

文章编号: 1004-4353 (2024) 01-0070-06

# 连续型向上敲出巴黎期权定价三层线性化差分格式 及其收敛性分析

季尤飞, 张亦然, 金元峰

(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

**摘要:** 针对连续型向上敲出巴黎期权定价问题, 给出了一个空间 2 阶精度的三层线性化差分格式, 并利用能量分析法证明了所建差分格式的解存在唯一性和收敛性. 数值实验表明, 该差分格式是有效和可靠的.

**关键词:** 连续型向上敲出巴黎期权; 差分格式; 数值模拟; 收敛性

中图分类号: O241.82 文献标志码: A

## A linear three-level difference scheme and Its convergence analysis for continuous Up-and-Out Paris Option Pricing

Ji Youfei, ZHANG Yiran, JIN Yuanfeng

(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

**Abstract:** Considering the continuous up-and-out Paris option problem, a linear three-level difference scheme with the second order in space for the problem is established, the energy analysis method was used to discuss the uniqueness and convergence of the difference scheme existence. The numerical examples demonstrated that the difference scheme is valid and reliable.

**Keywords:** continuous up-and-out Paris option; difference scheme; numerical simulation; convergence

### 0 引言

目前, 学者们对巴黎期权定价问题已进行了较多研究. 例如: 韩笑等<sup>[1]</sup>通过显式差分法和 Crank-Nicolson 差分法建立了一种欧式期权价格数值解的迭代格式, 并通过数值仿真验证了该格式的稳定性. 宋斌等<sup>[2]</sup>运用前向打靶网格方法和最小二乘蒙特卡罗方法研究了美式巴黎期权的定价问题, 并验证了该方法的合理性. 张璐等<sup>[3]</sup>研究了具有巴黎期权性质的证券化产品的定价模型, 并通过数值仿真和灵敏度分析验证了该定价模型的合理性和有效性. 宋斌等<sup>[4]</sup>探讨了巴黎期权的对冲问题, 提出了一种新的较为稳健的对冲策略. 宋海明等<sup>[5]</sup>设计了一种针对 Black-Scholes 模型下的美式看跌期权定价问题的神经网络算法, 并给出了该期权价格的数值近似. 屠琪<sup>[6]</sup>利用 Crank-Nicolson 差分法对巴黎期权定价问题进行了研究, 并证明了 Crank-Nicolson 差分格式是无条件稳定的. 丰月姣等<sup>[7]</sup>采用隐式差分格式研究了巴黎期权定价问题, 并证明了该隐式差分格式是无条件稳定的. 在上述研究的基础上, 本文采用 Crank-Nicolson 差分法, 针对连续型向上敲出巴黎期权定价问题建立了一种三层线性化差分格式, 证明了该差分格式解的存在唯一性和收

投稿日期: 2023-12-26

第一作者: 季尤飞 (1999—), 男, 硕士研究生, 研究方向为偏微分方程数值解.

通信作者: 金元峰 (1976—), 男, 博士, 教授, 研究方向为偏微分方程数值解.

敛性, 并通过数值模拟验证了所得结果的正确性.

## 1 连续型向上敲出巴黎期权

根据障碍水平  $S_B$  可知, 连续型向上敲出巴黎期权挂钩的风险资产可以划分为 I ( $I=\{S \leq S_B\}$ ) 和 II ( $II=\{S > S_B\}$ ) 两个区域. 连续型向上敲出巴黎期权价格<sup>[8]</sup>在区域 I 上满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S \frac{\partial^2 v_1}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v_1}{\partial S} - rv_1 = 0; \\ v_1(t, 0) = 0, v_1(t, S_B) = v_2(\tau, t, S_B); \\ v_1(T, S) = \max\{S - K, 0\}. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $(t, S) \in (0, T) \times (0, S_B)$ .

连续型向上敲出巴黎期权价格在区域 II 上满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S \frac{\partial^2 v_2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v_2}{\partial S} - rv_2 = 0; \\ v_2(\tau, t, +\infty) = 0, v_1(t, S_B) = v_2(\tau, t, S_B), v_2(D, t, S) = 0; \\ v_2(0, T, S) = \max\{S - K, 0\}. \end{cases} \quad (2)$$

其中  $(\tau, t, S) \in (0, D) \times (\tau, T) \times (S_B, +\infty)$ .

