

文章编号: 1004-4353 (2024) 01-0063-07

一种带参数的二次 Bezier 曲线的连续条件

孙明灿¹, 师晶

(闽南理工学院 信息管理学院, 福建 石狮 362700)

摘要: 针对计算机辅助几何设计中曲线的光滑拼接问题, 研究了一种带参数的二次 Bezier 曲线的连续条件. 利用曲线性质给出了两条带参数的二次 Bezier 曲线在连接点处实现光滑拼接的充要条件, 并得到了该曲线间 G^1 、 G^2 、 C^1 、 C^2 光滑拼接的定理. 利用实例计算表明, 该连续条件易于实现复杂曲线的构造, 可为参数曲线的设计提供良好参考.

关键词: 二次 Bezier 曲线; 光滑拼接; 连续条件; 曲线造型

中国分类号: TP391 **文献标志码:** A

Continuity conditions for a class of quadratic Bezier curve with parameters

SUN Mingcan, SHI Jing

(College of Information Management, Minnan University of Science and Technology, Shishi 362700, China)

Abstract: Focusing on the problem of smooth splicing for curves in Computer-Aided Geometric Design, continuity conditions for a class of quadratic Bezier curve with parameters is studied. The necessary and sufficient conditions to realize smooth splicing for two quadratic Bezier curves with parameters at the connection points are given by using the properties of curves, and the G^1 , G^2 , C^1 and C^2 smooth splicing theorems between the curves are also obtained. The calculation examples show that the continuity conditions are easy to realize the construction of complex curves. This can provide good reference for the design of parameter curves.

Keywords: quadratic Bezier curve; smooth splicing; continuity conditions; curve modeling

0 引言

随着人们对产品外形多样化、特殊化需求的日益增强, 曲线拼接技术越来越受到人们的关注. 在曲线拼接技术中, Bezier 曲线因具有计算简单和可编辑性强等特点而被设计者们常用于设计工业产品的几何外形中^[1]. 但目前传统 Bezier 曲线仍存在一些不足而限制了其广泛应用, 如计算量会随着曲线次数的增加而大幅增加, Bezier 曲线的局部形状难以调控等^[2-4]. 针对上述问题, 很多研究者对其进行了研究. 例如: 文献[5]的作者基于一类带两个形状参数的拟三次 Bezier 曲线, 讨论了两相邻拟三次 Bezier 曲线间的光滑拼接条件, 该拼接条件可灵活有效地控制样条曲线的形状. 文献[6]的作者构造了一种带 4 个形状参数的三次 Bezier 曲线, 该曲线可在保持连续性的条件下能自由地调整组合曲线的形状. 文献[7]的作者构造了一

投稿日期: 2023-04-07

基金项目: 福建省中青年教育科研项目 (JAT200761)

第一作者: 孙明灿 (1983—), 男, 硕士, 讲师, 研究方向为计算机辅助几何设计.

通信作者: 师晶 (1984—), 女, 硕士, 讲师, 研究方向为计算机辅助几何设计.

种带形状参数的奇异混合拟 Bezier 曲线, 该曲线不仅具有较灵活的形状可调性, 而且能够精确地表示二次曲线. 文献 [8] 的作者研究了一种代数插值曲线的连续条件, 研究显示该连续条件具有良好的逼近性. 文献 [9] 的作者在文献 [8] 的基础上, 研究了三次插值曲面的连续条件, 研究显示该条件可有效提高曲面形状的可控性. 基于上述研究, 本文研究了一种带参数的二次 Bezier 曲线的连续条件, 并给出了该曲线的性质、参数连续条件以及几何连续条件. 通过计算实例表明, 本文所给出的连续条件在曲线造型中具有良好的应用价值.

1 基础知识

定义 1 设 $V_i (i=0, 1, 2)$ 是 $R^d (d=2, 3)$ 空间中的控制顶点, 称曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^2 b_{i,3}(t)V_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

是带参数的二次 Bezier 曲线. 式 (1) 中 $b_{i,3}(t) (i=0, 1, 2)$ 为二次 Bezier 曲线的 Bernstein 基函数, 其形式为:

$$\begin{cases} b_{0,3}(t) = (1-\lambda t)(1-t)^2, \\ b_{1,3}(t) = (2+\lambda)(1-t)t, \\ b_{2,3}(t) = (1-\lambda+\lambda t)t^2. \end{cases} \quad (2)$$

式 (2) 中参数 $\lambda \in [-2, 1]$, 且式 (2) 中的 3 个基函数满足以下性质: ①非负性, 即 $b_{i,3}(t) \geq 0, (i=0, 1, 2)$,

$t \in [0, 1]$; ②规范性, 即 $\sum_{i=0}^2 b_{i,3}(t) = 1, t \in [0, 1]$.

