

文章编号: 1004-4353 (2024) 01-0031-08

离散切换正时变时滞系统的有限时间稳定与 l_1 滤波

路俊影, 刘婷婷, 安夏伶
(西安工程大学 理学院, 西安 710048)

摘要: 讨论了一类离散切换正时变时滞系统的有限时间稳定性及其 l_1 滤波问题. 首先, 通过构造一类合适的李亚普诺夫函数, 建立了模型依赖平均驻留时间 (MDADT) 下的离散切换正时变时滞系统的有限时间稳定性的判定条件; 然后, 基于所得结论设计了一个滤波器, 并给出了滤波误差系统是有限时间稳定的且具有 l_1 滤波的充分条件; 最后, 利用两个算例验证了所得结论的有效性.

关键词: 离散切换正时变时滞系统; 模依赖平均驻留时间; 有限时间稳定; l_1 滤波

中图分类号: O231.1 **文献标志码:** A

Finite-time stability and l_1 filtering of discrete switched positive systems with time-varying delay

LU Junying, LIU Tingting, AN Xialing
(School of Sciences, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: The finite time stability and l_1 filtering problem of discrete switching positive time-varying delayed systems are discussed. First, by constructing a class of Lyapunov function, some criteria for the finite-time stability of discrete switching positive systems with time-varying delay are established under mode dependent average dwell time (MDADT); Then, a filter is designed based on the obtained conclusions, and sufficient conditions are established that the filtering error system is finite time stable and exhibit an l_1 filtering; Finally, two numerical examples are proved the validity of the obtained conclusions.

Key words: discrete switching positive time-varying delayed system; mode dependent average dwell time; finite-time stability; l_1 filtering

0 引言

切换正系统 (SPSs) 是由有限个正子系统和一个切换信号所组成的一种混杂动态系统^[1], 它在编队飞行^[2]、网络拥堵控制^[3]、飞行器控制^[4]等领域中有着广泛的应用. 其中切换信号决定了各个正子系统之间运行的逻辑顺序, 因此它对保持系统的稳定性等具有重要的作用. 目前, 常见的切换信号有任意时间切换信号^[5-6]、驻留时间 (DT) 切换信号^[7-8]和平均驻留时间 (ADT) 切换信号^[9]等. 任意切换信号要求所有的子系统必须稳定, 因此它的适用范围小于其他切换信号. DT 切换信号要求任意两个相邻切换时刻点之间的时间间隔要小于一个常数, 但当在 SPSs 中含有一些不稳定的子系统时, 若子系统的 DT 过大, 则 SPSs 就有可能出现不稳定的现象; 因此, 学者就提出了 ADT 切换信号. ADT 切换信号只要求在给定的时间区间上,

投稿日期: 2023-10-08

基金项目: 陕西省科技厅自然科学基金基础研究计划项目 (2021JQ-657)

第一作者: 路俊影 (1994—), 女, 硕士研究生, 研究方向为控制理论.

通信作者: 刘婷婷 (1987—), 女, 博士, 讲师, 研究方向为控制理论.

切换系统的运行时间与总切换次数的比值不小于一个固定的正常数即可,但其并未考虑到子系统之间的差异性.为此,Zhao 等^[10]在 ADT 切换信号的基础上提出了一种 MDADT 切换信号,它要求在给定的时间区间上,每个子系统的总运行时间与它被激活次数的比值不小于一个固定的正常数.因此,MDADT 切换信号受到了许多学者的关注.

时滞现象是导致各种类系统出现不稳定的一个重要因素^[11],因此研究离散切换正时滞系统的稳定性和滤波问题具有重要意义.Chen 等研究了连续 SPSs 的正滤波设计问题^[12];Ren 等研究了 SPSs 的加权平均 l_1 滤波^[13];Zheng 等研究了切换正时滞系统的非加权 l_1 滤波^[14].基于上述研究,本文研究了一类离散切换正时变时滞系统在 MDADT 切换信号下的有限时间稳定性及其 l_1 滤波的设计问题,并通过数值算例验证了所得结论的有效性.

在本文中: \mathbf{R}^n 表示 n 维欧几里得空间, $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ 表示 $x \in \mathbf{R}^n$ 的 1-范数, \mathbf{T} 表示矩阵的转置, \mathbf{I}_n 表示所有元素都等于 1 的 n 维列向量, \mathbf{I} 表示具有适当维数的单位矩阵, $\mathbf{X} \succeq 0$ ($\succeq 0, \succ 0, \prec 0$) 表示矩阵 \mathbf{X} 的每一个元素都是非负的(非正的、正的、负的), $\mathbf{P}^{[k]}$ 表示矩阵 \mathbf{P} 的第 k 行, $\|\mathbf{x}\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\|_1$ 表示无限向量序列 \mathbf{x} 的 l_1 范数, $l_1(\mathbf{R}^n)$ 表示定义在 \mathbf{R}^n 上且具有有限 l_1 范数的向量值函数的集合.