为建立差分格式, 对空间变量进行截断, 并令  $x \in (-x_{\max}, x_{\max})$ , 于是将  $x = \ln S - \ln S_B$  代入式 (1) 和式 (2) 中可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{\partial V_1}{\partial x} - rV_1 = 0; \\ V_1(t, -x_{\max}) = 0, V_1(t, 0) = V_2(\tau, t, 0); \\ V_1(T, x) = \max\{S_B e^x - K, 0\}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V_2}{\partial \tau} + \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) \frac{\partial V_2}{\partial x} - rV_2 = 0; \\ V_2(\tau, t, x_{\max}) = 0, V_2(\tau, t, 0) = V_1(t, 0), v_2(D, t, x) = 0; \\ V_2(0, T, x) = \max\{S_B e^x - K, 0\}. \end{cases} \quad (4)$$

式 (3) 中  $(t, x) \in (0, T) \times (-x_{\max}, 0)$ , 式 (4) 中  $(\tau, t, x) \in (0, D) \times (\tau, T) \times (0, x_{\max})$ .

## 2 差分格式的建立

为建立差分格式, 首先在区域  $[-x_{\max}, x_{\max}] \times [0, T]$  中作网格剖分, 并令时间步长为  $m = \frac{T}{N}$ , 空间步长

为  $h = \frac{x_{\max}}{M}$ , 其中  $N$  和  $M$  均为正整数, 则由此对时间变量和空间变量进行等距网格划分可分别得:

$$t_k = km, k = 0, 1, 2, \dots, N;$$

$$x_i = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M.$$

由巴黎期权的定义可知窗口期  $D = N_0 m$ , 因此可将计时器的网格划分为:  $\tau_j = jm, j = 0, 1, 2, \dots, N_0$ . 约定  $c$  ( $c > 0$ ) 是与空间步长和时间步长均无关的一般常数, 并定义如下记号:

$$V_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V_i^{k+1} + V_i^k), \quad \delta_t V_i^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{m}(V_i^{k+1} - V_i^k), \quad \delta_x V_{i+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{h}(V_{i+1}^k - V_i^k), \quad \delta_x V_{i+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{h}(V_{i+1}^k - V_i^k),$$

$$\delta_x^2 V_i^{\bar{k}} = \frac{1}{2}(\delta_x^2 V_i^{k+1} + \delta_x^2 V_i^{k-1}), \quad V_i^{\bar{k}} = \frac{1}{2}(V_i^{k+1} + V_i^{k-1}), \quad D_i V_i^k = \frac{1}{2m}(V_i^{k+1} - V_i^{k-1}),$$

$$\Delta_x V_i^k = \frac{1}{2}(\delta_x V_{i-\frac{1}{2}}^k + \delta_x V_{i+\frac{1}{2}}^k), \quad V_{(1)i}^k = V_1(x_i, t_k), \quad V_{(2)i}^{k,j} = V_2(x_i, t_k, \tau_j).$$

将点  $(x_i, t_{N-\frac{1}{2}})$  代入式 (3) 中可得:

$$\delta_t V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} - r V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} = P_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

且存在正常数  $c_1$  使得  $|P_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}}| \leq c_1(m^2 + h^2)$ .

将点  $(x_i, t_k)$  代入式 (3) 中可得:

$$D_i V_{(1)i}^k + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V_{(1)i}^{\bar{k}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x V_{(1)i}^k - r V_{(1)i}^{\bar{k}} = P_{(1)i}^k, \quad (6)$$

且存在正常数  $c_2$  使得  $|P_{(1)i}^k| \leq c_2(m^2 + h^2)$ .

再利用方向导数对区域 II 上的差分格式问题作变换<sup>[7]</sup> 可得:

$$\sqrt{2} \frac{\partial V_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{\partial V_2}{\partial x} - r V_2 = 0,$$

其中  $\frac{\partial V_2}{\partial \tau} + \frac{\partial V_2}{\partial t} = \sqrt{2} \frac{\partial V_2}{\partial l}$ . 由上述易知, 区域 II 和区域 I 上的主方程结构相同, 且两个区域上的差分格式的形式也相同; 因此, 可以对式 (3) 和式 (4) 建立如下三层线性化差分格式:

$$\delta_t V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} - r V_{(1)i}^{N-\frac{1}{2}} = 0, \quad (7)$$

$$D_i V_{(1)i}^k + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V_{(1)i}^{\bar{k}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x V_{(1)i}^{\bar{k}} - r V_{(1)i}^{\bar{k}} = 0, \quad (8)$$

