K且x\in\mathbf{R}^n\}$.

2019 年，杨云龙[6] 利用膨胀位置弱化了 Wullf 型的 Green-Osher 不等式的条件，并得到了膨胀位置下非对称的 Wullf 型的 Green-Osher 不等式：$\frac{1}{V(L)}\int_0^{2\pi}F(\rho_{K,\ L}(\theta))h_L(\theta)(h_L(\theta)+h_L''(\theta))\mathrm{d}\theta\geqslant F(-t_1')+F(-t_2')$.

1975 年，E.Lutwak[7] 首次提出了对偶 Brunn-Minkowski 理论，该理论将凸体理论中的支撑函数、Minkowski 和、混合体积等相关概念与星体的径向函数、Minkowski 径向和、对偶混合体积等相关概念建立了密切的联系 . 基于文献 [7] 的研究，2016 年，张德燕等[8] 定义了对偶 Steiner 多项式 $g(P，Q，s)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\tilde{W}_i(P;\ Q)s^i$ ，$s\in\mathbf{C}$, 并讨论了对偶 Steiner 多项式的根的性质 . 更多关于对偶理论的研究见文献 [9-11].

基于上述研究，本文以平面星体为研究对象，利用相对径向函数和对偶 Steiner 多项式根的实部得到了平面星体的一类 Green-Osher 不等式：

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{S^1}F(\rho_{P,\,Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant F(\mathrm{Re}(-t_1))+F(\mathrm{Re}(-t_2))\ , \tag{2}$$

其中等号成立当且仅当 P 和 Q 位似 .

1 预备知识

记 S^1 是二维欧氏平面上的单位圆，设 P 为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个紧子集 . 若 P 关于原点是一个星形体，则称 P 为平面星体 . 在文献 [9] 中，作者将平面星体的径向函数定义为 $\rho(P,\boldsymbol{u})=\max\{\lambda>0：\lambda\boldsymbol{u}\in K\}$ ，$\boldsymbol{u}\in S^1$. 由平面星体径向函数的定义可知，对于任意的常数 c，有如下等式成立：$\rho_{cP}(\boldsymbol{u})=c\rho_P(\boldsymbol{u})$ ，$\rho_P(c\boldsymbol{u})=c^{-1}\rho_P(\boldsymbol{u})$ ，$\rho_{\alpha P+\beta Q}(\boldsymbol{u})=\alpha\rho_P(\boldsymbol{u})+\beta\rho_Q(\boldsymbol{u})$. 在欧氏平面上，由于单位向量 $\boldsymbol{u}$ 可以表示为 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 故本文用 $\rho_P(\theta)$ 表示平面星体 P 的径向函数 .

设 $L(P)$ 是平面星体 P 的边界曲线的周长，$A(P)$ 是平面星体 P 的边界曲线围成的区域的面积，s 是 P 的弧长，则 P 的周长和面积可以表示为：

$$L(P)=\int_{S^1}\rho_P(\theta)\mathrm{d}\theta，A(P)=\frac{1}{2}\int_{\partial P}\rho_P(\theta)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_{S^1}\rho_P^2(\theta)\mathrm{d}\theta\ . \tag{3}$$

定义两平面星体 P 相对于 Q 的相对径向函数为 $\rho_{P,\ Q}(\theta)=\frac{\rho_P(\theta)}{\rho_Q(\theta)}$. 若 $P=\lambda Q+t$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$ ，$t\in\mathbf{R}^2$, 则称 P 和 Q 位似 . 在文献 [7] 中，作者将 P 和 Q 的对偶混合体积定义为 $\tilde{V}(P,\mathrm{Q})=\frac{1}{2}\int_{S^1}\rho_P(\theta)\rho_Q(\theta)\mathrm{d}\theta$. 根据该定义再结合式 (3) 可得，平面上的对偶星体的 Steiner 多项式可以表示为：

$$A(P+tQ)=\frac{1}{2}\int_{S^1}(\rho_P(\theta)+t\rho_Q(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_{S^1}\rho_P^2(\theta)\mathrm{d}\theta+t\int_{S^1}\rho_P(\theta)\rho_Q(\theta)\mathrm{d}\theta+t^2\frac{1}{2}\int_{S^1}\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta=A(P)+2\tilde{V}(P,\mathrm{Q})t+A(Q)t^2\ . \tag{4}$$

引理 1[7]　对偶 Aleksandrov-Fenchel 不等式为：$\tilde{V}(P_1,P_2,\cdots,P_n)^m\leqslant\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{V}(P_1,\cdots,P_{n-m},P_{n-j},\cdots,P_{n-j})$，其中 $1<m\leqslant n$，$\tilde{V}$ 代表对偶混合体积，等号成立当且仅当 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 位似 .

