文章编号: 1004-4353(2023)04-0345-06

概率语言术语集距离测度的改进及其应用

刘孟宇，王惠文
(云南师范大学 数学学院，昆明 650500)

摘要：为了进一步研究模糊多属性决策中的排序问题，提出了一种改进的概率语言术语集距离测度，即在传统距离测度的基础上添加了一项广义距离测度，使得在计算两个不同长度的概率语言术语集之间的距离时，不再需要对初始概率语言信息进行调整，避免了人为添加概率语言术语元所带来的主观影响. 利用实例进行计算表明，用该方法计算可信网络社团扩张最优节点时，其排序效果显著优于基于传统距离测度的 TOPSIS 方法，且具有简洁性；因此，该方法对解决模糊多属性决策中的排序问题具有良好参考.

关键词：概率语言术语集；距离测度；TOPSIS 方法；熵测度；多属性决策
中图分类号：O223　　**文献标志码**：A

Improvement and application of distance measure of probabilistic language term set

LIU Mengyu，WANG Huiwen
(*School of Mathematics，Yunnan Normal University，Kunming* 650500，*China*)

Abstract：In order to further study the ranking problems in fuzzy multi-attribute decision-making，an improved probabilistic language term set distance measure was proposed，that is，a generalized distance measure was added to the traditional distance measure，causing when calculating the distance between two probabilistic language term sets of different lengths，it was no longer necessary to adjust the initial probabilistic language information，avoiding the influence of artificially adding probabilistic language term element. The example calculation shows that when the optimal node of trusted network community expansion is calculated by this method，the effect is significantly better than that of the TOPSIS method based on traditional distance measure，and posesses the characteristics of brevity. Therefore，this method can provide a good reference to solve the ranking problems in fuzzy multi-attribute decision-making.

Keywords：probabilistic language term set；distance measure；TOPSIS method；entropy measure；multi-attribute decision-making

0　引言

为了更好地通过定性的方式来描述实际生活中不能被定量表示的问题，1975 年 Zadeh[1] 提出了模糊语言方法. 由于模糊语言方法只能利用一个语言术语来评估语言变量，因此当决策者面临具有高度不确定性的问题时，该方法存在较大的局限性. 基于此，2011 年 Rodriguez 等[2] 提出了犹豫模糊语言术语

收稿日期：2023－07－10
基金项目：云南师范大学研究生科研训练基金(YJSJJ22-B93)
第一作者：刘孟宇(1999—)，女，硕士研究生，研究方向为模糊多属性决策.
通信作者：王惠文(1975—)，男，博士，副教授，研究方向为模糊决策.

集(HFLTS)的概念.由于该概念将犹豫模糊集[3]和模糊语言方法相结合,允许决策者使用多个语言术语同时评估语言变量,因此其很好地弥补了模糊语言方法的缺陷;但由于 HFLTS 将决策者给出的每个语言术语赋予了相等的权重,因而其决策结果存在一定的偏差.为了解决 HFLTS 存在的这一缺陷,2016 年 Pang 等[4]提出了概率语言术语集(PLTS)的概念.由于 PLTS 允许决策者将每个语言术语赋予不同的权重,因此使用 PLTS 可以获得更为准确的决策结果.

近年来,学者们已对直觉模糊集、犹豫模糊集以及区间模糊集等的距离测度进行了较多研究,但对 PLTSs 距离测度的研究相对较少.目前,对 PLTSs 距离测度进行研究的文献主要有:2016 年,Pang 等[4]给出了 PLTSs 偏差度的定义;同年,Zhang 等[5]给出了概率语言术语集距离测度的定义;2019 年,Mao 等[6]基于 PLTSs 偏差度定义了一种新的 PLTSs 欧氏距离,但是该距离测度公式的计算精度需进一步提高.基于上述研究,本文定义了一种新的 PLTSs 距离测度,并通过实例验证了该距离测度的有效性.

