文章编号：1004-4353（2024）01-0023-08

# 一类带 Hardy 项的 *p*-Laplace 方程正解的先验估计

闫慧敏，谢君辉
（湖北民族大学 数学与统计学院，湖北 恩施 445000）

**摘要：**研究了一类带 Hardy 项椭圆型 $p$-Laplace 方程 $-\Delta_p u=\frac{u^q}{|x|^a}+h(x, u, \nabla u)$ 解的先验估计，其中 $3<p<N$，$p-1<q<\frac{(N-a)(p-1)}{N-p}$，$0<a<2$. 在假设 $h(x, u, \nabla u)$ 满足一定的条件下，首先运用 Doubling 引理证明了解的一个衰减估计，然后运用 blow up 技巧并结合 Liouville 定理证明了非负解的先验估计 .

**关键词：**$p$-Laplace 方程；Hardy 项；先验估计；Doubling 引理；Liouville 定理
**中国分类号：**O175.25　　**文献标志码：**A

# A priori estimate of positive solutions for a class of *p*-Laplace equations with Hardy term

YAN Huimin，XIE Junhui
(*School of Mathematics and Statistics*， *Hubei Minzu University*， *Enshi 445000*，*China*)

**Abstract:** This paper is devoted to studying a priori estimate of a elliptic p-Laplacian equation $-\Delta_p u=\frac{u^q}{|x|^a}+h(x, u, \nabla u)$ with Hardy term，where $3<p<N$， $p-1<q<\frac{(N-a)(p-1)}{N-p}$， $0<a<2$. Under suitable conditions of $h(x, u, \nabla u)$，firstly，we prove the decay estimates of solutions by Doubling lemma，then combining blow up technique with Liouville theorem，we also prove a priori estimate for the positive solutions.

**Keywords:** $p$-Laplace equation；Hardy term；a priori estimate；Doubling lemma；Liouville theorem

## 0　引言

本文研究如下在有界区域上一类带 Hardy 项的 $p$-Laplace 方程 Dirichlet 边值问题 ( 式 (1)) 正解的先验估计，其中 $\Delta_p u=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$，$\Omega$ 是 $\mathbf{R}^N(N>3)$ 中包含原点的有界光滑区域，$3<p<N$，$p-1<q<\frac{(N-a)(p-1)}{N-p}$，$0<a<2$.

$$\begin{cases}-\Delta_p u=\dfrac{u^q}{|x|^a}+h(x, u, \nabla u), & x\in\Omega;\\ u=0, x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

当 $a=0$，$h(x, u, \nabla u)=h(x, u)$ 时，式 (1) 变为如下问题：

**投稿日期：**2023-09-22
**基金项目：**国家自然科学基金 (11761030)；湖北省自然科学基金 (2022CFC016)
**第一作者：**闫慧敏 (1999— )，女，硕士研究生，研究方向为偏微分方程理论及其应用.
**通信作者：**谢君辉 (1984— )，女，博士，副教授，研究方向为偏微分方程理论及其应用.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^q + h(x,\ u),\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

目前已有许多学者对问题(2)解的存在性进行了研究[1-5]. 例如：文献[1]的作者得到了问题(2)解的先验估计，并运用连续性方法证明了解的存在性；在$h(x,\ u)$满足Caratheodory函数条件和临界Sobolev增长时，文献[2]的作者建立了问题(2)解的逐点先验估计；文献[3]的作者基于Liouville定理运用blow up的方法研究了问题(2)解的逐点先验估计. 当问题(2)的非齐次项含有梯度项时，问题(2)变为如下问题：

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^q + h(x,\ u,\ \nabla u),\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

由于此类含梯度项的方程不具有变分结构，因此经典的变分方法难以对其进行求解。非变分方法（如先验估计和不动点定理等）由于不仅可以保证问题正解集的紧性，而且证明方法简洁，因此近年来被一些学者用于证明椭圆型方程解的存在性[6-10]. 例如：文献[6]的作者利用截断方法和径向递减对称的方法得到了问题(3)解的$L^\infty$估计；文献[7]的作者利用Picone's恒等式、blow up技巧、强极大值原理和Liouville型定理得到了问题(3)解的先验估计；文献[8]的作者运用Doubling引理和Liouville定理证明了问题(3)解的先验估计.

