

文章编号: 1004-4353 (2024) 01-0076-05

Boussinesq 方程的精确行波解

杨忠鑫, 刘小华

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025)

摘要: 利用广义 kudryashov 方法讨论了 Boussinesq 方程的行波解, 给出了其 5 个精确指数函数解的显式表达式, 并利用 Maple 软件给出了该方程 3 个精确解的性态.

关键词: Boussinesq 方程; 广义 kudryashov 方法; 行波解; 精确指数函数解; 解的性态

中国分类号: O175.29 **文献标志码:** A

Exact traveling wave solution of the Boussinesq equation

YANG Zhongxin, LIU Xiaohua

(School of Data Science and information engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

Abstract: The traveling wave solution of Boussinesq equation was discussed by using generalized kudryashov method. The expression of 5 exact exponential function solutions was given. The behavior of 3 exact solutions was obtained by means of Maple software.

Keywords: Boussinesq equation; generalized kudryashov method; traveling wave solution; exact exponential function solution; behavior of the solution

0 引言

Boussinesq 方程是一类含有孤立子波解的非线性发展方程, 可用于描述自然中的多种现象, 如大气湍流、大气断层等, 因此求解其精确解对研究这些复杂的物理现象具有重要意义. 2014 年, Seyma 等^[1]利用广义 kudryashov 方法求解了时间分数阶 Burgers 方程、时间分数阶 Cahn-Hilliard 方程和时间分数阶广义三阶 Kdv 方程的精确解; 2020 年, Gurefe^[2]利用广义 kudryashov 方法对可以用 Atangana 的适形导数表示的非线性分数阶偏微分方程的精确解进行了分类; 2020 年, 李韶伟^[3]利用首次积分法得到了改进的 Boussinesq 方程的所有有界精确行波解; 2022 年, 林府标等^[4]利用 $\varphi(\xi)$ 展式法获得了 Boussinesq 方程行波解的类型; 2023 年, 乌日乐等^[5]利用 Darboux 变换获得了 Boussinesq 方程及其修正 Boussinesq 方程的精确解. 由于广义 kudryashov 方法^[6]在求解非线性偏微分方程时具有简单、有效等优点, 因此本文利用其研究具有以下形式的 Boussinesq 方程式 (1)^[7] 的精确行波解, 其中 b_1 为任意常数.

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xx} - b_1(u^2)_{xx} = 0. \quad (1)$$

方程 (1) 是物理学和力学领域中的一个重要模型, 其可用于描述波在弱非线性和色散介质中的传播现

投稿日期: 2023-08-06

基金项目: 贵州教育厅自然科学研究项目 (QJJ2023012)

第一作者: 杨忠鑫 (1998—), 女, 硕士研究生, 研究方向为微分方程及其精确解.

通信作者: 刘小华 (1975—), 女, 博士, 教授, 研究方向为微分方程及其精确解.

象. 目前已有学者研究了方程 (1) 的 painlevé 性质^[8]、Bäcklund 变换^[9] 和 Lax 对^[9] 等. 基于上述研究, 本文将研究方程 (1) 的精确行波解, 并分析其解的性态.

1 利用广义方法求非线性偏微分方程的精确解

本文考虑如下非线性偏微分方程:

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (2)$$

其中 F 是未知函数 $u = u(x, t)$ 及其偏导数的多项式函数. 利用广义 kudryashov 方法^[10] 求其精确解的基本步骤为:

第 1 步 假设行波变换为:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - kt, \quad (3)$$

k 是波速. 将 (3) 式代入 (2) 式中可得如下常微分方程:

$$F(u, u', u'', \dots) = 0. \quad (4)$$

第 2 步 设 (4) 式的精确解为如下的有理式形式:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i Q^i(\xi)}{\sum_{j=0}^m s_j Q^j(\xi)} = \frac{A[Q(\xi)]}{B[Q(\xi)]}, \quad (5)$$

其中 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 和 $s_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ 为待定系数, $a_n \neq 0$, $s_m \neq 0$, $Q = \frac{1}{1 + e^\xi}$, 且同时满足一阶伯努利微分方程:

$$Q'(\xi) = Q^2(\xi) - Q(\xi). \quad (6)$$

第 3 步 利用齐次平衡原理平衡 (4) 式中的最高阶导数和非线性项, 以此确定 (5) 式中的正整数 n 和 m .