$$\delta_t V_{(2)i}^{k+N_0-\frac{1}{2}, N_0-\frac{1}{2}} + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V_{(2)i}^{k+N_0-\frac{1}{2}, N_0-\frac{1}{2}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x V_{(2)i}^{k+N_0-\frac{1}{2}, N_0-\frac{1}{2}} - r V_{(2)i}^{k+N_0-\frac{1}{2}, N_0-\frac{1}{2}} = 0, \quad (9)$$

$$D_i V_{(2)i}^{k,j} + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V_{(2)i}^{\bar{k}, \bar{j}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x V_{(2)i}^{\bar{k}, \bar{j}} - r V_{(2)i}^{\bar{k}, \bar{j}} = 0, \quad (10)$$

$$V_{(1), -M}^k = 0, \quad V_{(1), 0}^k = V_{(2), 0}^{k,j}, \quad (11)$$

$$V_{(1), i}^N = \max\{S_B e^x - K, 0\}, \quad (12)$$

$$V_{(2), M}^{k,j} = 0, \quad V_{(2), 0}^{k,j} = V_{(1), 0}^k, \quad (13)$$

$$V_{(2), i}^N = \max\{S_B e^x - K, 0\}, \quad (14)$$

$$V_{(2), i}^{k, N_0} = 0. \quad (15)$$

由于区域 I 和区域 II 的主方程结构相同, 因此证明差分格式式 (7) — 式 (10) 的性质时仅考虑式 (7) 和式 (8) 的性质即可.

### 3 差分格式解的存在唯一性

**定理 1** 差分格式式 (7) 和式 (8) 的解是存在唯一的.

**证明** 由边值条件易得第  $N$  层的值为  $V^N$ . 由此再将  $V^N$  和  $V^{N-1}$  代入式 (7) 中即可得到关于未知层  $N-1$  的齐次线性方程组:  $-\frac{1}{m} V^{N-1} + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 V^{N-1} + (\frac{r}{2} - \frac{1}{4} \sigma^2) \Delta_x V^{N-1} - \frac{r}{2} V^{N-1} = 0$ . 将  $V^{N-1}$  与上式作内积可得

$\|V^{N-1}\| = 0$ . 由于该齐次线性方程组有且仅有零解, 因此可知关于  $V^{N-1}$  的线性方程组解是唯一存在的.

#### 4 差分格式解的收敛性

**定理 2** 设式 (3) 的解为  $\{V_i^k | -M+1 \leq i \leq M-1, 0 \leq k \leq N\}$ , 差分格式 (7) 和式 (8) 的解为  $\{v_i^k | -M+1 \leq i \leq M-1, 0 \leq k \leq N\}$ , 记  $e_i^k = V_i^k - v_i^k$ ,  $-M+1 \leq i \leq M-1$ ,  $0 \leq k \leq N$ , 则有  $\|e^k\|_\infty \leq c_3(m^2 + h^2)$ ,  $0 \leq k \leq N$ , 其中  $c_3$  是与  $m$  和  $h$  不相关的正常数.

**证明** 将式 (5) 减去式 (7) 后再进行整理可得如下关于式 (7)、(8)、(11)、(13)、(15) 的误差方程:

$$\delta_i e_i^{N-\frac{1}{2}} + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 e_i^{N-\frac{1}{2}} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x e_i^{N-\frac{1}{2}} - r e_i^{N-\frac{1}{2}} = 0, \quad (16)$$

$$D_i e_i^k + \frac{\sigma^2}{2} \delta_x^2 e_i^k + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta_x e_i^k - r e_i^k = 0, \quad (17)$$

$$e_{(1),-M}^k = 0, \quad e_{(1),0}^k = e_{(2),0}^{k,j}, \quad (18)$$

$$e_{(2),M}^{k,j} = 0, \quad e_{(2),0}^{k,j} = e_{(1),0}^k, \quad (19)$$

$$e_{(2),i}^{k,N_0} = 0. \quad (20)$$

由式 (18) — 式 (20) 可得  $\|e^{N-1}\|^2 = 0$ ,  $|e^{N-1}|_1 = 0$ . 将  $e^{N-\frac{1}{2}}$  与式 (16) 作内积可得:

$$\frac{1}{2m} (\|e^N\|^2 - \|e^{N-1}\|^2) - \frac{\sigma^2}{2} |e^{N-\frac{1}{2}}|_1^2 - r \|e^{N-\frac{1}{2}}\|^2 = -(-P_i^{N-1}, e^{N-\frac{1}{2}}),$$

