第 50 卷 第 1 期
2024 年 3 月

延 边 大 学 学 报（自然科学版）
Journal of Yanbian University（Natural Science Edition）

Vol. 50 No. 1
Mar. 2024

文章编号：1004-4353（2024）01-0081-06

Sawada-Kotera 方程的精确行波解

杨春飞，刘小华

（贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025）

摘要：利用 tanh 展开法和 sn 展开法研究了 Sawada-Kotera 方程的精确行波解，得到了该方程的双曲正切型多项式孤立波解和双曲正割型孤立子解以及 Jacobi 椭圆正 (余) 弦函数解的精确表达式 . 利用 Maple 软件绘制了所得解在具体参数值下的 3D 图和 2D 图，并通过分析解的性态得出了相应解的类型 .

关键词：Sawada-Kotera 方程；tanh 展开法；sn 展开法；行波解

中国分类号：O175.2 文献标志码：A

The exact traveling wave solution of Sawada-Kotera equation

YANG Chunfei, LIU Xiaohua

(*College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China*)

Abstract: The exact traveling wave solution of Sawada-Kotera equation is discussed by using tanh expansion method and sn expansion method，and the exact expressions of the hyperbolic tangential polynomial solitons，hyperbolic secant solitons and Jacobi elliptic positive (complementary) string function solutions are established . The 3D and 2D graphs of the obtained solutions under specific parameter values are drawn by Maple software，and the types of corresponding solution are created ed by analyzing the behavior of the solution.

Key words: Sawada-Kotera equation；tanh expansion method；sn expansion method；traveling wave solution

0 引言

Sawada-Kotera(SK) 方程

$$u_t + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x + u_{xxxxx} = 0 \tag{1}$$

是孤波理论中的一个重要方程，它可用于研究共形场理论、二维量子引力规范场理论和 Liouville 方程的守恒流等 [1]. 近年来，一些学者运用 Hirota 方法 [2]、李对称群方法 [3]、Darboux 方法 [4] 等对方程 (1) 的精确行波解进行了研究 . 例如：文献 [5] 的作者利用 G'/G 展开法构造了 SK 方程的两类尖孤波解；文献 [6] 的作者利用经典李群方法构造了 SK 方程的群不变解；文献 [7] 的作者利用吴特征列方法获得了 SK 方程的孤波解和孤子解；文献 [8] 的作者利用 SK 方程的 Backlund 变换，从一个已知解出发得到了 SK 方程的精确行波解；文献 [9] 的作者利用改进的 F 展开法获得了 SK 方程的孤波解和三角函数解；文献 [10] 的作者利用 Hirota 双线性方法获得了 SK 方程的一孤子解、周期性二孤子解和奇异周期性孤子解 . 基于上述研究，本文利用 tanh 展开法和 sn 展开法讨论 Sawada-Kotera(SK) 方程的精确行波解 .

投稿日期：2023-12-20

基金项目：贵州省教育厅自然科学研究项目 (黔教技 [2023]012 号)

第一作者：杨春飞 (1999—)，男，硕士研究生，研究方向为微分方程及其精确解 .

通信作者：刘小华 (1975—)，女，博士，教授，研究方向为微分方程及其精确解 .

1 tanh 展开法和 sn 展开法

1.1 tanh 展开法

本文考虑如下 (1+1) 维的非线性发展方程:

$$H(u,\ u_t,\ u_x,\ u_{xx},\ \cdots)=0\ . \tag{2}$$

其中 H 为其变元 u, u_t, u_x, u_{xx}, $\cdots$ 的多项式. 利用 tanh 展开法构造 SK 方程精确行波解的步骤为:

第 1 步 对方程 (2) 作如下的行波变换:

$$u=u(\xi),\ \xi=k(x-ct)+\xi_0\ , \tag{3}$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速, ξ_0 为任意常数. 将式 (3) 代入式 (2) 后, 式 (2) 可化为如下的常微分方程:

$$F(u,\ u',\ u'',\ \cdots)=0\ . \tag{4}$$

第 2 步 假设方程 (4) 具有 tanh 形式的解:

