

文章编号: 1004-4353 (2024) 01-0039-04

# 行为 $m$ -NA 随机变量阵列的完全收敛性

林德贵

(闽南理工学院 信息管理学院, 福建 泉州 362700)

**摘要:** 利用截尾方法和矩不等式, 在更一般的条件下对  $m$ -NA 阵列行和的收敛性进行了研究, 并得到了  $m$ -NA 阵列的完全收敛性. 所得结果改进了文献 [6] 的研究结果.

**关键词:**  $m$ -NA 阵列; 完全收敛性; 慢变化函数; 截尾方法; 矩不等式

**中国分类号:** O211.4 **文献标志码:** A

## Complete convergence for arrays of rowwise $m$ -NA random variables

LIN Degui

(Minnan University of Science and Technology, Quanzhou 362700, China)

**Abstract:** The convergence of the row sum of an  $m$ -NA sequence was investigated under more general conditions using truncation methods and moment inequalities, and the complete convergence of the  $m$ -NA sequence was obtained. The obtained results enhance the research findings in reference [Journal of Yanbian University(Natural Science Edition), 2022, 48(04):318-320+331].

**Keywords:**  $m$ -NA arrays; complete convergence; slowly variable function; truncation method; moment inequalities

## 0 引言

1983 年 Joag-Dev 和 Proschan<sup>[1]</sup> 提出了如下 NA 定义:

**定义 1** 称随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是 NA(negatively associated) 的 ( $n \geq 2$ ), 若对任意两个非空不交子集  $A_1, A_2 \subset \{1, 2, \dots, n\}$  均有  $\text{Cov}(f_1(x_i); i \in A_1), f_2(x_j); j \in A_2) \leq 0$ , 其中  $f_i(i=1, 2)$  为各分量不降的函数, 且可使上式中的 Cov 存在. 若对任意的  $n \geq 2$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是 NA 的, 则称随机变量列  $\{X_n; n \geq 1\}$  是 NA 列.

基于 NA 定义, 一些学者对其进行了进一步研究, 并将其应用于多个数学领域<sup>[2-4]</sup>. 2007 年, 胡亦钧等<sup>[5]</sup> 提出了如下  $m$ -NA 随机变量的定义:

**定义 2** 设  $m \geq 1$  是一个给定的整数. 若对于一个任意的  $n \geq 2$  和一个可满足  $|i_k - i_j| \geq m$  ( $1 \leq k \neq j \leq n$ ) 的任意  $i_1, \dots, i_n$  均有  $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$  是 NA 序列, 则称  $\{X_n; n \geq 1\}$  是  $m$ -NA ( $m$ -negatively associated) 序列.

投稿日期: 2023-10-23

作者简介: 林德贵 (1977—), 男, 硕士, 副教授, 研究方向为极限理论和图像处理.

特别地, 对于一个给定的自然数  $n$ , 若其对于给定的每一行内的随机变量序列  $\{X_{ni}\}$  是  $m$ -NA, 则称随机阵列  $\{X_n; 1 \leq i \leq n, n \in \mathbf{N}\}$  是行为  $m$ -NA 阵列.

从上述定义可得, NA 序列是  $m$ -NA 序列在  $m$ -NA 时的特例. 由于  $m$ -NA 随机变量比 NA 随机变量更弱, 因此研究  $m$ -NA 序列的收敛性对可靠性理论、渗透理论和多元统计分析理论的应用更具有意义. 目前, 已有一些学者对  $m$ -NA 序列的收敛性进行了研究, 并取得了一些成果<sup>[6-9]</sup>. 然而到目前为止, 对  $m$ -NA 随机阵列研究得相对较少<sup>[10]</sup>, 基于此本文研究了  $m$ -NA 阵列的完全收敛性, 所得结果改进了文献 [6] 中的相关结果.

## 1 主要结果及其证明

**引理 1**<sup>[8]</sup> 设  $\{X_n; n \in \mathbf{N}\}$  是  $m$ -NA 随机变量序列,  $\{f_n; n \in \mathbf{N}\}$  是单调非降 (或者单调非增) 连续函数, 则  $\{f_n(X_n); n \in \mathbf{N}\}$  仍然是  $m$ -NA 序列.

**引理 2**<sup>[8]</sup> 设  $\{X_n; n \in \mathbf{N}\}$  是均值为 0 的  $m$ -NA 序列, 且对  $p \geq 1$  有  $E|X_n|^p < \infty$ , 则对于  $\forall n \geq m \geq 1$ , 若  $1 \leq p \leq 2$ , 则  $E\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left|\sum_{i \leq j} X_i\right|^p\right) \leq C_{m,p} \sum_{i \leq n} E|X_i|^p$ , 其中  $C_{m,p} = 4m^p$ .