另外，一些学者还研究了带Hardy项的椭圆型方程解的存在性问题. 例如：文献[11]的作者研究了如下问题：

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{r-2} u + \mu \dfrac{|u|^{q-2}}{|x|^s} u,\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

其中$\Omega$是$\mathbf{R}^N$中包含原点的有界光滑区域，$1 < p < N$，$p \leqslant q \leqslant \dfrac{N-s}{N-p} p$，$p \leqslant r \leqslant \dfrac{Np}{N-p}$，并证明了问题(4)在临界和次临界情况下存在正解和变号解. 文献[12]的作者研究了如下问题：

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \mu \dfrac{|u|^{p-2} u}{|x|^p} = \dfrac{|u|^{p^*(t)-2}}{|x|^t} + \lambda \dfrac{|u|^{q-2} u}{|x|^s},\ x \in \Omega; \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

其中$\Omega$是$\mathbf{R}^N$中包含原点的有界光滑区域，$1 < p < N$，$0 \leqslant \mu < (\dfrac{N-p}{p})^p$，$0 \leqslant s$，$t < p$，$\lambda > 0$，$p \leqslant q < \dfrac{p(N-s)}{N-p}$，$p^*(t) = \dfrac{p(N-t)}{N-p}$，并证明了问题(5)存在正解. 文献[13]和文献[14]的作者运用变量代换和doubling-rescaling方法证明了一类带Hardy项椭圆型方程解的衰减估计和解的先验估计，同时该方法可避免在使用blow up技巧证明该方程解的先验估计时Hardy项在原点处所带来的奇性问题. 基于上述研究，本文采用变量代换和doubling-rescaling的方法对含有Hardy项的$p$-Laplace方程中的Hardy项进行处理，所得结果推广了文献[8]和[14]的结论.

## 1 预备知识

本文总是假设$h(x,\ u,\ \nabla u)$满足以下条件：

$(\mathrm{H}_1)$ $h(x,\ m,\ \varsigma)$关于$m$是Holder连续的，且$h(x,\ m,\ \varsigma) \geqslant 0$；

$(\mathrm{H}_2)$ 若$N > 3, 3 < p < N$，$p-1 < q < \dfrac{(N-a)(p-1)}{N-p}$，则假设存在正常数$\lambda_0$使$\lim\limits_{m \to 0} \dfrac{h(x,\ m,\ \varsigma)}{m^{p-1}} = \lambda_0$，$\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{h(x,\ m,\ \varsigma)}{m^q} = 0$，且存在$h(x,\ m,\ \varsigma) \leqslant C(1 + |m|^{\gamma_1} + |\varsigma|^{\gamma_2})$，其中$0 < \lambda_0 < \lambda_1$, $0 < \gamma_1 < q$, $0 < \gamma_2 < p-1$，$\lambda_1$为

下列特征值问题的第一特征值 .

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi = \lambda \varphi^{p-1}, & x \in \Omega; \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

**定义 1**[15]　定义 $\|u\|_q$ 为 $L^q(\Omega)$ 中的范数, 即 $\|u\|_q = \|u\|_{L^q(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}$，$1 \leqslant q < \infty$；

$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\limits_{\Omega} |u|$，$q = \infty$.

**定义 2**　若对所有的 $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$，有 $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{u^q}{|x|^a} \varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega h(x, u, \nabla u) \varphi \mathrm{d}x$，则称 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是问题 (1) 的弱解 .

**引理 1**[16]　假设 $1 < p < N$，且 $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$，则有：① $\frac{u}{|x|} \in L^p(\mathbf{R}^N)$；② (Hardy 不等式) $\int_{\mathbf{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} \mathrm{d}x \leqslant C_{N,p} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x$，其中 $C_{N,p} = (\frac{p}{N-p})^p$；③常数 $C_{N,p}$ 是最优的 .

**引理 2**[17]　假设 $2 \leqslant p \leqslant N$，$p-1 < q < \frac{Np-N+p}{N-p}$，若 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\mathbf{R}^N) \cap C(\mathbf{R}^N)$ 是问题 $-\Delta_p u = |u|^q$，$x \in \mathbf{R}^N$ 的非负解, 则 $u \equiv 0$.

**引理 3**[18]　假设 $2 \leqslant p \leqslant N$，$p-1 < q < \frac{Np-N+p}{N-p}$，若 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\mathbf{R}_+^N) \cap C(\mathbf{R}_+^N)$ 是问题 $\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^q, & x \in \mathbf{R}_+^N; \\ u = 0, & x \in \partial \mathbf{R}_+^N. \end{cases}$ 的非负解, 则 $u \equiv 0$，其中 $\mathbf{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \mid x_N > 0\}$，$x' = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ .

**引理 4**[19]　假设 $1 < p < N$，$p-1 < q \leqslant \frac{(N+\gamma)(p-1)}{N-p}$，$b > 0$，$\gamma > -p$，若 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\mathbf{R}^N) \cap C(\mathbf{R}^N)$ 是问题 $-\Delta_p u \geqslant b|x|^\gamma |u|^q$，$x \in \mathbf{R}^N$ 的非负解, 则 $u \equiv 0$.