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_iT^i,\ \ T=\tanh(\xi), \tag{5}$$

其中系数 $a_i(i=0,\ \cdots,\ m)$ 为待定参数, 且 T 满足

$$T'=1-T^2\ . \tag{6}$$

第 3 步 平衡方程 (4) 中的最高阶导数项和最高阶非线性项的幂次, 以此确定参数 m 的值. 若以 $O(u(\xi))$ 表示 $u(\xi)$ 关于 T 的多项式的最高幂次, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p}$ 的最高幂次和 $u^q\dfrac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p}$ 的最高幂次分别为:

$$O(\frac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p})=m+p,\ \ p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots; \tag{7}$$

$$O(u^q\frac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p})=(q+1)m+p,\ \ q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{8}$$

第 4 步 将式 (5)、式 (6) 代入式 (4) 后合并 T 的同次幂系数, 并令其等于零, 由此可得关于待定参数 $a_i(i=0,\ \cdots,\ m)$、k、c 的代数方程组.

第 5 步 首先, 利用数学软件 Maple 求解该代数方程组, 以此确定待定参数 $a_i(i=0,\ \cdots,\ m)$、k、c 的值; 然后, 利用式 (3) 和式 (5) 计算出方程 (2) 的精确行波解.

1.2 sn 展开法

在此仍考虑方程 (2) 和方程 (4). 利用 sn 展开法构造 SK 方程精确行波解的步骤为:

第 1 步 设方程 (2) 具有如下形式的解:

$$u(\xi)=\sum_{i=1}^{m}a_iS^i\ , \tag{9}$$

其中 $S=sn(\xi,\ r)$, 正整数 m 和实常数 $a_i(i=1,2,\ \cdots,\ m,\ \ a_m\neq 0)$ 待定.

第 2 步 平衡方程 (4) 中的最高阶导数项和最高阶非线性项的幂次, 以此确定参数 m. 令 Jacobi 椭圆函数为 $C=cn(\xi,\ r)$, $D=\mathrm{d}n(\xi,\ r)$, 则由椭圆函数导数公式:

$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\xi}=CD$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S}\cdot\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\xi}=CD\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S}$, 即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}=CD\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\ , \tag{10}$$

并有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(CD)=S(2r^2S^2-1-r^2)\ . \tag{11}$$

记 $F(S)=S(2r^2S^2-1-r^2)$，并令 $G(S)=(1-S^2)(1-r^2S^2)$. 由于

$$C^2D^2=G(S)\,, \tag{12}$$

因此有：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}=F(S)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}+G(S)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}S^2}\,, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\xi^3}=CD\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left[F(S)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}+G(S)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}S^2}\right], \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\xi^4}=F(S)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left[F(S)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}+G(S)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}S^2}\right]+G(S)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}S^2}\left[F(S)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}+G(S)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}S^2}\right]. \tag{15}$$

由以上容易归纳出：当 p 为偶数时，$\dfrac{\mathrm{d}^p u}{\mathrm{d}\xi^p}$ 是 S 的 $m+p$ 阶多项式；当 p 为奇数时，$\dfrac{\mathrm{d}^p u}{\mathrm{d}\xi^p}$ 是 CD 与 S 的 $m+p-2$ 阶多项式的积 . 从以上可以看出，式 (7) 和式 (8) 依然成立 .

第 3 步　将式 (9) —式 (15) 代入方程 (4) 可得如下代数方程：

$$P_1(S)+CDP_2(S)=0\,, \tag{16}$$

其中：P_1 和 P_2 为 S 的多项式 . 令 P_1 和 P_2 中的 S 的各次幂系数为零，则由此可得关于待定参数 $a_i(i=0,\cdots,m)$、 k、c 的代数方程组 .

第 4 步　首先，利用数学软件 Maple 求解该代数方程组，以此确定参数 $a_i(i=0,\cdots,m)$、 k、c 的值；然后，利用式 (3) 和式 (9) 计算出方程 (2) 的精确行波解 .