1 基础知识

1.1 犹豫模糊语言术语集(HFLTS)

定义 1[1] 设 τ 是一个正偶数,则 LTS 可表示为:

$$S=\{s_i \mid i=0,1,\cdots,\tau\}. \tag{1}$$

由式(1)可以看出,LTS是一个由固定数量的语言术语组成的有限参考集,其中,$\tau+1$ 是 S 的基数,$s_i(i=0,1,\cdots,\tau)$ 是语言术语,并且 $s_i(i=0,1,\cdots,\tau)$ 通常以下标为基准进行升序排列.

例 1 给定 $\tau=6$,则 LTS 可表示为如下形式:

$$S=\{s_0=\text{极其慢},s_1=\text{非常慢},s_2=\text{慢},s_3=\text{中速},s_4=\text{快},s_5=\text{非常快},s_6=\text{极其快}\}.$$

定义 2[2] 若 $S=\{s_i \mid i=0,1,\cdots,\tau\}$ 是给定的 LTS,则 HFLTS 是 S 上的连续语言项的有序子集.

例 2 假设 S 为例 1 中给定的 LTS,则 $H_1=\{s_0=\text{极其慢},s_1=\text{非常慢}\}$ 和 $H_2=\{s_4=\text{快},s_5=\text{非常快},s_6=\text{极其快}\}$ 是定义在 S 上的两个不同的 HFLTSs.其中,H_1 和 H_2 也可简记为 $H_1=\{s_0,s_1\}$,$H_2=\{s_4,s_5,s_6\}$,它们的补集分别为 $H_1^c=\{s_6,s_5\}$ 和 $H_2^c=\{s_2,s_1,s_0\}$.

1.2 概率语言术语集(PLTS)

定义 3[4] 设 $S=\{s_i \mid i=0,1,\cdots,\tau\}$ 是一个给定的 LTS,则称定义在 S 上的 PLTS 为:

$$L(p)=\left\{L^{(k)}(p^{(k)}) \mid L^{(k)}\in S;\ p^{(k)}\geqslant 0;\ k=1,2,\cdots,\#L(p);\ \sum_{k=1}^{\#L(p)} p^{(k)}\leqslant 1\right\}. \tag{2}$$

其中:$L^{(k)}(p^{(k)})$ 是概率语言术语元(PLTE),$L^{(k)}(k=1,2,\cdots,\#L(p))$ 是 $L(p)$ 上的可能的语言术语,$p^{(k)}\in(0,1](k=1,2,\cdots,\#L(p))$ 是与 $L^{(k)}(k=1,2,\cdots,\#L(p))$ 相对应的概率信息,$\#L(p)$ 是 $L(p)$ 中的元素个数.在下文中,仅考虑标准化的 PLTS,即仅考虑概率语言术语元的概率之和等于 1 的情况.

2 概率语言术语集的距离测度

定义 4[7] $L_1(p)$ 和 $L_2(p)$ 是任意两个 PLTSs,定义它们之间的距离测度为 $d(L_1(p),L_2(p))$,且 $d(L_1(p),L_2(p))$ 满足以下 3 个性质:① $d(L_1(p),L_2(p))\geqslant 0$;② 若 $L_1(p)=L_2(p)$,则 $d(L_1(p),L_2(p))=0$;③ $d(L_1(p),L_2(p))=d(L_2(p),L_1(p))$.

2.1 传统 PLTSs 的距离测度

定义 5[8] 假设 $L_1(p)=\{L_1^{(k_1)}(p_1^{(k_1)}) \mid k_1=1,2,\cdots,\#L_1(p)\}$、$L_2(p)=\{L_2^{(k_2)}(p_2^{(k_2)}) \mid k_2=1,2,\cdots,\#L_2(p)\}$ 是定义在 $S=\{s_i \mid i=0,1,\cdots,\tau\}$ 上的 PLTSs,并且 $L_1(p)$ 和 $L_2(p)$ 中的元素满足 $\#L_1(p)=\#L_2(p)$,则 $L_1(p)$ 和 $L_2(p)$ 之间的广义归一化距离测度为:

$$d_{gnd}(L_1(p),L_2(p))=\left[\frac{1}{\#L_1(p)}\sum_{k=1}^{\#L_1(p)}\left|p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-p_2^{(k)}\times\frac{I(L_2^{(k)})}{\tau}\right|^{\lambda}\right]^{1/\lambda}. \tag{3}$$