**引理 5** (Doubling 引理)[20] 假设 $(X, d)$ 是完备的度量空间，$\Phi \neq D \subset \Sigma \subset X$，$\Sigma$ 是闭集 . 令 $M$：$D \to (0, \infty)$，$M$ 是 $D$ 上的紧子集且有界, 实数 $k$ 固定 $(k > 0)$ . 若 $y \in D$ 满足 . $M(y)\mathrm{dist}(y, \Gamma) > 2k$，$\Gamma = \Sigma \setminus D$，则存在 $x \in D$，使得 $M(x)\mathrm{dist}(x, \Gamma) > 2k$，$M(x) \geqslant M(y)$ $M(z) \leqslant 2M(x)$，$\forall z \in D \cap \overline{B(x, kM^{-1}(x))}$ .

## 2　主要结果及其证明

首先给出问题 (1) 解的衰减估计结果（定理 1）.

**定理 1** 假设 $N > 3$，$3 < p < N$，$p-1 < q < \frac{(N-a)(p-1)}{N-p}$，$0 < a < 2$，则存在一个常数 $C(N, p, a) > 0$，且有如下结论成立：

(i) 当区域 $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; 0 < |x| < \rho\} (\rho > 0)$ 时, 问题 (1) 的任意非负解都满足：

$|u(x)| \leqslant C|x|^{-\frac{a-p+1}{p-q-1}}$，$|\nabla u(x)| \leqslant C|x|^{-\frac{a-q}{p-q-1}}$；

(ii) 当区域 $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; |x| > \rho\} (\rho > 0)$ 时, 问题 (1) 的任意非负解都满足：

$|u(x)| \leqslant C|x|^{-\frac{a-p+1}{p-q-1}}$，$|\nabla u(x)| \leqslant C|x|^{-\frac{a-q}{p-q-1}}$.

为了证明定理 1, 需要先证明如下引理 .

**引理6** 假设$N>3$, $3<p<N$,$p-1<q<\dfrac{(N-a)(p-1)}{N-p}$,$\alpha\in(0,1]$, 若$c(x)\in C^{\alpha}(\bar{B}_1)$满足

$$\|c(x)\|_{C^{\alpha}(\bar{B}_1)}\leqslant C_1,\ c(x)\geqslant C_2,\quad x\in\bar{B}_1, \tag{6}$$

其中$C_1$和$C_2$是正常数,$B_1=\{x\in\mathbf{R}^N;|x|<1\}$,则存在一个常数$C(\alpha,C_1,C_2,q,N)$,使方程(7)的任意解$u$有$|u|^{\frac{p-q-1}{1-p}}+|\nabla u|^{-\frac{p-q-1}{q}}\leqslant C(1+\mathrm{dist}^{-1}(x,\ \partial B_1))$.

$$-\Delta_p u=\frac{u^q}{c(x)}+h(x,\ u,\ \nabla u),\quad x\in\bar{B}_1\ . \tag{7}$$

**证明** 利用反证法证明引理6. 记$N_k=|u_k|^{\frac{p-q-1}{1-p}}+|\nabla u_k|^{-\frac{p-q-1}{q}}$,并假设存在序列$c_k$、$u_k$、$y_k$满足式(6)、式(7)以及$N_k(y_k)>2k(1+\mathrm{dist}^{-1}(y_k,\ \partial B_1))>2k\mathrm{dist}^{-1}(y_k,\ \partial B_1)$. 由此根据引理5可知存在$x_k$使得$N_k(x_k)\geqslant N_k(y_k)$,$N_k(x_k)>2k\mathrm{dist}^{-1}(x_k,\ \partial B_1)$ $N_k(z)\leqslant 2N_k(x_k)$, $\forall|z-x_k|\leqslant kN_k^{-1}(x_k)$. 于是再根据$N_k(x_k)>N_k(y_k)>2k$有:

$$\lambda_k=N_k^{-1}(x_k)\to 0,\quad k\to+\infty. \tag{8}$$

令$v_k(y)=\lambda_k^{\frac{1-p}{p-q-1}}u_k(x_k+\lambda_k y)$, $\tilde{c}_k(y)=c_k(x_k+\lambda_k y)$,则对式(7)进行计算可得:

$$|v_k(0)|^{\frac{p-q-1}{1-p}}+|\nabla v_k(0)|^{-\frac{p-q-1}{q}}=1\ ,$$

$$|v_k(y)|^{\frac{p-q-1}{1-p}}+|\nabla v_k(y)|^{-\frac{p-q-1}{q}}\leqslant 2,\quad |y|\leqslant k, \tag{9}$$