引理 2（琴生不等式）[12]　设 $f(x)$ 是区间 $(a,\ b)$ 上的凸函数，则对于 $\forall\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,\ b)$ 有

$$f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\leqslant a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)\ , \tag{5}$$

其中 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.

引理 3　若 $F(x)$ 是一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的严格凸函数，则对于 $\forall\ a,b,c\in\mathbf{R}$，当 $b\geqslant a\geqslant 0$ 时，有

$$F(c-a)+F(c+a)\leqslant F(c-b)+F(c+b)\ , \tag{6}$$

等号成立当且仅当 $a=b$.

证明　由于凸函数在开区间处处可导，因此分别在区间 $(c-b,\ c-a)$ 和 $(c+a,\ c+b)$ 上利用 Lagrange 中值定理可得，存在 $e_1\in(c-b,\ c-a)$，$e_2\in(c+a,\ c+b)$，且使得

$$F(c-a)-F(c-b)=(b-a)F'(e_1)\ ,$$

$$F(c+b)-F(c+a)=(b-a)F'(e_2)\ .$$

因为 $F(x)$ 为凸函数，即 $F'(x)$ 为单调递增函数，所以有 $F'(e_2)\geqslant F'(e_1)$，

$$F(c-a)+F(c+a)\leqslant F(c-b)+F(c+b),$$

当 $a=b$ 时，等号成立；反之，等号成立时，$F'(e_2)=F'(e_1)$ 或 $a=b$. 而由于 $F(x)$ 为严格凸函数，且 $e_1\neq e_2$，故只有 $a=b$，证毕 .

2　主要结果及其证明

定理 1　设 P 和 Q 是两个关于原点的平面星体，记 $\rho_P(\theta)$ 和 $\rho_Q(\theta)$ 分别是 P 和 Q 的径向函数，$\rho_{P,\ Q}(\theta)$ 为 P 相对于 Q 的相对径向函数 . 若 $F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的严格凸函数，则有：

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{S^1}F(\rho_{P,Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant F(\mathrm{Re}(-t_1))+F(\mathrm{Re}(-t_2))\ ,$$

其中 t_1 和 t_2 是式 (5) 的两个根，等号成立当且仅当 P 和 Q 位似 .

证明　考虑积分上界 $\sup\{\int_I\rho_{P,\ Q}(\theta)\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\mid I\in S^1,\int_I\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta=A(Q)\}$. 假设 I_1 为达到该上界的区间，I_2 为 I_1 在 S^1 中的补集，并定义 $\rho_1=\frac{1}{A(Q)}\int_{I_1}\rho_{P,\ Q}(\theta)\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，$\rho_2=\frac{1}{A(Q)}\int_{I_2}\rho_{P,\ Q}(\theta)\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta$. 由上述假设和定义可知，$\rho_1\geqslant\rho_1$ 且 $\rho_1+\rho_2=\frac{2\tilde{V}(P,\ Q)}{A(Q)}$，故存在常数 b，使得：

$$\rho_1=\frac{\tilde{V}(P,\ Q)}{A(Q)}+b\ ,\ \rho_2=\frac{\tilde{V}(P,\ Q)}{A(Q)}-b\ . \tag{7}$$

由引理 2 的积分形式可知，对于任意的严格凸函数 $F(x)$，其在区间 I_1 和 I_2 上分别有：

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{I_1}F(\rho_{P,\ Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant F(\frac{1}{A(Q)}\int_{I_1}\rho_{P,\ Q}(\theta)\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta)=F(\rho_1),$$

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{I_2}F(\rho_{P,\ Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant F(\frac{1}{A(Q)}\int_{I_2}\rho_{P,\ Q}(\theta)\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta)=F(\rho_2).$$

相加以上两个式子可得:

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{S^1}F(\rho_{P,\ Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant F(\rho_1)+F(\rho_2). \tag{8}$$

令 $A(P)+2t\tilde{V}(P,\ Q)+t^2A(Q)=0$, 则求解关于 t 的方程可得:

$$t_1=\frac{-\tilde{V}(P,\ Q)+\sqrt{\tilde{V}(P,\ Q)^2-A(P)A(Q)}}{A(Q)},$$

$$t_2=\frac{-\tilde{V}(P,\ Q)-\sqrt{\tilde{V}(P,\ Q)^2-A(P)A(Q)}}{A(Q)}.$$

由引理1可知, 当 $m=n=2$ 时有 $\tilde{V}(P,\ Q)^2\leqslant A(P)A(Q)$, 故 t_1 和 t_2 是两个互为共轭的复根, 且此时 $\mathrm{Re}(-t_1)=\mathrm{Re}(-t_2)=\dfrac{\tilde{V}(P,Q)}{A(Q)}$, 由此再综合引理3和式(8)、式(9)可知 $F(\rho_1)+F(\rho_2)\geqslant F(\mathrm{Re}(-t_1))+F(\mathrm{Re}(-t_2))$, 故有 $\dfrac{1}{A(Q)}\int_{S^1}F(\rho_{P,\ Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant F(\mathrm{Re}(-t_1))+F(\mathrm{Re}(-t_2))$.