其中：$I(L_1^{(k)})$ 和 $I(L_2^{(k)})$ 分别是语言术语 $L_1^{(k)}$ 和 $L_2^{(k)}$ 的下标，并且 $0\leqslant\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}\leqslant 1$，$0\leqslant\frac{I(L_2^{(k)})}{\tau}\leqslant 1$. 当 $\lambda=1$ 时，式(3) 变为汉明距离公式；当 $\lambda=2$ 时，式(3) 为欧几里得距离公式.

2.2　新的 PLTSs 的距离测度

定义 6　假设 $L_1(p)=\{L_1^{(k)}(p_1^{(k)})\mid k=1,2,\cdots,\# L_1(p)\}$、$L_2(p)=\{L_2^{(j)}(p_2^{(j)})\mid j=1,2,\cdots,\# L_2(p)\}$ 是定义在 $S=\{s_i\mid i=0,1,\cdots,\tau\}$ 上的 PLTSs，则 $L_1(p)$ 和 $L_2(p)$ 之间的广义距离测度为：

$$d_{gnd}(L_1(p),L_2(p))=\Bigg[\omega\left|\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-\sum_{j=1}^{\# L_2(p)}p_2^{(j)}\times\frac{I(L_2^{(j)})}{\tau}\right|^{\lambda}+(1-\omega)\left(\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}\sum_{j=1}^{\# L_2(p)}\left|\frac{I(L_1^{(k)})-I(L_2^{(j)})}{\tau}\right|^{\lambda}p_1^{(k)}p_2^{(j)}\right)\Bigg]^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{4}$$

其中：ω ($\omega\in(0,1)$) 是权重参数.

定理 1　定义 6 中的距离公式满足定义 4 中给出的 PLTSs 距离测度的 3 个公理性条件.

证明　本文以标准化的汉明距离为例($\lambda=1$) 证明式(4) 满足定义 4 中的 3 个公理性条件.

1) 非负性显然成立.

2) 因当 $L_1(p)=L_2(p)$ 时，$\# L_1(p)=\# L_2(p)$，所以显然有：

$$\begin{cases}I(L_1^{(k)})=I(L_2^{(k)})\\ p_1^{(k)}=p_2^{(k)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{I(L_1^{(k)})-I(L_2^{(k)})}{\tau}\right|=0\\ p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}=p_2^{(k)}\times\frac{I(L_2^{(k)})}{\tau}\end{cases}\Rightarrow d_{gnd}(L_1(p),L_2(p))=0.$$

3) 由

$$\left|\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-\sum_{j=1}^{\# L_2(p)}p_2^{(j)}\times\frac{I(L_2^{(j)})}{\tau}\right|=\left|\sum_{j=1}^{\# L_2(p)}p_2^{(j)}\times\frac{I(L_2^{(j)})}{\tau}-\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}\right|,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}\sum_{j=1}^{\# L_2(p)}\left|\frac{I(L_1^{(k)})-I(L_2^{(j)})}{\tau}\right|p_1^{(k)}p_2^{(j)}\right)=\left(\sum_{j=1}^{\# L_2(p)}\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}\left|\frac{I(L_2^{(j)})-I(L_1^{(k)})}{\tau}\right|p_2^{(j)}p_1^{(k)}\right)$$

显然知有 $d_{gnd}(L_1(p),L_2(p))=d_{gnd}(L_2(p),L_1(p))$，故对称性成立. 综上，定理 1 得证.