1 问题描述与预备知识

本文考虑如下离散切换时变时滞系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{d\sigma(k)}\mathbf{x}(k-d(k)) + \mathbf{B}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{E}_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\varphi}(\theta), \quad \theta \in [-d, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 分别是系统的状态向量和可测输出; $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^{n_z}$ 是待确定的目标输出; $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^{n_w}$ 是扰动输入; $\boldsymbol{\varphi}(\theta)$ 是定义在区间 $[-d, 0]$ 上的向量值函数; 切换信号 $\sigma(k): [0, \infty) \rightarrow S = \{1, 2, \dots, N\}$ 是一个右连续的分段常值函数, 其中 N 是子系统的个数; $\{(k_0, \sigma(k_0)), \dots, (k_q, \sigma(k_q)), \dots\}$ 是切换序列, 即当 $\sigma(k) \in [k_q, k_{q+1})$ 时, 第 $\sigma(k_q)$ 个子系统被激活, 其中 $k_0 = 0$; 时变时滞 $d(k)$ 满足 $\forall k > 0, 0 \leq d(k) \leq d$ 且 $d(k+1) \leq d(k)$, 其中 d 是已知的正整数; $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{di}, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i (i \in S)$ 是已知的实数矩阵.

本文针对离散切换时变时滞系统 (1) 设计了一个如下形式的全阶滤波器:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A}_{f\sigma(k)}\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_{f\sigma(k)}\mathbf{y}(k), \\ \mathbf{z}_f(k) = \mathbf{E}_{f\sigma(k)}\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{F}_{f\sigma(k)}\mathbf{y}(k), \\ \mathbf{x}_f(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_f(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 和 $\mathbf{z}_f(k) \in \mathbf{R}^{n_z}$ 分别表示滤波器的状态向量和输出向量, $\mathbf{A}_{fi}, \mathbf{B}_{fi}, \mathbf{E}_{fi}, \mathbf{F}_{fi} (i \in S)$ 是待定矩阵. 令 $\bar{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}(k) = \mathbf{z}_f(k) - \mathbf{z}(k)$, 由此根据离散切换时变时滞系统 (1) 和全阶滤波器 (2) 可得到如下滤波误差系统:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{\sigma(k)}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{d\sigma(k)}\bar{\mathbf{x}}(k-d(k)) + \bar{\mathbf{B}}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{e}(k) = \bar{\mathbf{E}}_{\sigma(k)}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{F}}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \bar{\mathbf{x}}(\theta) = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \theta \in [-d, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & 0 \\ B_{f\sigma(k)} C_{\sigma(k)} & A_{f\sigma(k)} \end{bmatrix}, \bar{A}_{d\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{d\sigma(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} B_{\sigma(k)} \\ B_{f\sigma(k)} D_{\sigma(k)} \end{bmatrix}, \bar{E}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} F_{f\sigma(k)} C_{\sigma(k)} - E_{\sigma(k)} & E_{f\sigma(k)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}_{\sigma(k)} = F_{f\sigma(k)} D_{\sigma(k)} - F_{\sigma(k)}, \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} \varphi(\theta) \\ x_0 \end{bmatrix}, \theta \in [-d, 0].$$

当 $\omega(k) = 0$ 时, 系统 (3) 变为:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A}_{\sigma(k)} \bar{x}(k) + \bar{A}_{d\sigma(k)} \bar{x}(k-d(k)), \\ e(k) = \bar{E}_{\sigma(k)} \bar{x}(k), \\ \bar{x}(\theta) = \bar{x}_0, \theta \in [-d, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

下面给出本文所需的一些定义和引理.

定义 1^[15] 如果对任意的初始条件 $x(0) \succeq 0$, 扰动输入 $\omega(k) \succeq 0$ 以及任意的切换信号 $\sigma(k)$, 系统 (1) 的轨迹满足 $x(k) \succeq 0$, $y(k) \succeq 0$, $z(k) \succeq 0$, $\forall k \geq 0$, 则称离散切换时变时滞系统 (1) 是正的.

引理 1^[16] 滤波误差系统 (3) 是正的, 当且仅当 $\bar{A}_i \succeq 0$, $\bar{A}_{di} \succeq 0$, $\bar{B}_i \succeq 0$, $\bar{E}_i \succeq 0$, $\bar{F}_i \succeq 0$, $\forall i \in S$ 成立.

定义 2^[17] 给定切换信号 $\sigma(k)$, $\forall k \geq k_0 \geq 0$, 并令 $N_{\sigma_i}(k, k_0)$ 是在 $[k_0, k)$ 上的第 i 个子系统被激活的次数, $T_i(k, k_0)$ 是在 $[k_0, k)$ 上的第 i 个子系统运行的时间, $i \in S$. 如果存在常数 $\tau_{ai} > 0$, $N_{li} \geq 0$, 使得不等式 $N_{\sigma_i}(k, k_0) \leq N_{li} + \frac{T_i(k, k_0)}{\tau_{ai}}$, $\forall i \in S$ 成立, 则称 τ_{ai} 是切换信号 $\sigma(k)$ 的 MDADT, N_{li} 是颤振界.