2　精确行波解

2.1　利用 tanh 展开法构造 SK 方程的精确行波解

将行波变换式 (3) 代入式 (1) 后，式 (1) 可化作如下关于变量 ξ 的常微分方程：

$$-cu'+5k^2uu'''+5k^2u'u''+5u^2u'+k^4u^{(5)}=0\ . \tag{17}$$

利用式 (7) 和式 (8) 平衡方程 (17) 中的最高阶导数项 $u^{(5)}$ 和最高阶非线性项 uu''' 的幂次，得 $m+5=m+(m+3)$，由此确定出 $m=2$. 基于此，令方程 (1) 有如下形式的解：

$$u(\xi)=a_0+a_1T+a_2T^2\ . \tag{18}$$

将式 (18)、(6) 代入式 (17) 后合并 T^j (j=0，1，⋯，5) 的同类项，并令其系数等于零，由此可得到如下关于 a_0、a_1 和 a_2 的代数方程组：

$$\begin{cases}72k^4a_2+18k^2a_2^2+a_2^3=0,\\ a_1(24k^4+40a_2k^2+5a_2^2)=0,\\ -48k^4a_2+(6a_2a_0+2a_1^2-8a_2^2)k^2+a_0a_2^2+a_1^2a_2=0,\\ [24k^4+(30a_2-6a_0)k^2-6a_2a_0-a_1^2)]a_1=0,\\ 136k^4a_2-40k^2a_2a_0-10k^2a_1^2+10k^2a_2^2+5a_0^2a_2+5a_0a_1^2-ca_2=0,\\ -16k^4a_1+10k^2a_1a_0-10k^2a_2a_1-5a_0^2a_1+ca_1=0.\end{cases} \tag{19}$$

应用 Maple 软件求解代数方程组 (19) 可得 a_0、a_1 和 a_2 的值有以下两种情况：

$$a_0=4k^2+0.2\sqrt{20k^4+5c},\ \ a_1=0,\ \ a_2=-6k^2, \tag{20}$$

$$a_0=4k^2-0.2\sqrt{20k^4+5c},\ \ a_1=0,\ \ a_2=-6k^2. \tag{21}$$

由式 (20) 和 (21) 以及式 (3) 和 (18) 可得方程 (1) 有如下两组孤立波解：

$$u_1(x,\ t)=4k^2-0.2\sqrt{20k^4+5c}-6k^2\tanh^2[k(x-ct)+\xi_0], \tag{22}$$

$$u_2(x,\ t)=4k^2+0.2\sqrt{20k^4+5c}-6k^2\tanh^2[k(x-ct)+\xi_0], \tag{23}$$

其中 k、c 满足 $4k^2+c>0$. 取 k 和 c 满足 $c-16k^4=0$, 则由式 (22) 和 (23) 可得方程 (1) 的孤立子解为:

$$u_3(x,\ t)=1.5\sqrt{c}\,\mathrm{sech}^2\left[\pm 0.5c^{\frac{1}{4}}(x-ct)+\xi_0\right], \tag{24}$$

$$u_4(x,\ t)=-1.5\sqrt{c}\,\mathrm{sech}^2\left[\pm 0.5c^{\frac{1}{4}}(x-ct)+\xi_0\right]. \tag{25}$$