引理 1 带参数的二次 Bezier 曲线 $P(t)$ 在首、末两端点 V_0 和 V_2 处的一阶导数和二阶导数分别为:

$$\begin{cases} P'(0) = (\lambda+2)(V_1 - V_0), & P''(0) = 2\lambda(2V_0 - V_1 - V_2) + 2(V_0 - 2V_1 + V_2), \\ P'(1) = (\lambda+2)(V_2 - V_1); & P''(1) = -2\lambda(V_0 + V_1 - 2V_2) + 2(V_0 - 2V_1 + V_2). \end{cases}$$

证明 由式 (1) 和式 (2) 可得:

$$P(t) = \sum_{i=0}^2 b_{i,3}(t)V_i = V_0(1-\lambda t)(1-t)^2 + V_1(2+\lambda)(1-t)t + V_2(1-\lambda+\lambda t)t^2.$$

由上式可知曲线 $P(t)$ 的一阶导数和二阶导数分别为:

$$\begin{aligned} P'(t) &= V_0[-3\lambda t^2 + 2(2\lambda+1)t - (\lambda+2)] + V_1[-2(\lambda+2)t + (\lambda+2)] + V_2[3\lambda t^2 + 2(1-\lambda)t], \\ P''(t) &= V_0[-6\lambda t + 2(2\lambda+1)] + V_1[-2(\lambda+2)] + V_2[6\lambda t + 2(1-\lambda)]. \end{aligned}$$

将 $t=0$ 和 $t=1$ 分别代入上式并进行整理后即可证得定理 1 成立, 证毕.

引理 2 带参数的二次 Bezier 曲线 $P(t)$ 在首、末两端点 V_0 和 V_2 处的副法线向量分别为:

$$D_1 = -2(\lambda+2)(\lambda-1) \alpha_1 \times \alpha_2, \quad D_2 = 2(\lambda+2)(\lambda+1) \alpha_1 \times \alpha_2.$$

其中 α_i 表示控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 的边向量, 即 $\alpha_i = V_i - V_{i-1} (i=1, 2)$.

证明 由引理 1 可得:

$$\begin{aligned} P'(0) &= (\lambda+2)(V_1 - V_0) = (\lambda+2) \alpha_1, \quad P'(1) = (\lambda+2)(V_2 - V_1) = (\lambda+2) \alpha_2, \\ P''(0) &= 2\lambda(2V_0 - V_1 - V_2) + 2(V_0 - 2V_1 + V_2) = -2\lambda(2\alpha_1 + \alpha_2) + 2(\alpha_2 - \alpha_1), \\ P''(1) &= -2\lambda(V_0 + V_1 - 2V_2) + 2(V_0 - 2V_1 + V_2) = 2\lambda(\alpha_1 + 2\alpha_2) + 2(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

设曲线 $P(t)$ 在 $t=0$ 处的副法线向量为 D_1 , 在 $t=1$ 处的副法线向量为 D_2 , 则曲线 $P(t)$ 在首、末两端点 V_0 和 V_2 处的副法线向量分别为:

$$D_1 = P'(0) \times P''(0) = -2(\lambda+2)(\lambda-1) \alpha_1 \times \alpha_2,$$

$$D_2 = P'(1) \times P''(1) = 2(\lambda + 2)(\lambda + 1) \alpha_1 \times \alpha_2.$$

由上式可知定理 2 得证. 证毕.

2 曲线的性质

1) 端点性质, 即 $P(0) = V_0$, $P(1) = V_2$. 曲线 $P(t)$ 自首端点 V_0 开始, 至末端点 V_2 结束, 并且与控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 的两边相切.