第 4 步 将 (5) 式和 (6) 式代入 (4) 式中求 $Q^{i-j}(\xi) (i, j = 0, 1, 2, \dots)$ 的多项式, 合并所得的同类项后再设各项的系数为 0, 由此可得到一个关于 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 和 $s_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ 的代数方程组. 利用 Maple 软件求解该代数方程组可得到参数 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 和 $s_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ 的值, 由此即可得到方程 (2) 行波解的精确表达式.

2 方程的精确解

将 (3) 式代入 (1) 式可得 $k^2 u'' + u^{(4)} - u'' - 2b_1(u')^2 - 2b_1 u u'' = 0$. 对上式积分两次可得:

$$(k^2 - 1)u + u'' - b_1 u^2 + c_1 = 0, \quad (7)$$

其中 $' = \frac{d}{d\xi}$, c_1 是积分常数. 由 (7) 式中的最高阶 u'' 和非线性项 u^2 平衡可得 $n = m + 2$. 若 $m = 0$, 则由 (5) 式可得:

$$u(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q(\xi) + a_2 Q(\xi)^2}{s_0}, \quad (8)$$

其中 a_0, a_1, a_2, s_0 是待确定的常数. 将 (8) 式代入 (7) 式即可得关于 $Q(\xi)^i (i = 0, \dots, 4)$ 的多项式. 设 $Q(\xi)^i (i = 0, \dots, 4)$ 的同次幂系数为 0, 则可得如下代数方程组:

$$Q(\xi)^4: -a_2^2 b_1 + 6a_2 s_0 = 0,$$

$$Q(\xi)^3: (2a_1 - 10a_2) s_0 - 2a_1 a_2 b_1 = 0,$$

$$Q(\xi)^2: (k^2 a_2 - 3a_1 + 3a_2)s_0 - 2a_0 a_2 b_1 - a_1^2 b_1 = 0, \quad (9)$$

$$Q(\xi)^1: a_1(k^2 s_0 - 2a_0 b_1) = 0,$$

$$Q(\xi)^0: c_1 s_0^2 + a_2(k^2 - 1)s_0 - a_0^2 b_1 = 0.$$

利用 Maple 软件求解代数方程组 (9), 可得其解的如下 1 种情况.

$$\text{情况 1 } a_0 = -\frac{2s_0 c_1}{k^2 - 1}, \quad a_1 = \frac{24s_0 c_1}{k^2(k^2 - 2)}, \quad a_2 = -\frac{24s_0 c_1}{k^2(k^2 - 2)}, \quad b_1 = -\frac{k^2(k^2 - 2)}{4c_1}. \quad (10)$$

若 $m = 1$, 则由 $n = m + 2$ 可得 $n = 3$. 于是再由 (5) 式可得:

$$u(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q(\xi) + a_2 Q(\xi)^2 + a_3 Q(\xi)^3}{s_0 + s_1 Q(\xi)}, \quad (11)$$

其中 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 s_0 、 s_1 是待确定的常数. 将 (11) 式代入 (7) 式中即可得关于 $Q^i(\xi) (i = 0, \dots, 7)$ 的多项式.

设 $Q^i(\xi) (i = 0, \dots, 7)$ 的同次幂系数为 0, 则可得如下代数方程组:

$$\begin{aligned} Q(\xi)^7: & -a_3^2 b_1 s_1 + 6a_3 s_1^2 = 0, \\ Q(\xi)^6: & (-a_3^2 b_1 + 16a_3 s_1)s_0 + 2((a_2 - 5a_3)s_1 - a_2 a_3 b_1)s_1 = 0, \\ Q(\xi)^5: & 12a_3 s_0^2 + ((6a_2 - 27a_3)s_1 - 2a_2 a_3 b_1)s_0 + ((k^2 a_3 - 3a_2 + 3a_3)s_1 - 2a_1 a_3 b_1 - a_2^2 b_1)s_1 = 0, \\ Q(\xi)^4: & (6a_2 - 21a_3)s_0^2 + ((2k^2 a_3 - 9a_2 + 9a_3)s_1 - 2a_1 a_3 b_1)s_0 + (k^2 s_1 a_2 - 2b_1(a_0 a_3 + a_1 a_2))s_1 = 0, \\ Q(\xi)^3: & (k^2 a_3 + 2a_1 - 10a_2 + 8a_3)s_0^2 + ((2k^2 a_2 - 2a_0 + a_1 + a_2)s_1 - 2b_1(a_0 a_3 + a_1 a_2))s_0 + \\ & (c_1 s_1^2 + (k^2 a_1 - a_0 - a_1)s_1 + (-2a_0 a_2 - a_1^2)b_1)s_1 = 0, \\ Q(\xi)^2: & (k^2 a_2 - 3a_1 + 3a_2)s_0^2 + 3(c_1 s_1^2 + (2k^2 a_1 + 3a_0 - 3a_1)s_1 + (-2a_0 a_2 - a_1^2)b_1)s_0 + \\ & s_1 a_0(k^2 s_1 - 2b_1 a_1) = 0, \\ Q(\xi)^1: & (k^2 a_1 + 3c_1 s_1)s_0^2 + 2a_0((k^2 - \frac{3}{2})s_1 - b_1 a_1)s_0 - s_1 a_0^2 b_1 = 0, \\ Q(\xi)^0: & s_0(c_1 s_0^2 + a_0(k^2 - 1)s_0 - a_0^2 b_1) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

利用 Maple 软件求解代数方程组 (12), 可得其解的如下 4 种情况.

$$\text{情况 2 } a_0 = -\frac{2s_0 c_1}{k^2 - 2}, \quad a_1 = -\frac{2c_1(k^2 s_1 - 12s_0)}{k^2(k^2 - 2)}, \quad a_2 = -\frac{24c_1(s_0 - s_1)}{k^2(k^2 - 2)}, \quad a_3 = -\frac{24s_1 c_1}{k^2(k^2 - 2)}, \quad b_1 = -\frac{k^2(k^2 - 2)}{4c_1}. \quad (13)$$

$$\text{情况 3 } a_0 = -\frac{2s_0 c_1}{k^2 - 2}, \quad a_1 = -\frac{2s_1 c_1}{k^2 - 2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_1 = -\frac{k^2(k^2 - 2)}{4c_1}. \quad (14)$$

$$\text{情况 4 } a_1 = c_1 s_1 - a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_1 = 0, \quad s_0 = 0, \quad k = 0. \quad (15)$$

$$\text{情况 5 } a_0 = -c_1 s_1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_1 = 0, \quad s_0 = -s_1, \quad k = 0. \quad (16)$$

由式 (3)、(8)、(10) 可得 Boussinesq 方程 (1) 的指数函数解为:

$$u_1(\xi) = u_1(x, t) = \frac{-\frac{2s_0 c_1}{k^2 - 1} + \frac{24s_0 c_1}{k^2(k^2 - 2)} \times \frac{1}{1 + e^\xi} - \frac{24s_0 c_1}{k^2(k^2 - 2)} \times \frac{1}{(1 + e^\xi)^2}}{s_0}, \quad (17)$$

其中 $\xi = x - kt$, c_1 , s_0 为任意常数.

由式 (3)、(11)、(13) 可得 Boussinesq 方程 (1) 的指数函数解为:

$$u_2(\xi) = u_2(x, t) = \frac{-\frac{2s_0 c_1}{k^2 - 1} - \frac{2c_1(k^2 s_1 - 12s_0)}{k^2(k^2 - 2)} \times \frac{1}{1 + e^\xi} - \frac{24c_1(s_0 - s_1)}{k^2(k^2 - 2)} \times \frac{1}{(1 + e^\xi)^2} - \frac{24s_1 c_1}{k^2(k^2 - 2)} \times \frac{1}{(1 + e^\xi)^3}}{s_0 + s_1 \times \frac{1}{1 + e^\xi}},$$

其中 $\xi = x - kt$, c_1 , s_0 , s_1 为任意常数.

由式 (3)、(11)、(14) 可得 Boussinesq 方程 (1) 的指数函数解为 $u_3(\xi) = u_3(x, t) = \frac{-\frac{2s_0c_1}{k^2-2} - \frac{2s_1c_1}{k^2-2} \times \frac{1}{1+e^\xi}}{s_0 + s_1 \times \frac{1}{1+e^\xi}}$,

其中 $\xi = x - kt$, c_1, s_0, s_1 为任意常数.