2.2 利用 sn 展开法构造 SK 方程的精确行波解

由式 (17) 可知, $m=2$. 于是方程 (1) 有如下形式的解:

$$u(\xi)=a_0+a_1S+a_2S^2\ . \tag{26}$$

将式 (26) 代入式 (17) 后合并 $S^j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$ 的同类项, 并令其系数等于零, 由此可得到 a_0、a_1 和 a_2 的代数方程组:

$$\begin{cases}72k^4r^4a_2+18k^2r^2a_2^2+a_2^3=0,\\ a_1(24k^4r^4+40a_2k^2r^2+5a_2^2)=0,\\ 24k^4r^4a_2+24k^4r^2a_2-6k^2r^2a_0a_2-2k^2r^2a_1^2+4k^2r^2a_2^2+4k^2a_2^2-a_0a_2^2-a_1^2a_2=0,\\ [12k^4r^4+12k^4r^2-6k^2r^2a_0+(156k^2r^2a_2+15k^2a_2)-6a_0a_2-a_1^2]a_1=0,\\ (16r^4+104r^2+16)k^4a_2-(20k^2r^2+20k^2)a_2a_0-(5k^2r^2+5k^2)a_1^2+10k^2a_2^2+5a_0^2a_2+\\ 5a_0a_1^2-ca_2=0,\\ -(r^4+14r^2+1)k^4a_1+(5k^2r^2+5k^2)a_1a_0-10k^2a_2a_1-5a_0^2a_1+ca_1=0.\end{cases} \tag{27}$$

应用 Maple 软件求解代数方程组 (27) 可得 a_0、a_1 和 a_2 的值有以下两种情况:

$$a_0=M+N,\ \ a_1=0,\ \ a_2=-6k^2r^2. \tag{28}$$

$$a_0=M-N,\ \ a_1=0,\ \ a_2=-6k^2r^2. \tag{29}$$

其中: $M=2k^2r^2+2k^2$, $N=0.2\sqrt{20k^4r^4-20k^4r^2+20k^4+5c}$, k 和 c 满足 $20k^4r^4-20k^4r^2+20k^4+5c\geqslant 0$, 即 $4k^4r^4-4k^4r^2+4k^4+c\geqslant 0$.

由式 (28) 和 (29) 以及式 (3) 和 (26) 可求得方程 (1) 有如下两组 Jacobi 椭圆正弦周期波解:

$$u_5(x,\ t)=M-N-6k^2r^2sn^2(\xi,\ r),\ \ \xi=k(x-ct)+\xi_0\ , \tag{30}$$

$$u_6(x,\ t)=M+N-6k^2r^2sn^2(\xi,\ r),\ \xi=k(x-ct)+\xi_0\ , \tag{31}$$

其中 k、c、ξ_0 是任意常数 . 利用式 $sn^2(\xi)+cn^2(\xi)=1$ 以及式 (30) 和 (31) 可得方程 (1) 有如下两组 Jacobi 椭圆余弦周期波解:

$$u_7(x,\ t)=M_1-N+6k^2r^2cn^2(\xi,\ r),\ \xi=k(x-ct)+\xi_0\ , \tag{32}$$

$$u_8(x,\ t)=M_1+N+6k^2r^2cn^2(\xi,\ r),\ \xi=k(x-ct)+\xi_0\ , \tag{33}$$

其中 $M_1=2k^2-4k^2r^2$. 在式 (30) 和式 (31) 中令 $r\to 1$, 则式 (30) 和式 (31) 可退化为式 (22) 和式 (23). 在式 (32) 和式 (33) 中令 $r\to 1$, 则式 (32) 和 (33) 式可退化为如下两组孤立波解:

$$u_9(x,\ t)=-2k^2-0.2\sqrt{20k^4+5c}+6k^2\mathrm{sech}^2[k(x-ct)+\xi_0]; \tag{34}$$

$$u_{10}(x,\ t)=-2k^2+0.2\sqrt{20k^4+5c}+6k^2\mathrm{sech}^2[k(x-ct)+\xi_0]. \tag{35}$$

由 $\tanh^2(\xi)=1-\mathrm{sech}^2(\xi)$ 可知, 式 (34) 和式 (35) 就是式 (22) 和式 (23) 的变形形式 . 在式 (34) 和式 (35) 中, 若取 k 和 c 满足 $c-16k^4=0$, 则式 (34) 和式 (35) 变为式 (24) 和式 (25).