由于 $s_{0.5\tau}$ 是最模糊的语言术语，因此本文将定义 6 中的 $L_1(p)$ 与 $s_{0.5\tau}$ 之间的偏离程度作为模糊性的参考. 由此得到的 $L_1(p)$ 与 $\{s_{0.5\tau}(1)\}$ 之间的汉明距离为：

$$d_{nhd}(L_1(p),\{s_{0.5\tau}(1)\})=\left[\omega\left|\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-0.5\right|+(1-\omega)\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}\left|\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-0.5\right|p_1^{(k)}\right].$$

将上式代入模糊熵生成函数($f(x)=1-2x$)[9] 中可得概率语言术语集的熵测度公式：

$$\begin{aligned}E(L_1(p))&=1-2d_{nhd}(L_1(p),\{s_{0.5\tau}(1)\})=\\ &1-\left[2\omega\left|\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}p_1^{(k)}\times\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-0.5\right|+2(1-\omega)\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}\left|\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-0.5\right|p_1^{(k)}\right]=\\ &1-2\omega\left|e(L)-0.5\right|-2(1-\omega)\sum_{k=1}^{\# L_1(p)}\left|\frac{I(L_1^{(k)})}{\tau}-0.5\right|p_1^{(k)}.\end{aligned}\tag{5}$$

由式(5) 中的模糊熵可知，其与文献[10] 中的混合熵的形式完全一样；但本文定义的熵测度更为简单，即不用再将基于距离的熵测度和基于伪距离的熵测度进行凸组合. 以下举例说明本文提出的距离测度的合理性和有效性.

例 3　$L_1(p)=\{s_3(1)\}$、$L_2(p)=\{s_5(0.2),s_7(0.8)\}$、$L_3(p)=\{s_1(0.2),s_6(0.4),s_8(0.4)\}$、$L_4(p)=\{s_3(0.6),s_7(0.4)\}$ 是定义在 $S=\{s_i\mid i=0,1,\cdots,10\}$ 上的 PLTSs，请计算它们两两之间的汉明距离.

方法1 利用文献[10]中的距离公式($d_{nhd}(L_1(p),L_2(p))=\sum_{k=1}^{l}\left|\frac{I(L_1^{(k)})-I(L_2^{(k)})}{\tau}\right|p^{(k)}$,其中$l$是$L_1(p)$、$L_2(p)$、$L_3(p)$、$L_4(p)$规范化后的长度)计算例3.由于$\# L_1(p)\neq \# L_2(p)\neq \# L_3(p)$,因此需要采用文献[10]中的概率分裂算法对其进行规范化处理.经过规范化处理后得:

$L_1(p)=\{s_3(0.2),s_3(0.4),s_3(0.4)\}$; $L_2(p)=\{s_5(0.2),s_7(0.4),s_7(0.4)\}$;

$L_3(p)=\{s_1(0.2),s_6(0.4),s_8(0.4)\}$; $L_4(p)=\{s_3(0.2),s_3(0.4),s_7(0.4)\}$.

由上式计算得:$d_{nhd}(L_1(p),L_2(p))=0.36$, $d_{nhd}(L_1(p),L_3(p))=0.36$, $d_{nhd}(L_1(p),L_4(p))=0.16$, $d_{nhd}(L_2(p),L_3(p))=0.16$, $d_{nhd}(L_2(p),L_4(p))=0.20$, $d_{nhd}(L_3(p),L_4(p))=0.20$.由以上结果可以看出,利用上述公式计算任意两个PLTSs之间的距离时具有一定的缺陷性,即有时难以准确区分出任意两个概率语言术语集之间的距离.

方法2 利用定义6中的距离公式计算例3.将公式中的λ和ω分别设为1、1/2,于是由此直接进行计算得:$d_{nhd}(L_1(p),L_2(p))=0.36$, $d_{nhd}(L_1(p),L_3(p))=0.32$, $d_{nhd}(L_1(p),L_4(p))=0.16$, $d_{nhd}(L_2(p),L_3(p))=0.144$, $d_{nhd}(L_2(p),L_4(p))=0.216$, $d_{nhd}(L_3(p),L_4(p))=0.208$.由上述结果可以看出,定义6中的距离测度能有效克服文献[10]中距离测度所存在的不足.