证明 由定义 1 可得 $P(t) = \sum_{i=0}^2 b_{i,3}(t)V_i = V_0(1-\lambda t)(1-t)^2 + V_1(2+\lambda)(1-t)t + V_2(1-\lambda+\lambda t)t^2$. 将 $t=0$ 和 $t=1$ 分别代入上式可得 $P(0) = V_0$ 和 $P(1) = V_2$, 由此可知曲线 $P(t)$ 自首端点 V_0 开始, 至末端点 V_2 结束. 由此再由引理 1 可得, 曲线 $P(t)$ 与控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 的两边相切, 且在两端点 V_0 和 V_2 处的切矢模长分别等于控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 两边边长的 $(\lambda+2)$ 倍.

2) 对称性, 即将曲线的控制顶点次序取反后, 由控制顶点 $V_i (i=0, 1, 2)$ 定义的曲线 $P(t; V_0, V_1, V_2)$ 与由控制顶点 $V_i (i=2, 1, 0)$ 定义的曲线 $P(t; V_2, V_1, V_0)$ 为同一条曲线, 其中仅控制顶点次序相反, 即:

$$P(t; V_0, V_1, V_2) = P(t; V_2, V_1, V_0), 0 \leq t \leq 1, -2 \leq \lambda \leq 1.$$

证明 由定义 1 可得:

$$P(t; V_0, V_1, V_2) = V_0(1-\lambda t)(1-t)^2 + V_1(2+\lambda)(1-t)t + V_2(1-\lambda+\lambda t)t^2,$$

$$P(t; V_2, V_1, V_0) = V_2(1-\lambda+\lambda t)t^2 + V_1(2+\lambda)(1-t)t + V_0(1-\lambda t)(1-t)^2.$$

由上式可知 $P(t; V_0, V_1, V_2) = P(t; V_2, V_1, V_0)$, $0 \leq t \leq 1, -2 \leq \lambda \leq 1$, 即曲线 $P(t)$ 具有对称性.

3) 凸包性, 即曲线 $P(t)$ 落在控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 的凸包内. 特别地, 当 $\lambda \in [0, 1]$ 时, 曲线 $P(t)$ 有且仅有一个最大值^[10].

4) 几何不变性, 即曲线 $P(t)$ 的形状只与控制顶点 $V_i (i=0, 1, 2)$ 有关, 而与坐标系的方向和位置无关^[10].

5) 逼近性, 即当参数 λ 在 $[-2, 1]$ 的取值变大时, 曲线 $P(t)$ 更加逼近控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 的两边 $V_0 V_1$ 和 $V_1 V_2$; 当参数 λ 在 $[-2, 1]$ 的取值变小时, 曲线 $P(t)$ 更加逼近控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 的底边 $V_0 V_2$, 如图 1 所示.

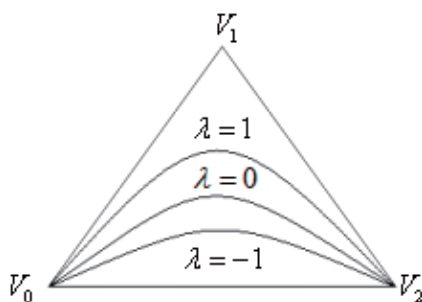


图 1 曲线 $P(t)$ 的图形 ($\lambda = -1, 0, 1$)

3 曲线的光滑拼接

设两条带参数的二次 Bezier 曲线分别为 $P_1(t; \lambda_1) = \sum_{i=0}^2 b_{i,3}(t)V_i$, $0 \leq t \leq 1, -2 \leq \lambda_1 \leq 1$;

$P_2(t; \lambda_2) = \sum_{i=0}^2 b_{i,3}(t)Q_i$, $0 \leq t \leq 1, -2 \leq \lambda_2 \leq 1$. 其中两条曲线的控制顶点分别为 V_i 和 $Q_i (i=0, 1, 2)$,

$b_{i,3}(t) (i=0, 1, 2)$ 与式 (2) 定义的基函数相同.

定理 1 两条带参数的二次 Bezier 曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 G^1 光滑拼接的充要条件是:

$$\frac{\lambda_1 + 2}{\lambda_2 + 2} = \delta \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0 - V_1}, \quad (3)$$

其中 $\delta > 0$. 特别地, 当 $\delta = 1$ 时, 两条曲线在连接点 $V_2 = Q_0$ 处满足 C^1 光滑拼接.