由式 (3)、(11)、(15) 可得 Boussinesq 方程 (1) 的指数函数解 $u_4(\xi) = u_4(x, t) = \frac{a_0 + (c_1s_1 - a_0) \times \frac{1}{1+e^\xi}}{-s_1 \times \frac{1}{1+e^\xi}}$, 其

中 $\xi = x$, c_1, a_0, s_1 为任意常数.

由式 (3)、(11)、(16) 可得 Boussinesq 方程 (1) 的指数函数解为 $u_5(\xi) = u_5(x, t) = \frac{-c_1s_1}{-s_1 + s_1 \times \frac{1}{1+e^\xi}}$, 其中

$\xi = x$, c_1, s_1 为任意常数.

3 解的性态分析

本文用 Maple 对方程 (1) 精确解的行为性态进行分析. 图 1 为解 $u_1(x, t)$ 在 $s_0 = 0.1, c_1 = 0.3, k = 1$ 时的 3D 图 (a) 和在 $t = 0.5$ 时的 2D 图 (b). 由图 1 可以看出, $u_1(x, t)$ 是方程 (1) 的钟状孤波解 (暗孤子解). 图 2 为解 $u_2(x, t)$ 在 $s_0 = 0.1, s_1 = 0.2, c_1 = 0.3, k = 1$ 时的 3D 图 (a) 和在 $t = 0.5$ 时的 2D 图 (b). 由图 2 可以看出, $u_2(x, t)$ 是方程 (1) 单调递减的扭状孤波解, 并且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $u_2(x, t) \rightarrow 0$; $x \rightarrow 0$ 时, $u_2(x, t) \rightarrow 5$. 图 3 为解 $u_3(x, t)$ 在 $s_0 = 0.3, s_1 = 0.6, c_1 = 0.5, k = 1$ 时的 3D 图 (a) 和 $t = 0.5$ 时的 2D 图 (b). 由图 3 可以看出 $u_3(x, t)$ 是方程 (1) 单调递增的精确行波解, 并且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $u_3(x, t) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $u_3(x, t) \rightarrow +\infty$. 由图 1 和图 2 可得, 参数 s_1 会对方程 (1) 行波解的类型产生如下影响: $s_1 = 0.2$ 不存在时, 方程 (1) 存在钟状孤波解; $s_1 = 0.2$ 时, 方程 (1) 存在扭状孤波解. 对比图 1、图 2 及图 3 可知, 当波速 k 和 t 保持不变时, 参数 s_0, s_1, c_1 的不同取值会影响方程 (1) 行波解的类型.

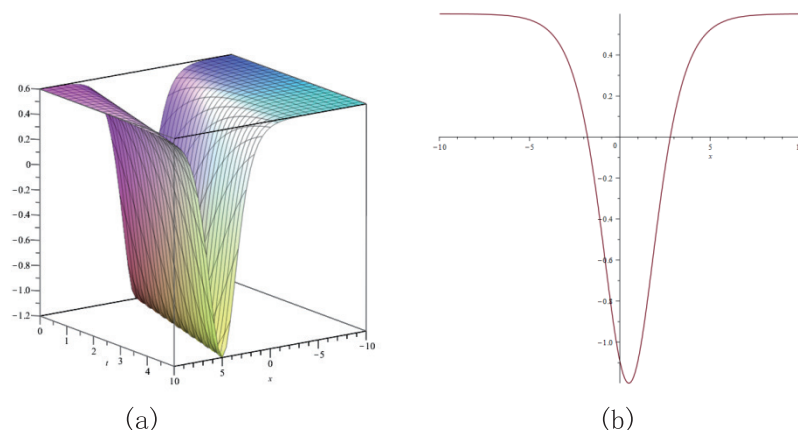


图 1 解 $u_1(x, t)$ 在 $s_0 = 0.1, c_1 = 0.3, k = 1$ 时的 3D 图 (a) 和在 $t = 0.5$ 时的 2D 图 (b)