且$v_k$满足方程:

$$-\Delta_p v_k(y)=\frac{v_k^q}{\tilde{c}_k(y)}+\lambda_k^{-\frac{q(p-1)}{p-q-1}}h(x_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{\frac{p-1}{p-q-1}}v_k(y),\ \lambda_k^{\frac{q}{p-q-1}}\nabla v_k(y)), \tag{10}$$

其中$|y|\leqslant k$. 根据假设条件$(H_2)$可知, 当$k$足够大时有:

$$\lambda_k^{-\frac{q(p-1)}{p-q-1}}h(x_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{\frac{p-1}{p-q-1}}v_k(y),\ \lambda_k^{\frac{q}{p-q-1}}\nabla v_k(y))\leqslant C,\quad |y|\leqslant k,$$

其中$v_k$的子列在$C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$收敛到一个大于0的函数$v(y)$. 固定$y\in\mathbf{R}^N$, 并定义$\mu_k=\lambda_k^{\frac{p-1}{p-q-1}}v_k(y)$, $\xi_k=v_k^{-\frac{q}{p-1}}\nabla v_k(y)$,则有:

$$\lambda_k^{-\frac{q(p-1)}{p-q-1}}h(x_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{\frac{p-1}{p-q-1}}v_k(y),\ \lambda_k^{\frac{q}{p-q-1}}\nabla v_k(y))=v_k^q(y)\mu_k^{-q}h(x_k+\lambda_k y,\ \mu_k,\ \mu_k^{\frac{q}{p-1}}\xi_k).$$

另外, 若$\{x_k\}$是有界的, 则根据假设条件$(H_2)$可得:

$$v_k^q(y)\mu_k^{-q}h(x_k+\lambda_k y,\ \mu_k,\ \mu_k^{\frac{q}{p-1}}\xi_k)\to 0,\quad k\to+\infty. \tag{11}$$

再由式(6)可知$C_2\leqslant\tilde{c}_k\leqslant C_1$,且对任意的$R>0$,当$k>k_0(R)$足够大时有下式成立:

$$|\tilde{c}_k(y)-\tilde{c}_k(z)|\leqslant C_1|\lambda_k(y-z)|^{\alpha}\leqslant C_1|y-z|^{\alpha},\quad |y|,|z|\leqslant R. \tag{12}$$

由于$C(\mathbf{R}^N)$中存在$\tilde{c}\geqslant C_2$,因此根据Ascoli's定理[21]可知, 存在$\{\tilde{c}_k\}$的子列, 不失一般性, 仍记$\{\tilde{c}_k\}$的子列为$\tilde{c}_k$,且在$C_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$中有$\tilde{c}_k\to\tilde{c}$成立. 对每一个$R>0$, $1<p<\infty$,由式(9)、式(10)和椭圆内部$L^p$估计可得$v_k$在$C^{1,\alpha}(B_R)$中一致有界, 其中$\alpha\in(0,1)$. 再由嵌入定理和椭圆标准内部Schauder估计可知, 存在$\{v_k\}$的子列, 不失一般性, 仍记$\{v_k\}$的子列为$v_k$,且在$C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$中有$v_k\to v$成立. 由式(8)和式(12)可知, 当$k\to+\infty$时$|\tilde{c}_k(y)-\tilde{c}_k(z)|\to 0$,因此函数$\tilde{c}$为一个大于0的常数, 即:

$$\frac{v_k^q}{\tilde{c}_k(y)}\to\frac{v^q}{\tilde{c}},\quad k\to+\infty. \tag{13}$$

综上，可以得到 $v>0$ 是方程 $-\Delta_p v=\dfrac{v^q}{\tilde{c}}$，$y\in\mathbf{R}^N$ 的一个古典解且满足 $|v(0)|^{\frac{p-q-1}{1-p}}+|\nabla v(0)|^{-\frac{p-q-1}{q}}=1$，该结果与 Liouville 定理矛盾，故引理 6 得证 .