3 实际应用

为了证实本文提出的距离公式的合理性和有效性,本文采用TOPSIS方法对文献[11]中的例子进行分析.该实例解决的是可信网络社团扩张的问题,即:在新节点$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$中选择出最优的一个节点加入社团.对新节点进行综合评判的属性标准为态度、行为、意志、诚信、责任,其中属性评价的语言术语集为$S=\{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4\}$.专家基于各个标准对每个节点进行评价的结果见表1.

首先利用TOPSIS决策方法选取最优节点.设:$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$为备选方案集;$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$为属性集;$\omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}^{\mathrm{T}}$为属性权重,并且权重满足$\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$, $\omega_j\geqslant 0$, $j=1,2,\cdots,m$; $S=\{s_i\mid i=0,1,\cdots,\tau\}$是给定的LTS.各专家利用语言术语评估$m$个备选方案后,由其所得的决策意见构成的概率语言决策矩阵为$\boldsymbol{R}=[L_{ij}(p)]_{m\times n}$,其中$L_{ij}(p)=\{L_{ij}^{(k)}(p_{ij}^{(k)})\mid k=1,2,\cdots,\# L_{ij}(p)\}$.根据上述得到的基于改进距离测度的TOPSIS方法的步骤为:

步骤1 根据专家提供的决策信息构造决策矩阵,结果如表1所示.

表1 概率语言决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\{s_2(0.5),s_3(0.5)\}$	$\{s_2(0.5),s_3(0.5)\}$	$\{s_2(0.22),s_3(0.78)\}$	$\{s_1(0.23),s_2(0.54),s_3(0.23)\}$	$\{s_3(1)\}$
x_2	$\{s_2(0.52),s_3(0.26),s_4(0.22)\}$	$\{s_2(0.23),s_3(0.54),s_4(0.23)\}$	$\{s_3(1)\}$	$\{s_4(1)\}$	$\{s_2(0.22),s_3(0.26),s_4(0.52)\}$
x_3	$\{s_1(0.22),s_2(0.78)\}$	$\{s_1(0.22),s_2(0.26),s_4(0.52)\}$	$\{s_3(0.78),s_4(0.22)\}$	$\{s_2(0.22),s_3(0.78)\}$	$\{s_3(1)\}$
x_4	$\{s_3(0.5),s_4(0.5)\}$	$\{s_3(0.78),s_4(0.22)\}$	$\{s_2(1)\}$	$\{s_2(0.22),s_3(0.26),s_4(0.52)\}$	$\{s_3(0.5),s_4(0.5)\}$

步骤2 确定PLTSs的正、负理想解[12].

正理想解:$x^+=(L_1(p)^+,L_2(p)^+,\cdots,L_n(p)^+)$,其中$L_j(p)^+=\{(L_j)(1)\}$且$L_j^+=\max\limits_{i,k}(L_{ij}^{(k)})$.

负理想解:$x^-=(L_1(p)^-,L_2(p)^-,\cdots,L_n(p)^-)$,其中$L_j(p)^-=\{(L_j)(1)\}$且$L_j^-=\min\limits_{i,k}(L_{ij}^{(k)})$.

由以上可得PLTSs的正、负理想解分别为:$x^+=(s_4(1),s_4(1),s_4(1),s_4(1),s_4(1))$, $x^-=(s_1(1),s_1(1),s_2(1),s_1(1),s_2(1))$.

步骤 3　确定各个属性的权重. 首先在式(5) 中分别取 ω 为 0.1、0.2、…、0.9 来计算表 1 中的各 PLTSs 的熵测度. 计算结果显示，利用不同 ω 值计算得到的熵测度几乎相同，因此本文在此取 $\omega=0.5$ 对 PLTSs 进行计算，所得结果为：

$$\boldsymbol{E}_{4\times 5}=\begin{pmatrix}0.75 & 0.75 & 0.61 & 0.885 & 0.5\\ 0.65 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.35\\ 0.89 & 0.48 & 0.39 & 0.61 & 0.5\\ 0.25 & 0.39 & 1 & 0.35 & 0.25\end{pmatrix}.$$

然后根据公式 $\omega_j=(1-E_j)/\sum_{j=1}^{n}(1-E_j)\left(E_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}E(L_{ij}),j=1,2,\cdots,n\right)$ 计算出各个属性的权重值. 经计算，各属性的权重值分别为：$\omega_1=0.1554$，$\omega_2=0.2001$，$\omega_3=0.1597$，$\omega_4=0.2294$，$\omega_5=0.2554$.