**引理 3**<sup>[11]</sup> 设  $l(x) > 0$  是  $x \rightarrow \infty$  的慢变化函数, 则有:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(vx)}{l(x)} = 1, \quad \forall v > 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(v+x)}{l(x)} = 1, \quad \forall v > 0.$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{2^k \leq x \leq 2^{k+1}} \frac{l(x)}{l(2^k)} = 1.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v l(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-v} l(x) = 0, \quad \forall v > 0.$$

**定理 1** 设  $\{X_{nk}; k \geq n, n \in \mathbf{N}\}$  是行为  $m$ -NA 阵列,  $l(x)$  是慢变化函数. 若当  $1 < p < 2$  和  $\delta > 2/p - 1$  时有  $\limsup_{x \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k \in \mathbf{N}} x^{1+\delta} P(|X_{nk}|^p \geq x) = 0$ , 则当  $\alpha p \geq 1$  时有:  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P\left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_{nj} - ES_{nj}| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty$ , 其中  $\forall \varepsilon > 0, S_{nj} = \sum_{k=1}^j X_{nk}$ .

**证明** 取  $C$  为与  $n$  无关的正常数 ( $C$  可在不同处表示不同的常数),  $x = n^{\alpha(2-p)/4}$  (当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x \rightarrow \infty$ ). 对  $X_{ni}$  截尾后记  $X_{nk}^I = -xI_{(X_{nk} \leq -x)} + X_{nk}I_{(|X_{nk}| < x)} + xI_{(X_{nk} \geq x)}$ ,  $X_{nk}^{II} = X_{nk} - X_{nk}^I = (X_{nk} + x)I_{(X_{nk} \leq -x)} + (X_{nk} - x)I_{(X_{nk} \geq x)}$ ,  $S_j^I = \sum_{k=1}^j X_{nk}^I$ ,  $S_j^{II} = \sum_{k=1}^j X_{nk}^{II}$ . 当  $1 < p < 2$  时, 由引理 1 可知,  $X_{nk}^I$  和  $X_{nk}^{II}$  仍是  $m$ -NA 阵列, 且对于  $\forall \varepsilon > 0$  有:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(|S_n^I| > \varepsilon n^{\alpha}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(|S_n^I - ES_n^I| > n^{\alpha} \varepsilon / 2) + \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} l(n) P(|S_n^{II} - ES_n^{II}| > \varepsilon n^{\alpha} / 2) &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由上式可知, 证明定理 1 只需证  $I_1 < \infty$  和  $I_2 < \infty$  即可. 由引理 2、Morkov 不等式及  $|X_{nk}^I| \leq x$  可得:

$$I_1 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2 - 2\alpha} l(n) \sum_{k=1}^n E(X_{nk}^I - EX_{nk}^{II})^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2 - 2\alpha} l(n) \sum_{k=1}^n E(X_{nk}^I)^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1 - \alpha(2-p)/2} l(n) < \infty.$$

再由引理 2、Morkov 不等式、 $|X_{nk}^{II}| \leq |X_{nk}|I_{(|X_{nk}| \geq x)}$  不等式可得:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) E \left( \left| S_n^H - ES_n^H \right|^p \right) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \sum_{k=1}^n E \left| X_{nk} \right|^p = \\
&C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \sum_{k=1}^n \left( E \left| X_{nk} + x \right|^p I_{(X_{nk} \leq -x)} + E \left| X_{nk} - x \right|^p I_{(X_{nk} \geq x)} \right) \leq \\
&C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \sum_{k=1}^n E \left| X_{nk} \right|^p I_{(|X_{nk}| \geq x)} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \sum_{k=1}^n \left( \int_0^{x^p} + \int_{x^p}^{\infty} \right) P \left( \left| X_{nk} \right|^p I_{(|X_{nk}| \geq x)} > t \right) dt = \\
&C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} l(n) \sum_{k=1}^n \left( \int_0^{x^p} P \left( \left| X_{nk} \right| \geq x \right) dt + \int_{x^p}^{\infty} P \left( \left| X_{nk} \right|^p > t \right) dt \right).
\end{aligned}$$

由于  $\limsup_{x \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n x^{1+\delta} P \left( \left| X_{nk} \right|^p \geq x \right) = 0$ , 因此  $\exists N > 0$ , 且当  $x > M$  时有  $\sup_{k \in \mathbb{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^n P \left( \left| X_{nk} \right|^p \geq x \right) \leq x^{-1-\delta}$ . 又因为  $x = n^{\alpha(2-p)/4}$ , 所以有  $\exists N > 0$ , 且当  $n \geq N$  时有  $x > M$ . 由以上可得:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{n=1}^{N-1} n^{-1} l(n) \sum_{k=1}^n n^{-1} E \left| X_{nk} \right|^p + \sum_{n=N}^{\infty} n^{-1} l(n) \sum_{k=1}^n \left[ n^{-1} x P \left( \left| X_{nk} \right|^p \geq x \right) + \int_{x^p}^{\infty} n^{-1} P \left( \left| X_{nk} \right|^p > t \right) dt \right] \leq \\
&C + C \sum_{n=N}^{\infty} n^{-1} l(n) x^{-\delta} + \sum_{n=N}^{\infty} n^{-1} l(n) \int_{x^p}^{\infty} t^{-1-\delta} dt \leq C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{l(n)}{n x^{\delta}} + C \sum_{n=N}^{\infty} n^{-1} \int_{x^p}^{\infty} \frac{l(n)}{t^{1+\delta}} dt \leq \\
&C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{l(n)}{n^{1+\alpha\delta(2-p)/4}} + C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{l(n)}{n^{1+\alpha p(2-p)/4}} < \infty.
\end{aligned}$$