3　解的性态分析

图 1 是方程（1）的解 u_1 在区间 $-10<x$，$t<10$ 内的 3D 图（参数为 $k=1$，$c=1$，$\xi_0=0$）和 2D 图（参数为 $t=0$）. 由图 1 可以看出，此解为双曲型钟状孤立波解（亮孤子解）. 图 2 是方程（1）的解 u_3 在区间 $-10<x$，$t<10$ 内的 3D 图（参数为 $c=1$，$\xi_0=0$）和 2D 图（参数为 $t=0$）. 由图 2 可以看出，此解为双曲型钟状孤立子解 . 图 3 是方程（1）的解 u_4 在区间 $-10<x$，$t<10$ 内的 3D 图（参数为 $c=1$，$\xi_0=0$）和 2D 图（参数为 $t=0$）. 由图 3 可以看出，此解为双曲型周期解 . 图 4 是方程（1）的解 u_5 在区间 $-10<x$，$t<10$ 内的 3D 图（参数为 $k=1$，$c=-3.25$，$r=1$，$\xi_0=0$）和 2D 图（参数为 $t=0$）. 由图 4 可以看出，此解为 Jacobi 椭圆正弦周期解 .

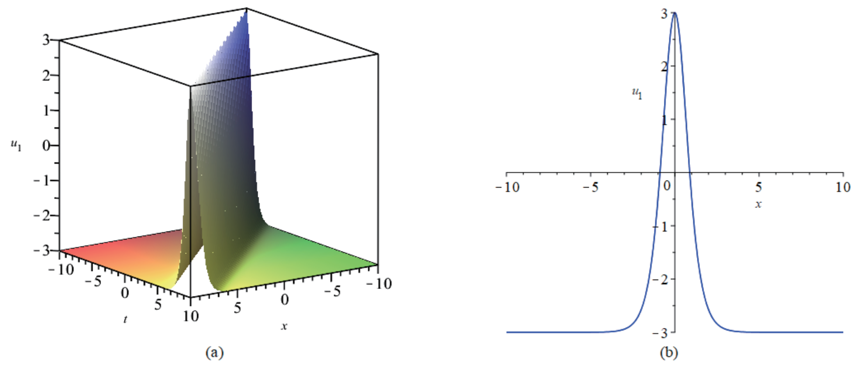

图 1　解 u_1 的 3D 图 (a) 和 2D 图 (b)

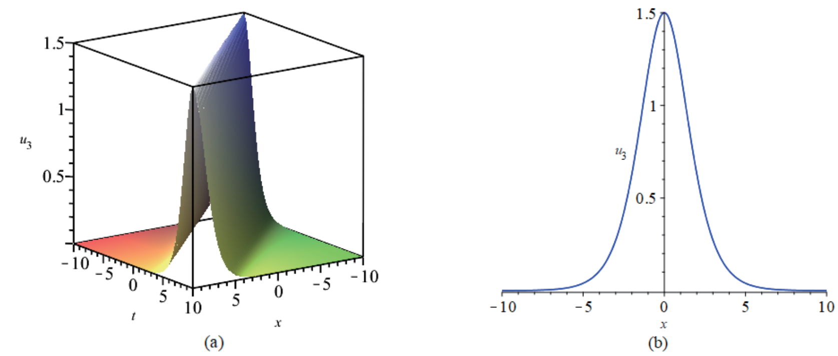

图 2　解 u_3 的 3D 图 (a) 和 2D 图 (b)

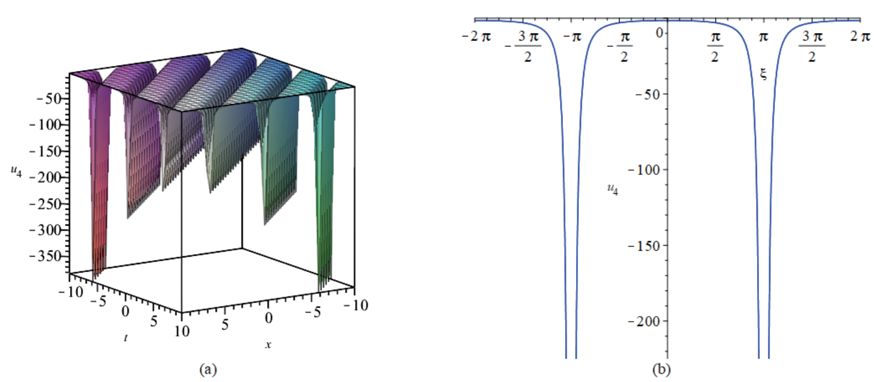

图 3　解 u_4 的 3D 图 (a) 和 2D 图 (b)