步骤 4　计算各个备选方案与正、负理想解之间的加权距离，其计算公式为：

$$d_{nhd}(x_i,x^+)=\omega_1 d_{nhd}(L_{i1}(p),L_1(p)^+)+\omega_2 d_{nhd}(L_{i2}(p),L_2(p)^+)+\cdots+\omega_n d_{nhd}(L_{in}(p),L_n(p)^+). \tag{6}$$

$$d_{nhd}(x_i,x^-)=\omega_1 d_{nhd}(L_{i1}(p),L_1(p)^-)+\omega_2 d_{nhd}(L_{i2}(p),L_2(p)^-)+\cdots+\omega_n d_{nhd}(L_{in}(p),L_n(p)^-). \tag{7}$$

利用式(6) 和式(7) 计算得：$d_{nhd}(x_1,x^+)=0.3605641$，$d_{nhd}(x_2,x^+)=0.1851517$，$d_{nhd}(x_3,x^+)=0.3102368$，$d_{nhd}(x_4,x^+)=0.2103486$；$d_{nhd}(x_1,x^-)=0.2856572$，$d_{nhd}(x_2,x^-)=0.4610697$，$d_{nhd}(x_3,x^+)=0.3359845$，$d_{nhd}(x_4,x^-)=0.4358727$.

步骤 5　计算各备选方案的贴近度，其计算公式为 $CI(x_i)=\frac{d_{nhd}(x_i,x^-)}{d_{nhd}(x_i,x^+)+d_{nhd}(x_i,x^-)}$. 由该式计算得：$CI(x_1)\approx 0.44$，$CI(x_2)\approx 0.72$，$CI(x_3)\approx 0.52$，$CI(x_4)\approx 0.68$.

步骤 6　根据 $CI(x_i)$ 值的大小进行方案排序. 排序结果为 $x_2\succ x_4\succ x_3\succ x_1$.

由排序结果可知，最优节点为 x_2，并且该排序结果与文献[11] 的排序结果完全一致，由此表明基于改进距离测度的 TOPSIS 决策方法是可行的.

4　比较分析

为了进一步验证本文方法的可行性，将本文方法与文献[4] 中提出的基于距离测度的 TOPSIS 方法进行比较分析(仍以文献[11] 中例题为例)，具体步骤如下：

步骤 1　规范化表 1 中的数据，结果如表 2 所示.

表 2　规范化后的概率语言决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
x_1	$\{s_3(0.5),s_2(0.5),s_2(0)\}$	$\{s_3(0.5),s_2(0.5),s_2(0)\}$	$\{s_3(0.78),s_2(0.22),s_2(0)\}$	$\{s_2(0.54),s_3(0.23),s_1(0.23)\}$	$\{s_3(1),s_3(0),s_3(0)\}$
x_2	$\{s_2(0.52),s_3(0.26),s_4(0.22)\}$	$\{s_3(0.54),s_4(0.23),s_2(0.23)\}$	$\{s_3(1),s_3(0),s_3(0)\}$	$\{s_4(1),s_4(0),s_4(0)\}$	$\{s_4(0.52),s_3(0.26),s_2(0.22)\}$
x_3	$\{s_2(0.78),s_1(0.22),s_1(0)\}$	$\{s_4(0.52),s_2(0.26),s_1(0.22)\}$	$\{s_3(0.78),s_4(0.22),s_3(0)\}$	$\{s_3(0.78),s_2(0.22),s_2(0)\}$	$\{s_3(1),s_3(0),s_3(0)\}$
x_4	$\{s_4(0.5),s_3(0.5),s_3(0)\}$	$\{s_3(0.78),s_4(0.22),s_3(0)\}$	$\{s_2(1),s_2(0),s_2(0)\}$	$\{s_4(0.52),s_3(0.26),s_2(0.22)\}$	$\{s_4(0.5),s_3(0.5),s_3(0)\}$