定理 1 证毕. 定理 1 表明,  $m$ -NA 随机变量阵列具有更一般的完全收敛性.

将本文的定理 1 与文献 [6] 中的定理 1 进行比较可知: 当  $1 < p < 2$  时, 本文的条件 ( $\delta > 2/p - 1$ ) 比文献 [6] 中的条件 ( $\delta > 1$ ) 更弱. 另外, 由  $x^{1+\delta} > x \ln^{\delta} x$  可知, 本文中的条件  $\limsup_{x \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n x^{1+\delta} P \left( \left| X_{nk} \right|^p \geq x \right) = 0$  比文献 [6] 中的条件  $\limsup_{x \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n x \ln^{\delta} x P \left( \left| X_{nk} \right|^p \geq x \right) = 0$  更弱. 因此, 本文的结果推广和改进了文献 [6] 的研究结果.

由于 NA 序列是  $m$ -NA 序列在  $m=1$  时的特例, 因此令  $m=1$  可得如下推论 1.

**推论 1** 设  $\{X_n; n \geq 1\}$  是 NA 序列,  $l(x)$  为慢变化函数. 若当  $1 < p < 2$  和  $\delta > 2/p - 1$  时有

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n x^{1+\delta} P \left( \left| X_k \right|^p \geq x \right) = 0,$$

则当  $\alpha p \geq 1$  时有  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} P \left( \max_{1 \leq j \leq n} \left| S_j - ES_j \right| > \varepsilon n^{\alpha} \right) < \infty, \forall \varepsilon > 0$ .

## 2 定理 1 的统计学应用

在金融投资领域中, 若将  $m$  只股票的收益率组成一个  $m$ -NA 随机变量阵列, 则可通过对行为  $m$ -NA 随机变量阵列的完全收敛性进行统计分析来决策资产投资. 如果该  $m$ -NA 随机变量阵列具有完全收敛性 (即当时间趋于无穷大时,  $m$ -NA 随机变量阵列逐渐可收敛到一个确定的极限), 则表明该投资组合具有确定性收益率; 如果该  $m$ -NA 随机变量阵列不能完全收敛, 则表明该投资组合的收益率存在较大的不确定性. 因此, 定理 1 可为金融投资组合的决策提供参考.

## 参考文献:

- [1] JOAG D K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. Annal of Statistics, 1983, 11: 286-295.
- [2] CHI X, SU C. A weak law of large numbers for identically distributed NA variables[J]. Chinese Journal of Probability and Statistics, 1997, 13(2): 199-203.
- [3] WU Q Y, WANGY Q, WU Y C. On some limit theorems for sums of NA random matrix sequences[J]. Chinese Journal of Probability and Statistics, 2006, 22(1): 56-62.
- [4] SHAO Q M. A comparison theorem on maximum inequalities between negatively associated and independent random variables[J]. Journal of Theoretical Probability, 2000, 13: 343-356.
- [5] HU Y J, MING R X, YANG W Q. Large deviations and moderate deviations for  $m$ -negatively associated random variables[J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27: 886-896.
- [6] 程书红. 行为  $m$ -NA 阵列的完全收敛性 [J]. 延边大学学报(自然科学版), 2022, 48(4): 318-320.
- [7] WU Y F, HU T C, VOLODIN A. Complete convergence and complete moment convergence for weighted sums of  $m$ -NA random variables[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 2015, 200.
- [8] SHEN A, ZHANG Y, XIAO B Q, et al. Moment inequalities for  $m$ -negatively associated random variables and their applications[J]. Statistical Papers, 2017, 58(3): 911-928.
- [9] 汪勐航, 裴文宸, 张宇恒, 等.  $m$ -NA 随机变量部分和的若干强收敛性 [J]. 数学季刊(英文版), 2018, 33(2): 172-180.
- [10] 胡学平.  $m$ -NA 随机阵列的完全收敛性的一个注记 [J]. 数学杂志, 2016, 36(3): 609-614.
- [11] 白志东, 苏淳. 关于独立和的完全收敛性 [J]. 中国科学: A 辑, 1985, 5: 399-412.