证明 因为两条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处 G^1 光滑拼接, 所以它们在连接点处具有相同的一阶切矢方向, 即:

$$P_1'(1; \lambda_1) = \delta P_2'(0; \lambda_2), \quad \delta > 0. \quad (4)$$

再根据引理 1 可得:

$$\begin{cases} P_1'(1; \lambda_1) = (\lambda_1 + 2)(V_2 - V_1), \\ P_2'(0; \lambda_2) = (\lambda_2 + 2)(Q_1 - Q_0). \end{cases} \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (4) 化简可得 $(\lambda_1 + 2)(V_2 - V_1) = \delta(\lambda_2 + 2)(Q_1 - Q_0)$. 又因为 $V_2 = Q_0$, 于是将其代入上式化简

得 $\frac{\lambda_1 + 2}{\lambda_2 + 2} = \delta \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0 - V_1}$. 由此可知, 式 (3) 是两条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 G^1 光滑拼

接的充要条件. 再由两条曲线的 C^1 光滑拼接条件可知, 当 $\delta = 1$ 时, 即当 $\frac{\lambda_1 + 2}{\lambda_2 + 2} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0 - V_1}$ 成立时, 两条曲线

在连接点 $V_2 = Q_0$ 处具有相同的一阶切矢, 因此两条曲线满足 C^1 光滑拼接.

为方便讨论两条曲线在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 G^2 和 C^2 光滑拼接的情况, 设 $\alpha_{ij} (i, j = 1, 2)$ 为控制三角形 $\Delta V_0 V_1 V_2$ 和 $\Delta Q_0 Q_1 Q_2$ 的边向量, 即 $\alpha_{1j} = V_j - V_{j-1}$, $\alpha_{2j} = Q_j - Q_{j-1} (j = 1, 2)$.

定理 2 两条带参数的二次 Bezier 曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 G^2 光滑拼接的充要条件是: 两条曲线满足定理 1, 且有 $\frac{d_1}{d_2} = \mu \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{21}|^2}$. 其中 $\mu = \frac{(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 + 2)^2}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 2)^2}$, d_1 和 d_2 分别为点 V_0 、 Q_2 到切线 $V_1 Q_1$ 的距离.

证明 因为两条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处可实现 G^2 光滑拼接的充要条件是: 两条曲线满足 G^1 光滑拼接, 且它们在连接点处具有相同的曲率矢^[1], 所以有:

$$\kappa_1[P_1(1; \lambda_1)] = \kappa_2[P_2(0; \lambda_2)]. \quad (6)$$

由引理 2 和式 (6) 可得:

$$P_1'(1; \lambda_1) = (\lambda_1 + 2)(V_2 - V_1) = (\lambda_1 + 2) \alpha_{12}, \quad P_2'(0; \lambda_2) = (\lambda_2 + 2)(Q_1 - Q_0) = (\lambda_2 + 2) \alpha_{21},$$

$$P_1'(1; \lambda_1) \times P_1''(1; \lambda_1) = 2(\lambda_1 + 2)(\lambda_1 + 1) \alpha_{11} \times \alpha_{12},$$

$$P_2'(0; \lambda_2) \times P_2''(0; \lambda_2) = -2(\lambda_2 + 2)(\lambda_2 - 1) \alpha_{21} \times \alpha_{22}.$$

$$\begin{aligned} \kappa_1[P_1(1; \lambda_1)] &= \frac{|P_1'(1; \lambda_1) \times P_1''(1; \lambda_1)|}{|P_1'(1; \lambda_1)|^3} = \frac{2(\lambda_1 + 2)(\lambda_1 + 1)}{(\lambda_1 + 2)^3} \cdot \frac{|\alpha_{11} \times \alpha_{12}|}{|\alpha_{12}|^3} = \frac{2d_1(\lambda_1 + 1)}{(\lambda_1 + 2)^2} \cdot \frac{|\alpha_{11}| |\alpha_{12}|}{|\alpha_{12}|^3 |\alpha_{11}|} = \\ &= \frac{2d_1(\lambda_1 + 1)}{(\lambda_1 + 2)^2} \cdot \frac{1}{|\alpha_{12}|^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2[P_2(0; \lambda_2)] &= \frac{|P_2'(0; \lambda_2) \times P_2''(0; \lambda_2)|}{|P_2'(0; \lambda_2)|^3} = \frac{2(\lambda_2 + 2)(\lambda_2 - 1)}{(\lambda_2 + 2)^3} \cdot \frac{|\alpha_{21} \times \alpha_{22}|}{|\alpha_{21}|^3} = \frac{2d_2(\lambda_2 - 1)}{(\lambda_2 + 2)^2} \cdot \frac{|\alpha_{21}| |\alpha_{22}|}{|\alpha_{21}|^3 |\alpha_{22}|} = \\ &= \frac{2d_2(\lambda_2 - 1)}{(\lambda_2 + 2)^2} \cdot \frac{1}{|\alpha_{21}|^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