定义 3^[16] 给定常数 $K > 0$, 两个向量 $\delta \succ \varepsilon \succ 0$ 及一个切换信号 $\sigma(k)$, 如果 $\sup_{-d \leq \theta \leq 0} \{x^T(\theta)\delta\} \leq 1 \Rightarrow x^T(k)\varepsilon < 1$, $\forall k \in [0, K]$, 则称系统 (4) 关于 $(\delta, \varepsilon, K, \sigma(k))$ 是有限时间稳定的.

定义 4^[18] 给定常数 $\gamma > 0$ 及切换信号 $\sigma(k)$, 如果离散切换时变时滞系统 (3) 满足下列条件, 则称滤波误差系统 (3) 在切换信号 $\sigma(k)$ 下是有限时间稳定的, 并且其具有 l_1 增益 γ .

1) 当 $\omega(k) = 0$ 时, 系统 (3) 关于 $(\delta, \varepsilon, K, \sigma(k))$ 是有限时间稳定的;

2) 在零初始条件下, 对任意的非负向量 $\omega(k) \in l_1(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|e(k)\| \leq \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \|\omega(k)\|. \quad (5)$$

为了方便以下讨论, 不失一般性, 令 $N_{li} = 0$.

2 主要结果及其证明

首先给出系统 (4) 在 MDADT 切换信号下其有限时间稳定的充分条件.

定理 1 给定正整数 $K > 0$, 向量 $\delta \succ \varepsilon \succ 0$, 以及常数 $0 < \alpha_i < 1$, $\lambda_i > 1$, $i \in S$. 设 $\bar{A}_i \succeq 0$, $\bar{A}_{di} \succeq 0$, $\bar{E}_i \succeq 0$. 若存在常数 $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$ 及向量 $v_i \succ 0$, $v_i \succ 0$ ($i \in S$), 并使得以下不等式成立:

$$(\bar{A}_i^T - \alpha_i I) v_i + v_i \preceq 0, \quad (6)$$

$$\bar{A}_{di}^T v_i - \alpha_i^d v_i \preceq 0, \quad (7)$$

$$v_i \preceq \lambda_i v_j, \quad v_i \preceq \lambda_i \alpha_j^d v_j, \quad (8)$$

$$\xi_1 \varepsilon \prec v_i \prec \xi_2 \delta, \quad v_i \prec \xi_3 \delta, \quad (9)$$

$$(\xi_2 + d\xi_3) \alpha_i^K < \xi_1, \quad (10)$$

其中 $(i, j) \in S \times S$, 则当 MDADT 切换信号 $\sigma(k)$ 满足

$$\tau_{ai} \geq \tau_{ai}^* = \frac{K \ln \lambda_i}{\ln \xi_1 - K \ln \alpha_i - \ln(\xi_2 + d\xi_3)} \quad (11)$$

时, 离散切换时变时滞系统 (4) 是正的, 且其关于 $(\delta, \varepsilon, K, \sigma(k))$ 是有限时间稳定的.

证明 由于 $\bar{A}_i \succeq 0$, $\bar{A}_{di} \succeq 0$, $\bar{E}_i \succeq 0$, 因此由引理 1 可知系统 (4) 是正的. 下证系统 (4) 是有限时间稳定的. 首先构造如下形式的共正李亚普诺夫函数:

$$V_{\sigma(k)}(k) = V_{\sigma(k)}^{\Delta}(\bar{x}(k), k) = \bar{x}^T(k) v_{\sigma(k)} + \sum_{s=k-d(k)}^{k-1} \alpha_{\sigma(k)}^{k-s-1} \bar{x}^T(s) v_{\sigma(k)}.$$

设 $\sigma(k_q) = i$, $\sigma(k_{q-1}) = j$, 于是由 $d(k+1) \leq d(k)$ 和 $0 \leq d(k) \leq d$ 可得:

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k+1) - \alpha_{\sigma(k)} V_{\sigma(k)}(k) &= \bar{x}^T(k+1) v_i + \sum_{s=k+1-d(k+1)}^k \alpha_i^{k-s} \bar{x}^T(s) v_i - \alpha_i \bar{x}^T(k) v_i - \sum_{s=k-d(k)}^{k-1} \alpha_i^{k-s} \bar{x}^T(s) v_i \leq \\ &\bar{x}^T(k) \bar{A}_i^T v_i + \bar{x}^T(k-d(k)) \bar{A}_{di}^T v_i - \alpha_i \bar{x}^T(k) v_i + \bar{x}^T(k) v_i - \alpha_i^{d(k)} \bar{x}^T(k-d(k)) v_i \leq \\ &\bar{x}^T(k) [(\bar{A}_i^T - \alpha_i I) v_i + v_i] + \bar{x}^T(k-d(k)) [\bar{A}_{di}^T v_i - \alpha_i^d v_i]. \end{aligned}$$

故由式 (6)、(7) 可得:

$$\forall k, k+1 \in [k_q, k_{q+1}), V_i(k+1) \leq \alpha_i V_i(k). \quad (12)$$

此外, 根据式 (8) 可知:

$$V_{\sigma(k_q)}(k_q) \leq \lambda_{\sigma(k_q)} V_{\sigma(k_{q-1})}(k_q). \quad (13)$$