**定理 1 的证明** 假设区域 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N;0<|x|<\rho\}$ 且 $0<|x_0|<\dfrac{\rho}{2}$ 或者区域 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N;|x|>\rho\}$ 且 $|x_0|>2\rho$ . 令 $R_0=\dfrac{1}{2}|x_0|$，由于对所有的 $y\in B_1$ 都有 $\dfrac{|x_0|}{2}<|x_0+R_0y|<\dfrac{3|x_0|}{2}$，因此无论区域 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N;0<|x|<\rho\}$ 且 $0<|x_0|<\dfrac{\rho}{2}$ 还是区域 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^N;|x|>\rho\}$ 且 $|x_0|>2\rho$ 都有 $x_0+R_0y\in\Omega$. 定义 $\hat{U}(y)=R_0^{\frac{a-p+1}{p-q-1}}u(x_0+R_0y)$，则由此对式 (1) 进行计算可得 $\hat{U}(y)$ 满足如下方程：

$$-\Delta_p\hat{U}(y)=\frac{\hat{U}^q(y)}{d(y)}+R_0^{\frac{(a-q)(p-1)}{p-q-1}}h(x_0+R_0y,\ R_0^{-\frac{a-p+1}{p-q-1}}\hat{U}(y),\ R_0^{-\frac{a-q}{p-q-1}}\nabla\hat{U}(y)),\quad y\in B_1,\tag{14}$$

其中 $d(y)=\left|\dfrac{x_0}{R_0}+y\right|^a$ . 根据 $y\in\bar{B}_1$ 易得 $\left|\dfrac{x_0}{R_0}+y\right|\in[1,3]$，又因为 $\|d(y)\|_{C^1(\bar{B}_1)}\leqslant C(a)$，$C(a)$ 是一个关于 $a$ 的常数，于是再由引理 6 可知 $|\hat{U}(0)|+|\nabla\hat{U}(0)|\leqslant C$，即 $|u(x_0)|\leqslant CR_0^{-\frac{a-p+1}{p-q-1}}$，$|\nabla u(x_0)|\leqslant CR_0^{-\frac{a-q}{p-q-1}}$，定理 1 得证 .

下面运用 blow-up 技巧和 Liouville 定理证明问题 (1) 解的先验估计 .

**定理 2** 假设 $N>3,3<p<N$，$p-1<q<\dfrac{(N-a)(p-1)}{N-p},0<a<2$ . 若条件 $(H_1)$ 和 $(H_2)$ 成立，则存在正常数 $\hat{C}$ 和 $\tilde{C}$，使得对问题 (1) 的任意解 $u\in C(\Omega)$ 有 $\hat{C}\leqslant\|u\|_{C(\Omega)}\leqslant\tilde{C}$ 成立 .

**证明** 首先用反证法证 $\|u\|_{C(\Omega)}\geqslant\hat{C}$. 假设对任意的 $\hat{C}>0$ 有 $\|u\|_{C(\Omega)}<\hat{C}$ 成立，则由此知存在序列 $\{u_k\}$ 使得 $u_k$ 满足：

$$\begin{cases}-\Delta_p u_k=\dfrac{u_k^q}{|x|^a}+h(x,\ u_k,\ \nabla u_k),\ x\in\Omega;\\ u_k=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{15}$$

且当 $k\to\infty$ 时取 $\bar{M}_k=\sup\limits_{x\in\Omega}u_k(x)\to 0$. 在式 (15) 的第 1 个方程两边同时乘以 $u_k$，并在 $\Omega$ 上进行积分后利用 Holder 不等式、带 $\varepsilon$ 的 Young 不等式、Hardy 不等式以及假设条件 $(H_2)$ 可得：

$$\int_\Omega|\nabla u_k|^p\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{u_k^{q+1}}{|x|^a}+u_kh(x,\ u_k,\ \nabla u_k)\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\frac{u_k^a}{|x|^a}u_k^{q+1-a}\mathrm{d}x+C\int_\Omega u_k(1+|u_k|^{\gamma_1}+|\nabla u_k|^{\gamma_2})\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\varepsilon\int_\Omega\frac{u_k^p}{|x|^p}\mathrm{d}x+C_1(\varepsilon)\int_\Omega u_k^{\frac{p(q+1-a)}{p-a}}\mathrm{d}x+C\int_\Omega u_k+|u_k|^{\gamma_1+1}+u_k|\nabla u_k|^{\gamma_2}\ \mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(\varepsilon\int_\Omega|\nabla u_k|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega u_k\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_k|^{\gamma_1+1}\mathrm{d}x)+C_1(\varepsilon)\int_\Omega u_k^{\frac{p(q+1-a)}{p-a}}\mathrm{d}x+C_2(\varepsilon)\int_\Omega u_k^{\frac{p}{p-\gamma_2}}\mathrm{d}x.$$