将式 (7) 和式 (8) 代入式 (6) 后进行化简可得 $\frac{d_1}{d_2} = \mu \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{21}|^2}$, 由此可知定理 1 和式 $\frac{d_1}{d_2} = \mu \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{21}|^2}$ 是两条曲

线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处 G^2 光滑拼接的充要条件.

定理 3 两条带参数的二次 Bezier 曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 C^2 光滑拼接的充要条件是:

$$1) \frac{\lambda_1 + 2}{\lambda_2 + 2} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0 - V_1}; \quad (9)$$

$$2) (\lambda_1 - 1) \alpha_{11} + (2\lambda_1 + 1) \alpha_{12} + (2\lambda_2 + 1) \alpha_{21} + (\lambda_2 - 1) \alpha_{22} = 0. \quad (10)$$

证明 因为两条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 C^2 光滑拼接的充要条件是: 两条曲线满足 C^1 光滑拼接, 且它们在连接点处具有相同的二阶导数^[1], 所以有:

$$P_1''(1; \lambda_1) = P_2''(0; \lambda_2), \quad (11)$$

由式 (11) 和引理 2 得:

$$P_1''(1; \lambda_1) = 2\lambda_1 (\alpha_{11} + 2\alpha_{12}) + 2(\alpha_{12} - \alpha_{11}), \quad P_2''(0; \lambda_2) = -2\lambda_2 (2\alpha_{21} + \alpha_{22}) + 2(\alpha_{22} - \alpha_{21}).$$

将上式代入式 (11) 后进行化简可得 $(\lambda_1 - 1) \alpha_{11} + (2\lambda_1 + 1) \alpha_{12} + (2\lambda_2 + 1) \alpha_{21} + (\lambda_2 - 1) \alpha_{22} = 0$, 由此可知式 (9) 和式 (10) 是两条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在连接点 $V_2 = Q_0$ 处实现 C^2 光滑拼接的充要条件.

4 计算实例

4.1 实例 1

构造清宫帽曲面时, 因曲面母线是由 4 条带参数的二次 Bezier 曲线拼接而成, 因此本文首先根据选定的 3 个控制顶点 $V_i (i=0, 1, 2)$ 计算出第 1 条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$. 3 个控制顶点分别为 $V_0(0, 0.04)$ 、 $V_1(1.98, -0.23)$ 、 $V_2(3.14, 0.51)$, 然后再根据曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 与第 2 条曲线 $P_2(t; \lambda_2)$ 的公共连接点 $V_2(Q_0)$ 及曲线 $P_2(t; \lambda_2)$ 的其余 2 个控制顶点 $Q_i (i=1, 2)$ 计算出第 2 条曲线 $P_2(t; \lambda_2)$ 的表达式, 其中曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 和 $P_2(t; \lambda_2)$ 在公共连接点 $V_2(Q_0)$ 处满足 G^2 光滑拼接. 曲线 $P_2(t; \lambda_2)$ 的其余 2 个控制顶点分别为 $Q_1(0.45, 1.29)$ 、 $Q_2(0.52, 1.33)$.