由于 $\forall k \in [0, K]$, 因此一定存在一个非负整数 q , 使得 $k \in [k_q, k_{q+1})$. 由此再结合不等式 (12)、(13) 可得:

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) &\leq \alpha_{\sigma(k_q)}^{k-k_q} V_{\sigma(k)}(k_q) \leq \alpha_{\sigma(k_q)}^{k-k_q} \lambda_{\sigma(k_q)} V_{\sigma(k_{q-1})}(k_q) \leq \cdots \leq \prod_{i=1}^N \lambda_i^{N_{\sigma_i}(k,0)} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{T_i(k,0)} V_{\sigma(0)}(0) \leq \\ &\exp \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{T_i(k,0)}{\tau_{ai}} \ln \lambda_i + T_i(k,0) \ln \alpha_i \right] \right\} V_{\sigma(0)}(0) \leq \exp \left\{ K \max_{i \in S} \left\{ \frac{\ln \lambda_i}{\tau_{ai}} + \ln \alpha_i \right\} \right\} V_{\sigma(0)}(0). \end{aligned} \quad (14)$$

由上式和式 (9) 可得:

$$V_{\sigma(0)}(0) = \bar{x}^T(0) v_{\sigma(0)} + \sum_{s=-d(0)}^{-1} \alpha_{\sigma(0)}^{-s-1} \bar{x}^T(s) v_{\sigma(0)} \leq (\xi_2 + d\xi_3) \sup \{ \bar{x}^T(\theta) \delta \}. \quad (15)$$

再由式 (9) - (11) 可知, 当 $\sup_{-d \leq \theta \leq 0} \{ \bar{x}(\theta) \delta \} \leq 1$ 时, 有 $\bar{x}^T(k) \varepsilon \leq \exp \left\{ K \max_{i \in S} \left\{ \frac{\ln \lambda_i}{\tau_{ai}} + \ln \alpha_i \right\} \right\} (\xi_2 + d\xi_3) / \xi_1 < 1$.

于是再由定义 3 可知, 离散切换正时变时滞系统 (4) 关于 $(\delta, \varepsilon, K, \sigma(k))$ 是有限时间稳定的.

下面给出滤波误差系统 (3) 在 MDADT 切换信号下其是有限时间稳定具有 l_1 增益 γ 的充分条件.

定理 2 给定正整数 $K > 0$, 向量 $\delta > \varepsilon > 0$, 以及常数 $0 < \alpha_i < 1$, $\lambda_i > 1$, $i \in S$. 设 $\bar{A}_i \succeq 0$, $\bar{A}_{di} \succeq 0$, $\bar{B}_i \succeq 0$, $\bar{E}_i \succeq 0$, $\bar{F}_i \succeq 0$. 如果存在常数 $\beta > 0$, $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$ 及一组向量 $v_i > 0$, $v_i > 0$, $i \in S$, 使得 $\forall (i, j) \in S \times S$, 且使得式 (8) - (10) 和如下不等式成立:

$$(\bar{A}_i^T - \alpha_i I) v_i + v_i + \bar{E}_i^T \mathbf{1}_{n_z} \leq 0, \quad (16)$$

$$\bar{A}_{di}^T v_i - \alpha_i^d v_i \leq 0, \quad (17)$$

$$\bar{B}_i^T v_i + \bar{F}_i^T \mathbf{1}_{n_w} - \beta \mathbf{1}_{n_w} \leq 0, \quad (18)$$

则滤波误差系统 (3) 在 MDADT 切换信号 (式 (11)) 下是正的和有限时间稳定的, 并且具有 l_1 增益

$$\gamma = \frac{1 - \alpha_{\min}}{1 - \rho_{\max}} \cdot \frac{\rho_{\max}}{\alpha_{\min}} \beta, \text{ 其中 } \alpha_{\min} = \min_{i \in S} \{ \alpha_i \}, \rho_{\max} = \max_{i \in S} \{ \lambda_i^{\tau_{ai}} \alpha_i \}.$$

证明 由于 $\bar{A}_i \succeq 0$, $\bar{A}_{di} \succeq 0$, $\bar{B}_i \succeq 0$, $\bar{E}_i \succeq 0$, $\bar{F}_i \succeq 0$, 因此由引理 1 可知系统 (3) 是正的. 再由定理 1 可

得, 当 $\omega(k)=0$ 时, 系统 (3) 关于 $(\delta, \varepsilon, K, \sigma(k))$ 是有限时间稳定的.