即  $\|e^{N-1}\|^2 + \frac{\sigma^2 m}{2} |e^{N-1}|_1^2 \leq 2m \|P^{N-1}\| |e^{N-\frac{1}{2}}|_1 = m \|P^{N-1}\| \|e^{N-1}\| = m^2 \|P^{N-1}\|^2 + \frac{1}{4} \|e^{N-1}\|^2$ . 且存在正常数  $c_4$

使得:  $\|e^{N-1}\|^2 + \sigma^2 |e^{N-1}|_1^2 \leq c_4(m^2 + h^2)^2$ . 再将  $e^k$  与上式作内积可得  $\frac{1}{4m} (\|e^{k+1}\|^2 - \|e^{k-1}\|^2) - \frac{\sigma^2}{2} |e^k|_1^2 - r \|e^k\|^2 = (P^k, e^k)$ , 即:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} (\|e^{k+1}\|^2 - \|e^{k-1}\|^2) &\leq \sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 + |e^{k-1}|_1^2) + 2r (\|e^{k+1}\|^2 + \|e^{k-1}\|^2) + 4(P^k, e^k) \leq \\ &\sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 + |e^{k-1}|_1^2) + 2r (\|e^{k+1}\|^2 + \|e^{k-1}\|^2) + 2 \|P^k\| \|e^k\| \leq \\ &\sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 + |e^{k-1}|_1^2) + (2r+1) (\|e^{k+1}\|^2 + \|e^{k-1}\|^2) + \frac{1}{2} \|P^k\|^2. \end{aligned}$$

整理上式可得:

$$\begin{aligned} (\|e^{k+1}\|^2 - \|e^{k-1}\|^2) + \sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 - |e^{k-1}|_1^2) &\leq \\ (2r+1) (\|e^{k+1}\|^2 + \|e^{k-1}\|^2) + \sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 + |e^{k-1}|_1^2) + \frac{1}{2} \|P^k\|^2 + \frac{\sigma^2}{m} |e^{k+1}|_1^2, \end{aligned}$$

且存在正常数  $c_5$  使得:  $(\|e^{k+1}\|^2 - \|e^{k-1}\|^2) + \sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 - |e^{k-1}|_1^2) \leq c_5 [(\|e^{k+1}\|^2 + \|e^{k-1}\|^2) + \sigma^2 (|e^{k+1}|_1^2 + |e^{k-1}|_1^2) + \|P^k\|^2]$ .

令  $F^k = \|e^k\|^2 + \|e^{k-1}\|^2 + \sigma^2 (|e^k|_1^2 + |e^{k-1}|_1^2)$ , 由此可得  $\frac{1}{m} (F^k - F^{k-1}) \leq c_5 (F^k + F^{k-1}) + c_5 c_2^2 (m^2 + h^2)^2$ .

对上式进行变形可得  $(1 - mc_5) F^k \leq (1 + mc_5) F^{k-1} + mc_5 c_2^2 (m^2 + h^2)^2$ , 即  $F^k \leq (1 + 3mc_5) F^{k-1} + 3mc_5 c_2^2 (m^2 + h^2)^2$ .

于是再由 Gronwall 不等式和边值 (11) — (15) 可得:

$$F^k \leq e^{3c_5 T} [F^0 + \frac{1}{2} c_2^2 (m^2 + h^2)^2] \leq \frac{1}{2} e^{3c_5 T} (c_4^2 + c_2^2) (m^2 + h^2)^2.$$

5 数值模拟

本文利用数值模拟来证明本文方法的可靠性. 实验环境: 计算机的 CPU 为 Intel(R) Core(TM) i9-12900 2.40 GHz, RAM 为 16.0 GB, 运行系统为 Win11 系统, 模拟软件为 MATLAB.

假设执行价格  $K=100$ , 障碍水平  $S_B=150$ , 期权挂钩的风险资产波动率  $\sigma=0.25$ , 期权存续期  $T=2$ , 窗口期  $D=1$ , 无风险利率  $r=0.1$ . 在  $N=100$  时, 不同  $M$  下的误差  $E_{M|N}$  和收敛阶  $R_{M|N}$  见表 1. 由表 1 可知: 误差  $E_{M|N}$  随着  $M$  的逐渐增大而逐渐变小, 且空间收敛阶  $R_{M|N}$  在 2 附近. 该结果验证了定理 2 的正确性.