重复以上步骤, 最终可生成如下 4 条曲线 $P_1(t; \lambda_1)$ 、 $P_2(t; \lambda_2)$ 、 $P_3(t; \lambda_3)$ 、 $P_4(t; \lambda_4)$. 其中: 曲线 $P_3(t; \lambda_3)$ 和曲线 $P_4(t; \lambda_4)$ 的控制顶点分别为 M_i 、 $N_i (i=0, 1, 2)$, 曲线 $P_2(t; \lambda_2)$ 和 $P_3(t; \lambda_3)$ 在公共连接点 $Q_2(M_0)$ 处满足 G^1 光滑拼接, 曲线 $P_3(t; \lambda_3)$ 和 $P_4(t; \lambda_4)$ 在公共连接点 $M_2(N_0)$ 处满足 G^0 光滑拼接. 曲线 $P_3(t; \lambda_3)$ 和 $P_4(t; \lambda_4)$ 的 3 个控制顶点分别为 $M_0(0.52, 1.33)$ 、 $M_1(5.98, 1.26)$ 、 $M_2(6.02, 1.68)$; $N_0(6.02, 1.68)$ 、 $N_1(6.51, 1.32)$ 、 $N_2(7.85, 1.29)$.

由曲线的逼近性可知, 曲线形状可通过参数 λ 来调整, 即: 增大或减小参数 λ 时, 曲线可在整体上逼近或远离控制三角形. 图 2 为根据曲线的逼近性分别调整曲线 $P_i(t; \lambda_i)$ 的参数 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ 而生成的清宫帽曲面的母线, 其中 $\lambda_1 = 0.62$ 、 $\lambda_2 = 0.73$ 、 $\lambda_3 = 0.81$ 、 $\lambda_4 = 0.60$. 将清宫帽曲面的母线旋转后得到的清宫帽曲面如图 3 所示.

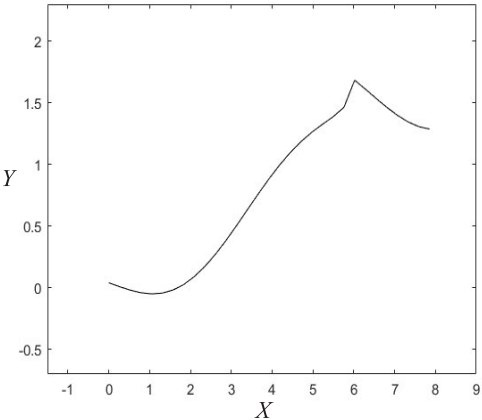


图 2 清宫帽曲面的母线

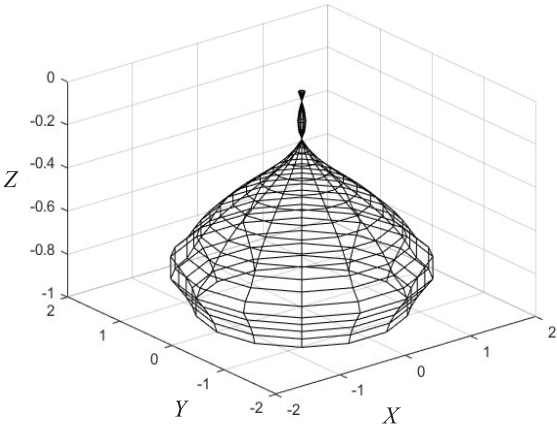


图 3 清宫帽曲面

4.2 实例 2

构造花瓶曲面时,因曲面母线是由 2 条带参数的二次 Bezier 曲线拼接而成,因此本文首先根据选定的 3 个控制顶点 $V_i(i=0,1,2)$ 计算出第 1 条曲线 $P_1(t;\lambda_1)$. 3 个控制顶点分别为 $V_0(2.58, 6.27)$ 、 $V_1(0.11, 4.45)$ 、 $V_2(2.05, 2.81)$. 然后,再根据曲线 $P_1(t;\lambda_1)$ 与第 2 条曲线 $P_2(t;\lambda_2)$ 的公共连接点 $V_2(Q_0)$ 及曲线 $P_2(t;\lambda_2)$ 的另外 2 个控制顶点 $Q_i(i=1,2)$ 计算出第 2 条曲线 $P_2(t;\lambda_2)$ 的表达式,其中曲线 $P_1(t;\lambda_1)$ 和 $P_2(t;\lambda_2)$ 在公共连接点 $V_2(Q_0)$ 处满足 G^2 光滑拼接. 曲线 $P_2(t;\lambda_2)$ 的其余 2 个控制顶点分别为 $Q_1(3.75, 2.13)$ 和 $Q_2(2.01, 0.02)$.