下证在零初始条件下, 系统 (3) 满足式 (5). 设 $\sigma(k_q)=i$, $\sigma(k_{q-1})=j$, 并令当 $\omega(k) \neq 0$ 时, $F(k)=\|e(k)\|_1 - \beta\|\omega(k)\|_1 = e^T(k)\mathbf{1}_{n_z} - \beta\omega^T(k)\mathbf{1}_{n_o}$. 类似于定理 1 的证明可得:

$$\forall k, k+1 \in [k_q, k_{q+1}),$$

$$V_{\sigma(k)}(k+1) - \alpha_{\sigma(k)} V_{\sigma(k)}(k) + F(k) \leq \begin{bmatrix} \bar{x}^T(k) & \bar{x}^T(k-d(k)) & \omega^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{A}_i^T - \alpha_i I) \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i + \bar{E}_i^T \mathbf{1}_{n_z} \\ \bar{A}_{di}^T \mathbf{v}_i - \alpha_i^d \mathbf{v}_i \\ \bar{B}_i^T \mathbf{v}_i + \bar{F}_i^T \mathbf{1}_{n_z} - \beta \mathbf{1}_{n_o} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

再由式 (16) – (18) 可得:

$$V_i(k+1) \leq \alpha_i V_i(k) - F(k). \quad (20)$$

此外, 根据式 (8) 可得:

$$V_{\sigma(k_q)}(k_q) \leq \lambda_{\sigma(k_q)} V_{\sigma(k_{q-1})}(k_q). \quad (21)$$

联立式 (20) 和式 (21) 可得:

$$\forall k \in [k_q, k_{q+1}),$$

$$V_{\sigma(k)}(k) \leq \alpha_{\sigma(k)}^{k-k_q} V_{\sigma(k)}(k_q) - \sum_{s=k_q}^{k-1} \alpha_{\sigma(k)}^{k-s-1} F(s) \leq \alpha_{\sigma(k)}^{k-k_q} \lambda_{\sigma(k)} V_{\sigma(k_{q-1})}(k_q) - \sum_{s=k_q}^{k-1} \alpha_{\sigma(k)}^{k-s-1} F(s) \leq \dots \leq$$

$$\prod_{i=1}^N \lambda_i^{N_{\sigma_i}(k,0)} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{T_i(k,0)} V_{\sigma(0)}(0) - \sum_{s=0}^{k-1} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{N_{\sigma_i}(k,s)} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{T_i(k,s)} F(s). \quad (22)$$

在零初始条件下, 由于 $F(s)=\|e(s)\|_1 - \beta\|\omega(s)\|_1$, 因此由式 (22) 可得:

$$\sum_{s=0}^{k-1} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{N_{\sigma_i}(k,s)} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{T_i(k,s)} \|e(s)\|_1 \leq \sum_{s=0}^{k-1} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{N_{\sigma_i}(k,s)} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{T_i(k,s)} \beta \|\omega(s)\|_1. \quad (23)$$

再由定义 2 可得:

$$\sum_{s=0}^{k-1} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{T_i(k,s)} \|e(s)\|_1 \leq \sum_{s=0}^{k-1} \prod_{i=1}^N (\lambda_i^{\tau_{ai}} \alpha_i)^{T_i(k,s)} \beta \|\omega(s)\|_1. \quad (24)$$

令 $\alpha_{\min} = \min_{i \in S} \{\alpha_i\}$, $\rho_{\max} = \max_{i \in S} \{\lambda_i^{\tau_{ai}} \alpha_i\}$, 于是有:

$$\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{\min}^{k-s} \|e(s)\|_1 \leq \sum_{s=0}^{k-1} \rho_{\max}^{k-s} \beta \|\omega(s)\|_1. \quad (25)$$

在式 (25) 两边同时从 $k=1$ 到 $k=\infty$ 进行求和可得:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|e(s)\|_1 \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1-\alpha_{\min}}{1-\rho_{\max}} \cdot \frac{\rho_{\max}}{\alpha_{\min}} \beta \|\omega(s)\|_1. \quad (26)$$

于是由式 (26) 和定义 4 可知, 滤波误差系统 (3) 关于 $(\delta, \varepsilon, K, \sigma(k))$ 有限时间稳定, 且其具有 l_1 增益

$$\gamma = \frac{1-\alpha_{\min}}{1-\rho_{\max}} \cdot \frac{\rho_{\max}}{\alpha_{\min}} \beta.$$

下面给出滤波器增益的具体形式.

定理 3 给定正整数 $K>0$, 向量 $\delta \succ \varepsilon > 0$, 以及常数 $0 < \alpha_i < 1$, $\lambda_i > 1$. 设 $\bar{A}_i \succeq 0$, $\bar{A}_{di} \succeq 0$, $\bar{B}_i \succeq 0$, $\bar{E}_i \succeq 0$, $\bar{F}_i \succeq 0$, $i \in S$. 如果存在常数 $\beta > 0$, $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$, 向量 $\mathbf{v}_{pi} \succ 0$, $\mathbf{v}_{fi} \succ 0$, $\mathbf{v}_{pi} \succ 0$, $\mathbf{v}_{fi} \succ 0$, 及矩阵 $\mathbf{P}_i \succeq 0$, $\mathbf{G}_i \succeq 0$, $\mathbf{E}_{fi} \succeq 0$, $\mathbf{F}_{fi} \succeq 0$, $i \in S$, 使得 $\forall k \in \{1, \dots, n_f\}$, $s \in \{1, \dots, l\}$, 式 (10) 和以下不等式成立:

$$A_i^T v_{pi} + C_i^T \left(\sum_{k=1}^{n_f} G_i^{[k]} \right)^T - \alpha_i v_{pi} + v_{pi} + C_i^T \left(\sum_{s=1}^l F_{fi}^{[s]} \right)^T - E_i^T \mathbf{1}_{n_z} \leq 0, \quad (27)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n_f} P_i^{[k]} \right)^T - \alpha_i v_{fi} + v_{fi} + \left(\sum_{s=1}^l E_{fi}^{[s]} \right)^T \leq 0, \quad (28)$$

$$A_{di}^T v_{pi} - \alpha_i^d v_{pi} \leq 0, \quad (29)$$

$$B_i^T v_{pi} + D_i^T \left(\sum_{k=1}^{n_f} G_i^{[k]} \right)^T + D_i^T \left(\sum_{s=1}^l F_{fi}^{[s]} \right)^T - F_i^T \mathbf{1}_{n_z} - \beta \mathbf{1}_{n_o} \leq 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} v_{pi} \\ v_{fi} \end{bmatrix} \prec_{\lambda_i} \begin{bmatrix} v_{pj} \\ v_{fj} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{pi} \\ v_{fi} \end{bmatrix} \prec_{\lambda_i \alpha_j^d} \begin{bmatrix} v_{pj} \\ v_{fj} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\xi_1 \varepsilon \prec \begin{bmatrix} v_{pi} \\ v_{fi} \end{bmatrix} \prec \xi_2 \delta, \quad \begin{bmatrix} v_{pi} \\ v_{fi} \end{bmatrix} \prec \xi_3 \delta, \quad (32)$$

则滤波误差系统 (3) 在 MDADT 切换信号 (式 (11)) 下是正的和有限时间稳定的, 且其具有 l_1 增益

$$\gamma = \frac{1 - \alpha_{\min}}{1 - \rho_{\max}} \cdot \frac{\rho_{\max}}{\alpha_{\min}} \beta, \quad \text{其中 } \alpha_{\min} = \min_{i \in S} \{\alpha_i\}, \quad \rho_{\max} = \max_{i \in S} \{\lambda_i^{\tau_{ai}} \alpha_i\}.$$

滤波器 (2) 的增益可以利用以下式子给出:

$$\begin{cases} A_{fi}^{[k]} = \frac{P_i^{[k]}}{v_{fi}^{[k]}}, \quad B_{fi}^{[k]} = \frac{G_i^{[k]}}{v_{fi}^{[k]}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n_f\}, \\ E_{fi}^{[s]} = E_{fi}^{[s]}, \quad F_{fi}^{[s]} = F_{fi}^{[s]}, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}, \end{cases} \quad (33)$$

其中 $v_{fi}^T = [v_{fi}^{[1]} \cdots v_{fi}^{[n_f]}]$.

$$\text{证明 根据式 (33), 在定理 2 中令 } v_i = \begin{bmatrix} v_{pi} \\ v_{fi} \end{bmatrix}, \quad v_i = \begin{bmatrix} v_{pi} \\ v_{fi} \end{bmatrix}, \quad v_{fi}^T A_{fi} = \sum_{k=1}^{n_f} P_i^{[k]}, \quad v_{fi}^T B_{fi} = \sum_{k=1}^{n_f} G_i^{[k]}, \quad \mathbf{1}_{n_z}^T E_{fi} = \sum_{s=1}^l E_{fi}^{[s]},$$

$\mathbf{1}_{n_z}^T F_{fi} = \sum_{s=1}^l F_{fi}^{[s]}$, 将其代入式 (8)、式 (9) 和式 (16) — (18) 中可得式 (8)、(9)、(16)、(17)、(18) 分别等价于

式 (29)、(30)、(27) 和 (28)、(31)、(32). 因此, 由定理 2 可得滤波误差系统是有限时间稳定的, 并且其具有

l_1 增益 $\gamma = \frac{1 - \alpha_{\min}}{1 - \rho_{\max}} \cdot \frac{\rho_{\max}}{\alpha_{\min}} \beta$. 由于矩阵 $P_i \succeq 0$, $G_i \succeq 0$, $E_{fi} \succeq 0$, $F_{fi} \succeq 0$, $i \in S$ 都为非负矩阵, 因此由式 (33) 可

得 A_{fi} 、 B_{fi} 、 E_{fi} 、 F_{fi} 是非负矩阵, 由此再由引理 1 可知滤波器 (2) 是正的. 证毕.