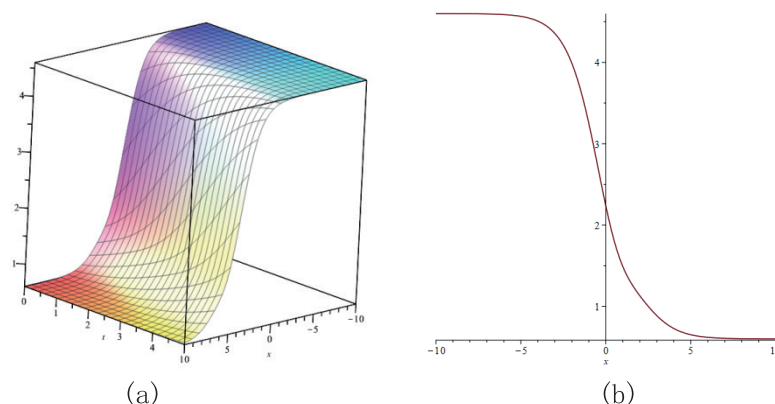


图 2 解 $u_2(x, t)$ 在 $s_0 = 0.1$, $s_1 = 0.2$, $c_1 = 0.3$, $k = 1$ 时的 3D 图 (a) 和在 $t = 0.5$ 时的 2D 图 (b)

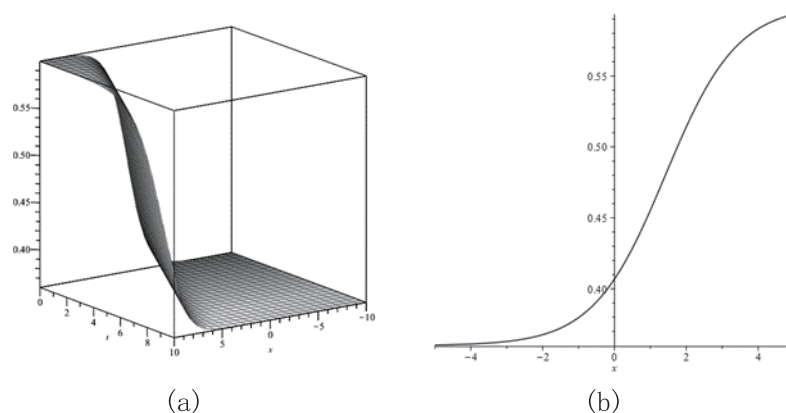


图 3 解 $u_3(x, t)$ 在 $s_0 = 0.3$, $s_1 = 0.6$, $c_1 = 0.5$, $k = 1$ 时的 3D 图 (a) 和在 $t = 0.5$ 时的 2D 图 (b)

参考文献:

- [1] Tuluze Demiray S, Pandir Y, Bulut H. Generalized Kudryashov method for time-fractional differential equations[C]// Abstract and applied analysis. London: Hindawi, 2014.
- [2] Gurefe Y. The generalized Kudryashov method for the nonlinear fractional partial differential equations with the beta-derivative[J]. Revista Mexicana de Física, 2020, 66(6): 771-781.
- [3] 李韶伟. 改进的 Boussinesq 方程的精确行波解及其波形随波速的演化 [J]. 台州学院学报, 2020, 42(3): 1-6.
- [4] 林府标, 杨欣霞. Boussinesq 方程的经典李群分析及群不变解和行波解 [J]. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2022, 43(1): 70-77.
- [5] 乌日乐, 套格图桑, 扎其劳. 修正 Boussinesq 方程的 N -次 Darboux 变换与精确解 [J]. 内蒙古师范大学学报 (自然科学汉文版), 2023, 52(1): 81-86.
- [6] Gepreel K A, Nofal T A, Alasmari A A. Exact solutions for nonlinear integro-partial differential equations using the generalized Kudryashov method[J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2017, 25(4): 438-444.
- [7] Zhang W, Li X, Li S, et al. Orbital stability of solitary waves for generalized Boussinesq equation with two nonlinear terms[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 59: 629-650.
- [8] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3): 522-526.
- [9] 刘萍, 徐恒睿, 杨建荣. Boussinesq 方程的 Lax 对、Bäcklund 变换、对称群变换和 Riccati 展开相容性 [J]. 物理学报, 2020, 69(1): 70-79.
- [10] GEPREEL K A, NOFAL T A, ALASMARI A A. Exact solutions for nonlinear integro-partial differential equations using the generalized Kudryashov method[J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2017, 25(4): 438-444.