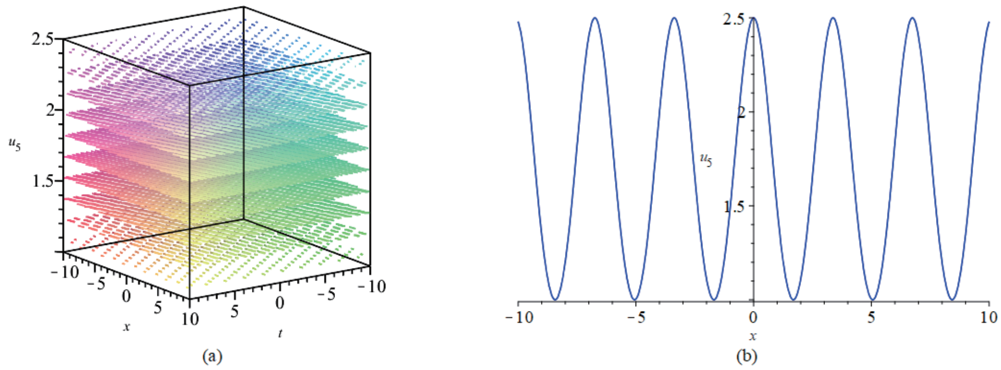

图4 解 u_5 的 3D 图 (a) 和 2D 图 (b)

参考文献：

[1] 阮航宇 . (2+1) 维 Sawada-Kotera 方程中两个 Y 周期孤子的相互作用 [J]. 物理学报，2004，53(6)：1617-1622.

[2] ZUO D W，MO H X，Zhou H P. Multi-soliton solutions of the generalized Sawada–Kotera equation[J]. Zeitschrift für Naturforschung A，2016，71(4)：305-309.

[3] 费金喜，马正义，许慧 .Sawada-Kotera 方程的非局域对称和精确解 [J]. 丽水学院学报，2019，41(5)：1-6.

[4] 耿献国 . 二维 Sawada-Kotera 方程的 Darboux 变换 [J]. 高校应用数学学报 A 辑 (中文版)，1989(4)：494-497.

[5] 李向正 . Sawada-Kotera 方程的两类尖孤立波解 [J]. 河南科技大学学报 (自然科学版)，2014，35(2)：78-81.

[6] WU J W，CAI YJ，LIN J. Localization of nonlocal symmetries and interaction solutions of the Sawada–Kotera equation[J]. Communications in Theoretical Physics，2021，73(6)：10-16.

[7] 李志斌，潘素起 . 广义五阶 KdV 方程的孤波解与孤子解 [J]. 物理学报，2001，50(3)：402-405.

[8] 徐惠益 .Sawada-Kotera 方程的变换及其精确解 [J]. 苏州大学学报 (自然科学版)，2005，21(1)：24-27.

[9] 张平 . 关于一类五阶非线性发展方程的新精确解 [J]. 五邑大学学报 (自然科学版)，2008，22(1)：35-39.

[10] LIU C，DAI Z. Exact soliton solutions for the fifth-order Sawada–Kotera equation[J]. Applied Mathematics and Computation，2008，206(1)：272-275.

[11] 李志斌 . 非线性数学物理方程的行波解 [M]. 北京：科学出版社，2007.

[12] 刘式适，傅遵涛，刘式达，等 .Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用 [J]. 物理学报，2001，50(11)：2068-2073.