3 数值算例

例 1 考虑滤波误差系统 (4), 其中:

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{d1} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{d2} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在定理 1 中, 给定常数 $d=2$, $\alpha_1=0.8$, $\alpha_2=0.84$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1.65$, $K=14$ 及向量 $\varepsilon=[1 \quad 0.5]^T$, $\delta=[1.8 \quad 1.6]^T$, 由此再利用 Matlab 对式 (6) — (10) 进行求解可得 $v_1=[1.5329 \quad 1.0180]^T$, $v_2=[1.0264 \quad 0.6463]^T$, $v_1=[0.3593 \quad 0.1000]^T$, $v_2=[0.4364 \quad 0.1000]^T$, $\xi_1=5$, $\xi_2=1$, $\xi_3=1$. 将上述常数和向量代入式 (11) 可得 $\tau_{a1}^*=3.4812$, $\tau_{a2}^*=3.3314$. 由于 MDADT 切换信号 $\sigma(k)$ 满足 $\tau_{ai} \geq \tau_{ai}^*$, 因此此时 MDADT 可选取 $\tau_{a1}=4$ 和 $\tau_{a2}=5$. 设系统 (4) 的初始条件为 $\bar{x}^T(0)=[0.3 \quad 0.2]$,

$\bar{x}^T(\theta)=[0.2 \quad 0.4]$, $\theta \in [-2, 0]$. 则由 $\bar{x}^T(\theta)$ 和 δ 的定义可知初始条件 $\bar{x}(\theta)$ 满足 $\sup_{-d \leq \theta \leq 0} \{\bar{x}^T(\theta)\delta\} \leq 1$.

图 1 为系统 (4) 在区间 $[0, 14]$ 上的切换信号 $\sigma(k)$. 由图 1 可以看出, τ_{a1} 和 τ_{a2} 均满足式 (11). 图 2 为系统 (4) 在区间 $[0, 14]$ 上的状态响应曲线, 图 3 为系统 (4) 的 $\bar{x}^T(k)\varepsilon$ 在区间 $[0, 14]$ 上的变化情况. 由图 2 和图 3 可以看出, 在区间 $[0, 14]$ 内, 系统 (4) 的状态轨迹满足 $\bar{x}^T(k)\varepsilon < 1$. 于是再由定义 3 可知, 系统 (4) 关于 $([1.8 \quad 1.6]^T, [0.01 \quad 0.02]^T, 14, \sigma(k))$ 是有限时间稳定的.