由曲线的逼近性可知,曲线形状可通过参数 λ 调整,即:增大或减小参数 λ 时,曲线可在整体上逼近或远离控制三角形. 图 4 为根据曲线的逼近性分别调整曲线 $P_i(t;\lambda_i)$ 的参数 $\lambda_i(i=1,2)$ 而生成的花瓶曲面的母线,其中 $\lambda_1=0.57$, $\lambda_2=0.52$. 将花瓶曲面的母线旋转后得到的花瓶曲面如图 5 所示.

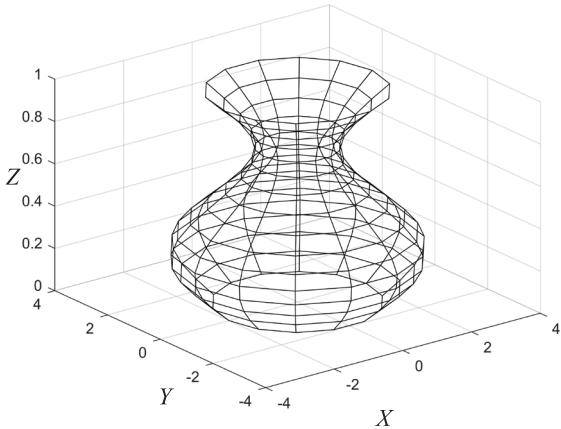


图 4 花瓶曲面的母线

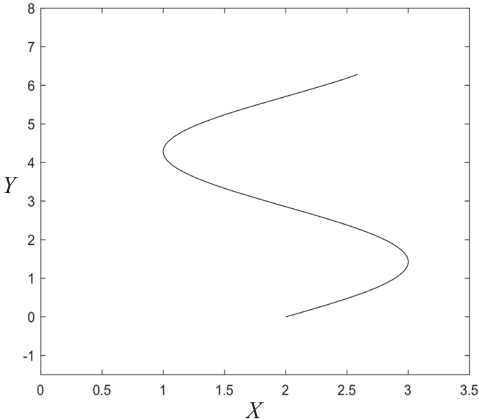


图 5 花瓶曲面

5 结论

本文研究表明,带参数的二次 Bezier 曲线不仅具有传统二次 Bezier 曲线的端点性质、凸包性和几何不变性等性质,而且其曲线形状还可通过参数 λ 进行调整. 实例表明,本文给出的带参数的二次 Bezier 曲线间的 G^1 、 G^2 、 C^1 、 C^2 连续条件能够解决单一曲线无法描述复杂曲线的问题,可为工业产品外形设计提供参考. 但本文方法也存在一定的局限性,即随着光滑拼接的阶数增大以及曲线控制顶点的增多,曲线拼接条件的形式会变得越为复杂;因此,在今后的工作中,我们将探讨以简单的形式来实现高阶曲线的光滑

拼接.

参考文献:

- [1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 306-454.
- [2] 杨军, 黄倩颖. 一类广义 Bezier 曲线及其性质研究 [J]. 南昌航空大学学报 (自然科学版), 2020, 34(04): 19-24.
- [3] 孙明灿, 师晶. 一种代数曲线的 C^3 连续性条件 [J]. 新乡学院学报, 2018, 35(12): 9-12.
- [4] 师晶. 一类二次 TC-Bezier 曲线的光滑拼接 [J]. 新乡学院学报, 2016, 33(12): 12-14.
- [5] 陈晓彦, 王伟利, 魏慧琪, 叶东琴. 形状可调的 C^2 拟三次 Bézier 样条曲线 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版), 2019, 42(10): 1431-1435.
- [6] 严兰兰, 揭梦柔, 魏子华. 三次 Bézier 曲线的新扩展 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2022, 34(10): 1590-1603.
- [7] 张贵仓, 拓明秀, 苏金凤, 等. 一种带形状参数的奇异混合拟 Bézier 曲线 [J]. 计算机工程与科学, 2021, 43(5): 897-906.
- [8] 师晶. 一种基于几何约束的插值曲线的参数连续性 [J]. 沈阳大学学报 (自然科学版), 2019, 31(1): 78-83.
- [9] 师晶. 一种三次插值曲面的光滑拼接 [J]. 新乡学院学报, 2022, 39(12): 6-12.
- [10] 孙明灿, 师晶. 带形状参数的双三次 Bezier 三角曲面的光滑拼接 [J]. 延边大学学报 (自然科学版), 2023, 49(2): 140-148.