整理上式可得 $(1-C\varepsilon)\int_\Omega|\nabla u_k|^p\mathrm{d}x\leqslant C(\int_\Omega u_k\mathrm{d}x+\int_\Omega u_k^{\gamma_1+1}\mathrm{d}x)+C_1(\varepsilon)\int_\Omega u_k^{\frac{p(q+1-a)}{p-a}}\mathrm{d}x+C_2(\varepsilon)\int_\Omega u_k^{\frac{p}{p-\gamma_2}}\mathrm{d}x$. 当 $\varepsilon$ 足够小时，可得：

$$\|\nabla u_k\|_p^p\leqslant C(\|u_k\|_1+\|u_k\|_{\gamma_1+1}^{\gamma_1+1}+\|u_k\|_{\frac{p(q+1-a)}{p-a}}^{\frac{p(q+1-a)}{p-a}}+\|u_k\|_{\frac{p}{p-\gamma_2}}^{\frac{p}{p-\gamma_2}})\leqslant C\|u_k\|_{C(\Omega)}=C\bar{M}_k\to 0,\quad k\to+\infty.$$

令 $u_k(x)=\bar{M}_kV_k(x)$，则由式 (15) 可知 $V_k$ 满足：

$$\begin{cases} -\Delta_p V_k = \bar{M}_k^{q-p+1}\dfrac{V_k^q}{|x|^a}+\dfrac{h(x,\ \bar{M}_k V_k,\ \bar{M}_k \nabla V_k)}{\bar{M}_k^{p-1}},\ x\in\Omega; \\ V_k=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{16}$$

再根据$\int_\Omega |\nabla V_k|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega \bar{M}_k^{q-p+1}\dfrac{V_k^{q+1}}{|x|^a}+V_k\dfrac{h(x,\ \bar{M}_k V_k,\ \bar{M}_k \nabla V_k)}{\bar{M}_k^{p-1}}\mathrm{d}x\leqslant$

$$C\bar{M}_k^{q-p+1}\left(\int_\Omega |\nabla V_k|^p \mathrm{d}x+\int_\Omega V_k^{\frac{p(q+1-a)}{p-a}}\mathrm{d}x\right)+\int_\Omega V_k^p\frac{h(x,\ \bar{M}_k V_k,\ \bar{M}_k \nabla V_k)}{\bar{M}_k^{p-1}V_k^{p-1}}\mathrm{d}x,$$

以及条件$(H_2)$和拟线性椭圆型方程的标准正则性理论[22]可知，存在$\{V_k\}$的子列．不失一般性，仍记$\{V_k\}$的子列为$V_k$，在$C(\bar{\Omega})$中$V_k\to V$成立，$V\in W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，且有$V$满足：

$$\begin{cases} -\Delta_p V=\lambda_0 V^{p-1},\ x\in\Omega; \\ V=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{17}$$

由于$\lambda_0<\lambda_1$，因此式(17)没有正解，这与$V$满足式(17)相矛盾，因此存在一个常数$\hat{C}$且同时对问题(1)的解有$\|u\|_{C(\Omega)}\geqslant \hat{C}$.

下证$\|u\|_{C(\Omega)}\leqslant \tilde{C}$. 同样采用反证法．假设$\|u\|_{C(\Omega)}>\tilde{C}$成立，因此存在序列$\{u_k\}$和点列$P_k\in\Omega$，使得当$k\to+\infty$时有$\tilde{M}_k=\sup\limits_{x\in\Omega}u_k(x)=u_k(P_k)\to+\infty$. 则当$P_k\to P\in\bar{\Omega}$时，可以分为以下两种情况讨论上界：

**情况 1** $P\in\Omega\setminus\{0\}$或$P\in\partial\Omega$. 对$U_k$作如下变换：

$$U_k(y)=\lambda_k^{\frac{p-1}{q-p+1}}u_k(P_k+\lambda_k y),\quad \lambda_k=\tilde{M}_k^{-\frac{q-p+1}{p-1}}. \tag{18}$$

将式(18)代入式(15)中进行计算可得$U_k$满足：

$$\begin{cases} -\Delta_p U_k(y)=\dfrac{U_k^q(y)}{|P_k+\lambda_k y|^a}+\lambda_k^{\frac{q(p-1)}{q-p+1}}h(P_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{-\frac{p-1}{q-p+1}}U_k(y),\ \lambda_k^{-\frac{q}{q-p+1}}\nabla U_k(y)),\ y\in\Omega_k; \\ U_k=0,\ y\in\partial\Omega_k. \end{cases}$$