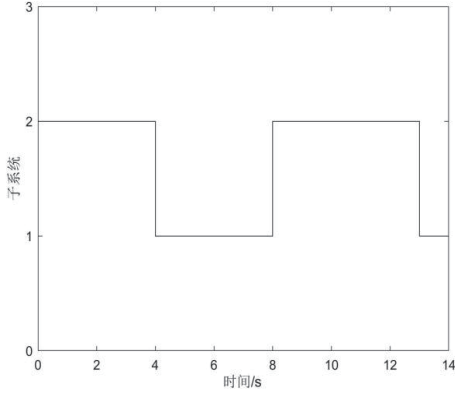


图 1 系统 (4) 在区间 $[0, 14]$ 上的切换信号

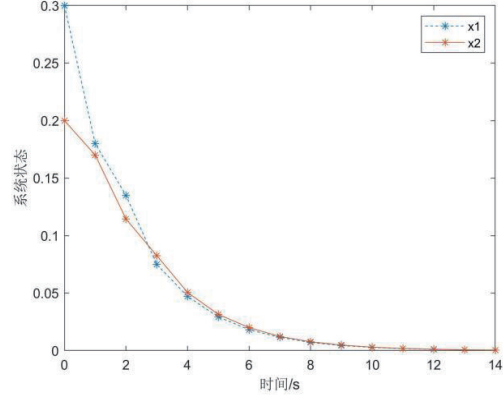


图 2 系统 (4) 在区间 $[0, 14]$ 上的状态响应曲线

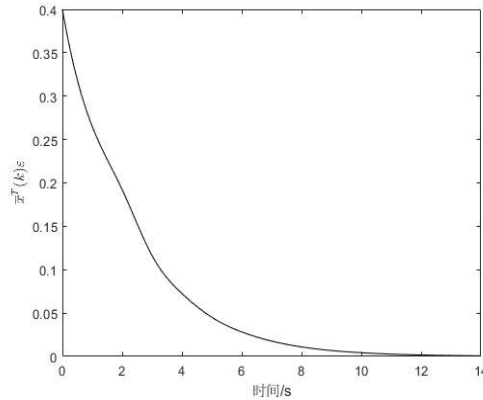


图 3 系统 (4) 中的 $\bar{x}^T(k)\varepsilon$ 在区间 $[0, 14]$ 上的变化情况

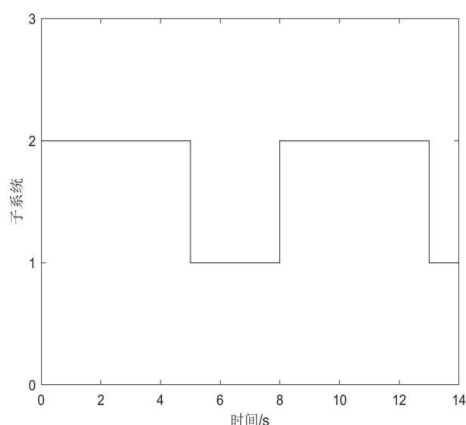
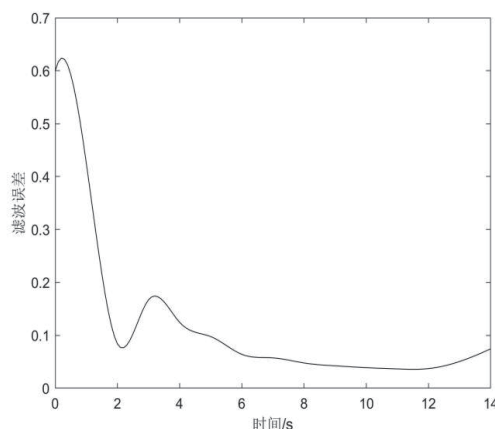
例 2 考虑滤波误差系统 (3), 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.04 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.04 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0.15 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.25 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0.2 \quad 0.3]^T, \\ B_2 = [0.3 \quad 0.2]^T, \quad C_1 = [0.16 \quad 0.4], \quad C_2 = [0.19 \quad 0.45], \quad D_1 = 0.8, \quad D_2 = 0.8, \quad E_1 = [0.2 \quad 0.1], \quad E_2 = [0.2 \quad 0.1], \\ F_1 = 0.4, \quad F_2 = 0.2.$$

在定理 3 中, 给定常数 $d=2$, $\alpha_1=0.86$, $\alpha_2=0.84$, $\lambda_1=1.8$, $\lambda_2=1.83$, $n_f=2$, $K=14$ 及向量 $\varepsilon=[0.8 \quad 1 \quad 1 \quad 0.7]^T$, $\delta=[3 \quad 3.6 \quad 3.7 \quad 3]^T$, 由此再利用 Matlab 对式 (10) 和式 (27) — (33) 进行求解可得: $v_1=[2.7859 \quad 3.0840 \quad 3.1546 \quad 2.3872]^T$, $v_2=[2.1104 \quad 2.7264 \quad 3.8222 \quad 2.4221]^T$, $v_3=[1.1864 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$, $v_4=[1 \quad 1.341 \quad 1 \quad 1]^T$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0.0167 & 0.0334 \\ 0.1962 & 0.0196 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 0.0149 & 0.0149 \\ 0.1957 & 0.0196 \end{bmatrix}$, $\beta=10$, $\xi_1=3$, $\xi_2=1$, $\xi_3=1$.

将上述常数和向量代入式 (11) 和式 (33) 可得: $A_{f1} = \begin{bmatrix} 0.0053 & 0.0106 \\ 0.0822 & 0.0082 \end{bmatrix}$, $A_{f2} = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0039 \\ 0.0808 & 0.0081 \end{bmatrix}$.

$B_{f2} = [0.0039 \ 0.0081]^T$, $B_{f1} = [0.0053 \ 0.0082]^T$, $E_{f1} = [1.5 \ 1]$, $E_{f2} = [2 \ 1]$, $F_{f1} = 1.25$, $F_{f2} = 1.1111$, $\tau_{a1}^* = 3.1490$, $\tau_{a2}^* = 4.3834$. 由于 MDADT 切换信号 $\sigma(k)$ 满足 $\tau_{ai} \geq \tau_{ai}^*$, 因此此时 MDADT 可选取 $\tau_{a1} = 4$ 和 $\tau_{a2} = 5$. 图 4 为系统 (3) 在区间 $[0, 14]$ 上的切换信号 $\sigma(k)$. 由图 4 可以看出, τ_{a1} 和 τ_{a2} 均满足式 (11). 令干扰输入 $\omega(k) = 1/(k+1)^{4/3} e^{-0.3k}$, 则由此得出的系统 (3) 在区间 $[0, 14]$ 上的滤波误差如图 5 所示. 由图 5 可以看出, 滤波误差是正的且收敛, 由此表明了定理 3 的有效性.

图 4 系统 (3) 在区间 $[0, 14]$ 上的切换信号图 5 系统 (3) 在区间 $[0, 14]$ 上的滤波误差

参考文献:

- [1] DU S L, DONG J T, LI X, et al. Stability and stabilization for switched positive systems under a weighted MDADT method[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(8): 3656-3670.
- [2] MASON, SHORTEN R. On linear copositive Lyapunov functions and the stability of switched positive linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(7): 1346-1349.
- [3] MURATORI S, RINAKLDI S. Equilibria, stability and reachability of Leslie systems with nonnegative inputs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(9): 1065-1068.
- [4] CACCETTA L, FOULDS L R, RUMCHEV V G. A positive linear discrete-time model of capacity planning and its controllability properties[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40(1/2): 217-226.
- [5] YAZDI M B, JAHED-MOTLAGH M R. Stabilization of a CSTR with two arbitrarily switching modes using modal state feedback linearization[J]. Chemical Engineering Journal, 2009, 155(3): 838-843.
- [6] MA R, ZHAO J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchings[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1819-1823.
- [7] ISHII H, FRANCIS A B. Stabilizing a linear system by switching control with dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(12): 1962-1973.
- [8] WANG D, WANG W, SHI P. Exponential H_∞ filtering for switched linear systems with interval time-varying delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(5): 532-551.
- [9] ZHANG L X, GAO H J. Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time[J]. Automatica, 2010, 46(5): 953-958.
- [10] ZHAO X D, ZHANG L X, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7): 1809-1815.