下证式(2)等号成立的充要条件是 P 和 Q 位似, 由 ρ_1 和 ρ_2 的定义可知 $\rho_1=\rho_2$, 故式(10)中的等号成立, 并进而有 $\mathrm{Re}(-t_1)=\mathrm{Re}(-t_2)=\rho_1=\rho_2$, 因此式(3)中的等号成立.

下证式(2)中等号成立时 P 和 Q 位似. 由原命题和逆否命题具有相同的真假性可知, 只需证 P 和 Q 不位似时式(2)的左边严格大于右边即可. 由于 P 和 Q 不位似时, $\rho_1>\mathrm{Re}(-t_1)$, 因此由引理3可知 $F(\rho_1)+F(\rho_2)>F(\mathrm{Re}(-t_1))+F(\mathrm{Re}(-t_2))$, 即 $\dfrac{1}{A(Q)}\int_{S^1}F(\rho_{P,\ Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\mathrm{d}\theta>F(\mathrm{Re}(-t_1))+F(\mathrm{Re}(-t_2))$, 证毕.

推论1 设 P 和 Q 是两个关于原点的平面星体, 记 $\rho_P(\theta)$ 和 $\rho_Q(\theta)$ 分别是 P 和 Q 径向函数, $\rho_{P,\ Q}(\theta)$ 是 P 相对于 Q 的相对径向函数. 若 $G(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的严格凹函数, 则有:

$$\frac{1}{A(Q)}\int_{S^1}G(\rho_{P,\ Q}(\theta))\rho_Q^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\leqslant G(\mathrm{Re}(-t_1))+G(\mathrm{Re}(-t_2)),$$

其中 t_1 和 t_2 是式(4)的两个根, 等号成立当且仅当 P 和 Q 位似.

证明 若将引理2和引理3中的题设条件由凸函数改为凹函数, 则引理2和引理3中的结论会随之发生改变(不等式(5)、(6)中的不等号变为反向), 由此即可以得到条件为凹函数情形下的引理2和引理3. 基于上述可知, 再通过类似于定理1的证明过程即可证明推论1成立.

参考文献:

[1] ZHANG D Y. A note on the isoperimetric deficit[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 478(1): 14-32.

[2] GAGE, M E. An isoperimetric inequality with applications to curve shortening[J]. Duke Mathematical Journal. 1983, 50(4): 1225-1229.

[3] 马磊, 曾春娜. 平面上加强的Ros不等式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(8): 23-25.

[4] GREEN M, OSHER S. Steiner polynomials, Wulff flows, and some new isoperimetric inequalities for convex plane

curves[J]. Asian Journal of Mathematics，1999，3：659-676.

[5] XI D M，LENG G S. Dar's conjecture and the log-Brunn-Minkowski inequality[J]. Journal of Differential Geometry，2016，103(1)：145-189.

[6] YANG Y L. Nonsymmetric extension of the Green–Osher inequality[J]. Geometriae Dedicata，2019，203(1)：155-161.

[7] LUTWAK E. Dual Mixed Volumes[J]. Pacific Journal of Mathematics，1975，58(2)：531-538.

[8] 张德燕，马统一 . 关于对偶 Steiner 多项式的根的注记 [J]. 纯粹数学与应用数学，2016，32(02)：111-118.

[9] 刘春燕，马统一 . 星体的 *p*- 混合弦长积分 [J]. 应用数学与计算数学学报，2013，27(02)：239-245.

[10] 徐珂，仇恒方，梅静芳 . 对偶的混合对称 Chernoff 型不等式及其稳定性 [J]. 淮北师范大学学报 (自然科学版)，2021，42(04)：5-11.

[11] 张增乐 . 星体的 Bonnesen- 型不等式 [J]. 数学物理学报，2021，41(05)：1249-1262.

[11] SCHNEIDER R. Convex Bodies：The Brunn-Minkowski Theory[M]. London：Cambridge University Press，2013：20.