其中$\Omega_k=\lambda_k^{-1}(\Omega-\{P_k\})$. 由于$\lambda_k=\tilde{M}_k^{-\frac{q-p-1}{p-1}}$，因此有：

$$\left|\frac{U_k^q(y)}{|P_k+\lambda_k y|^a}+\lambda_k^{\frac{q(p-1)}{q-p+1}}h(P_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{-\frac{p-1}{q-p+1}}U_k(y),\ \lambda_k^{-\frac{q}{q-p+1}}\nabla U_k(y))\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{U_k^q(y)}{|P_k+\lambda_k y|^a}+C\lambda_k^{\frac{q(p-1)}{q-p+1}}(1+\lambda_k^{-\frac{(p-1)\gamma_1}{q-p+1}}|U_k(y)|^{\gamma_1}+\lambda_k^{-\frac{q\gamma_2}{q-p+1}}|\nabla U_k(y)|^{\gamma_2})\right|\leqslant C.$$

由对$U_k$所作的变换易知$U_k(0)=1$. 再根据椭圆内部估计和嵌入定理，可以推断$U_k$的子列会收敛到一个大于0的函数$U$，且满足方程$-\Delta_p U=lU^q,\ U\in\mathbf{R}^N$或$\begin{cases} -\Delta_p U=lU^q,\ U\in\mathbf{R}_+^N; \\ U=0,\ U\in\partial\mathbf{R}_+^N. \end{cases}$

其中$l>0$．该结果与全空间或半空间的Liouville定理相矛盾，因此存在一个正常数$\tilde{C}$使$\|u\|_{C(\Omega)}\leqslant\tilde{C}$.

**情况 2** $P=0$. 作如下变换：

$$U_k(y)=\lambda_k^{\frac{a-p+1}{p-q-1}}u_k(P_k+\lambda_k y),\quad \lambda_k=\tilde{M}_k^{-\frac{p-q-1}{a-p+1}}, \tag{19}$$

再将式(19)代入式(15)中进行计算可得$U_k$满足：

$$\begin{cases} -\Delta_p U_k(y)=\dfrac{U_k{}^q(y)}{\left|\dfrac{P_k}{\lambda_k}+y\right|^a}+\lambda_k^{\frac{(a-q)(p-1)}{p-q-1}}h(P_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{-\frac{a-p+1}{p-q-1}}U_k(y),\ \lambda_k^{-\frac{a-q}{p-q-1}}\nabla U_k(y)),\ y\in\Omega_k; \\ U_k=0,\ y\in\partial\Omega_k. \end{cases}$$

其中 $\Omega_k=\lambda_k^{-1}(\Omega-\{P_k\})$. 由于 $\lambda_k=\tilde{M}_k^{-\frac{q-p+1}{a-p+1}}$，因此有：

$$\left|\frac{U_k^{\,q}(y)}{\left|\frac{P_k}{\lambda_k}+y\right|^a}+\lambda_k^{\frac{(a-q)(p-1)}{p-q-1}}h(P_k+\lambda_k y,\ \lambda_k^{-\frac{a-p+1}{p-q-1}}U_k(y),\ \lambda_k^{-\frac{a-q}{p-q-1}}\nabla U_k(y))\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{U_k^{\,q}(y)}{\left|\frac{P_k}{\lambda_k}+y\right|^a}+\lambda_k^{\frac{(a-q)(p-1)}{p-q-1}}C(1+\lambda_k^{-\frac{(a-p+1)\gamma_1}{p-q-1}}|U_k(y)|^{\gamma_1}+\lambda_k^{-\frac{(a-q)\gamma_2}{p-q-1}}|\nabla U_k(y)|^{\gamma_2})\right|\leqslant C.$$

由于区域 $\Omega_k$ 包含 $B(0,\ \rho\lambda_k^{-1})$，其中 $\rho>0$. 因此根据定理 1 可得 $\frac{|P_k|}{\lambda_k}=|P_k|u_k^{\frac{p-q-1}{a-p+1}}(P_k)\leqslant C$. 设 $k\to+\infty$ 时 $\frac{P_k}{\lambda_k}\to x_0\in\mathbf{R}^N$，再采用与证明情况 1 类似的方法可得 $U$ 满足方程：$-\Delta_p U=\frac{U^q}{|y+x_0|^a}$，$y\in\mathbf{R}^N$. 对上式进行平移变换可得：

$$-\Delta_p U=\frac{U^q}{|y|^a},\quad y\in\mathbf{R}^N.$$

根据引理 4 的结论可知式 (20) 没有非平凡解，而 $U(0)=1$，矛盾，故存在正常数 $\tilde{C}$ 使 $\|u\|_{C(\Omega)}\leqslant\tilde{C}$. 综上，定理 2 得证 .

## 参考文献：


[1] AZIZIEH C，CLEMENT P. A priori estimates and continuation methods for positive solutions of $p$-Laplace equations[J]. Journal of Differential Equations，2002，179(1)：213-245.