图 1 为由数值模拟得到的连续型向上敲出巴黎期权的价格变化. 由图 1 可以看出: 期权的价格随着  $S$  的变大出现了先上升后下降的变化趋势(当达到障碍水平  $S_B$  时开始出现下降), 其原因是: 当风险资产价值低于障碍水平  $S_B$  时, 连续型向上敲出巴黎期权不会开始计时, 因此此时期权不会作废; 当风险资产价值高于障碍水平  $S_B$  时, 连续型向上敲出巴黎期权开始计时, 且计时时间越长其价值越低, 期权作废的可能性也就越大. 由上述表 1 和图 1 表明, 本文所建立的三层线性化差分格式式 (7) — 式 (15) 是可行的.

表 1  $N=100$  时, 不同  $M$  下的误差  $E_{M|N}$  和收敛阶  $R_{M|N}$

$M$	10	20	40	80	160	320
$E_{M N}$	$7.1002\times 10^{-3}$	$1.7429\times 10^{-3}$	$4.3337\times 10^{-4}$	$1.0819\times 10^{-4}$	$2.7037\times 10^{-5}$	$6.7590\times 10^{-6}$
$R_{M N}$	2.0263	2.0079	2.0021	2.0005	2.0001	2.0001

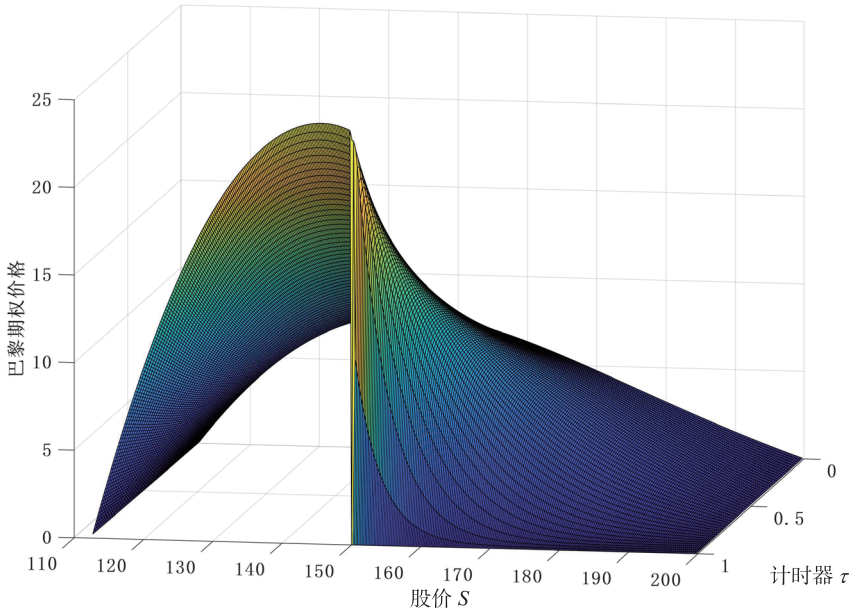


图 1 连续型向上敲出巴黎期权的价格变化

参考文献:

[1] 韩笑, 张敏行. 随机利率下的期权定价 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2021, 59(6): 1405-1410.  
[2] 宋斌, 井帅. 美式巴黎期权的定价模型与数值方法 [J]. 系统工程, 2015, 33(2): 1-8.  
[3] 张璐, 陈会英. 基于巴黎期权的植物品种权证证券化定价研究 [J]. 统计与信息论坛, 2018, 33(5): 73-79.  
[4] 宋斌, 梁恩奇, 唐丞. 基于拉普拉斯变换的巴黎期权的定价 [J]. 系统工程, 2017, 35(1): 1-4.  
[5] 宋海明, 候嶝. Black-Scholes 模型下美式巴黎期权定价的神经网络算法 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2021, 59(5): 1089-1092.

- 
- [6] 屠琪. 利用 Crank-Nicolson 差分方法对巴黎期权定价的研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2019.
- [7] 丰月姣, 刘宝亮, 张秀珍. 连续型向上敲出巴黎期权定价隐式差分格式及其稳定性和收敛性分析 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2023, 61(2): 265-274.
- [8] 宋斌, 周湛满, 魏琳, 等. 巴黎期权的 PDE 定价及隐性差分方法研究 [J]. 系统工程学报, 2013, 28(6): 764-774.
- [9] 董艳. 非线性 Black-Scholes 模型下算术平均亚式期权定价问题 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(9): 40-46.
- [10] 孙志忠. 非线性发展方程的有限差分方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 34-45.