[2] VETOIS J. A priori estimates and application to the symmetry of solutions for critical $p$-Laplace equations[J]. Journal of Differential Equations，2016，260(1)：149-161.

[3] SUN X Q，BAO J G. Pointwise a priori estimates for solutions to some $p$-Laplacian equations[J]. Acta Mathematica Sinica，English Series，2022，38(12)：2150-2162.

[4] AGHAJANI A，MOTTAGHI S F. A priori estimates for semistable solutions of $p$-Laplace equations with general nonlinearity[J]. Asymptotic Analysis，2020，122(7)：1-12.

[5] CHEN Z. A priori bounds and existence of non-negative solutions to a quasi-linear Schrodinger equation involving $p$-Laplacian[J]. Annals of Functional Analysis，2023，14(1)：24.

[6] CHO K，CHOE H J. Nonlinear degenerate elliptic partial differential equations with critical growth conditions on the gradient[J]. Proceeding of the American Mathematical Society，1995，123(12)：3789-3796.

[7] ITURRIAGA L，LORCA S，SANCHEZ J. Existence and multiplicity results for the $p$-Laplacian with a $p$-gradient term[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications，2008，15(6)：729-743.

[8] 李振杰，张正策 . 拟线性椭圆型方程与方程组非负解的一个先验估计 [J]. 应用数学学报，2014，37(2)：379-384.

[9] LI J，YIN J，KE Y. Existence of positive solutions for the $p$-Laplacian with $p$-gradient term[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2011，383(1)：147-158.

[10] LI P，XIE J. A priori bounds and existence of positive solutions to a $p$-Kirchhoff equations[J]. International Journal of Mathematics，2021，32(11)：2150082.

[11] GHOUSSOUB N，YUAN C. Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2000，352(12)：5703-5743.

[12] KANG D S. On the quasilinear elliptic problem with critical Sobolev-Hardy exponents and Hardy terms[J]. Nonlinear Analysis，2008，68(7)：1973-1985.

[13] GIDAS B, SPRUCK J. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1981, 6(8): 883-901.

[14] PHAN Q H, SOUPLET P. Liouville-type theorems and bounds of solutions of Hardy-Henon equations[J]. Journal of Differential Equations, 2012, 252(3): 2544-2562.

[15] EVANS L C. Partial Differential Equations[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010: 618.

[16] AZORERO J G, ALONSO I P. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems[J]. Journal of Differential Equations, 1998, 144(2): 441-476.

[17] SERRIN J, ZOU H H. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities[J]. Acta Mathematica, 2002, 189(1): 79-142.

[18] ZOU H H. A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2008, 33(4): 417-437.

[19] BIRINDELLI I, DEMENGEL F. Some Liouville theorems for the *p*-Laplacian[C]// Jerome Busca. 2001-Luminy Conference on Quasilinear Elliptic and Parabolic Equations and Systems. Luminy France: Electronic Journal of Differential Equations, 2002: 35-46.

[20] POLACIK P, QUITTNER P, SOUPLET P. Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems, I: Elliptic equations and systems[J]. Duke Mathematical Journal, 2007, 139(3): 555-579.

[21] XIAO Y B, KIM J K, HUANG N J. A generalization of Ascoli-Arzela theorem with an application[J]. Nonlinear Functional Analysis & Applications, 2006, 11(2): 305-317.

[22] SAKAGUCHI S. Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems[J]. Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 1987, 14(3): 403-421.

(上接第22页)

accelerated life test for OLiHL distribution[J].Quality and Reliability Engineering International, 2022, 39(8): 3410-3427.

[9] AHMED A I. Parametric and interval estimation under step-stress partially accelerated life tests using adaptive type-II progressive hybrid censoring[J]. Annals of Data Science, 2020, 10(2): 1-13.

[10] 龙兵, 张忠占. Ⅰ型双删失下逆 Rayleigh 分布的统计分析 [J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(06): 199-207.

[11] 李兰平. 平方误差和 LINEX 损失函数下逆 Rayleigh 分布参数的经验 Bayes 估计 [J]. 统计与决策, 2013(1): 81-83.

[12] ATHIRAKRISHNAN R B, ABDULSATHAR E I. E-Bayesian and hierarchical bayesian estimation of inverse rayleigh distribution[J].American Journal of Mathematical and Management Sciences, 2022, 41(1): 70-87.

[13] BALAKRISHNAN N, SANDHU A R. A simple simulational algorithm for generating progressive type-II censored samples[J].The American Statistician, 2012, 49(2): 229-230.

[14] RAQAB M Z, MADI M T. Bayesian inference for the generalized exponential distribution[J]. Journal of Statistical computation and Simulation, 2005, 75(10): 841-852.