步骤 2　确定各个属性的权重. 为了便于比较分析，将各个属性权重的取值与上述步骤 3 中的权重取值保持一致，即仍取：$\omega_1=0.1554$，$\omega_2=0.2001$，$\omega_3=0.1597$，$\omega_4=0.2294$，$\omega_5=0.2554$.

步骤 3　确定 PLTSs 的正、负理想解. 其确定方法为：$x^+=(L_1(p)^+,L_2(p)^+,\cdots,L_n(p)^+)$，

$x^-=(L_1(p)^-,L_2(p)^-,\cdots,L_n(p)^-)$. 其中:$L_j(p)^+=\{(L_j^{(k)})^+ \mid k=1,2,\cdots,\#L_{ij}(p)\}$,$(L_j^{(k)})^+=s_{\max\limits_i\{p_{ij}^{(k)}I(L_{ij}^{(k)})\}}$,$k=1,2,\cdots,\#L_{ij}(p)$,$j=1,2,\cdots,n$;$L_j(p)^-=\{(L_j^{(k)})^- \mid k=1,2,\cdots,\#L_{ij}(p)\}$,$(L_j^{(k)})^-=s_{\min\limits_i\{p_{ij}^{(k)}I(L_{ij}^{(k)})\}}$,$k=1,2,\cdots,\#L_{ij}(p)$,$j=1,2,\cdots,n$. 由上可得PLTSs的正负理想解分别为:

$$x^+=(\{s_2,s_{1.5},s_{0.88}\},\{s_{2.34},s_1,s_{0.46}\},\{s_3,s_{0.88},s_0\},\{s_4,s_{0.78},s_{0.44}\},\{s_3,s_{1.5},s_{0.44}\}),$$

$$x^-=(\{s_{1.04},s_{0.22},s_0\},\{s_{1.5},s_{0.52},s_0\},\{s_2,s_0,s_0\},\{s_{1.08},s_0,s_0\},\{s_2,s_0,s_0\}).$$

步骤4 计算各个备选方案和正、负理想解之间的偏离度. 计算公式为:

$$d(x_i,x^+)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j d(L_{ij}(p),L_j(p)^+)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\sqrt{\frac{1}{\#L_{ij}(p)}\sum_{k=1}^{\#L_{ij}(p)}(p_{ij}^{(k)}I(L_{ij}^{(k)})-(p_j^{(k)}I(L_j^{(k)}))^+)^2}.$$

$$d(x_i,x^-)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j d(L_{ij}(p),L_j(p)^-)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\sqrt{\frac{1}{\#L_{ij}(p)}\sum_{k=1}^{\#L_{ij}(p)}(p_{ij}^{(k)}I(L_{ij}^{(k)})-(p_j^{(k)}I(L_j^{(k)}))^-)^2}.$$

由上式可得:$d(x_1,x^+)=0.88$,$d(x_2,x^+)=0.56$,$d(x_3,x^+)=0.73$,$d(x_4,x^+)=0.66$,$d(x_1,x^-)=0.46$,$d(x_2,x^-)=0.78$,$d(x_3,x^-)=0.65$,$d(x_4,x^-)=0.65$.

步骤5 计算各备选方案的贴近度. 贴近度的计算公式为$CI(x_i)=\dfrac{d(x_i,x^-)}{d_{\max}(x_i,x^-)}-\dfrac{d(x_i,x^+)}{d_{\min}(x_i,x^+)}$. 根据该式进行计算得:$CI(x_1)=-1.91$,$CI(x_2)=1.00$,$CI(x_3)=-0.77$,$CI(x_4)=-0.05$.

步骤6 根据$CI(x_i)$的值对方案进行排序. 排序结果为:$x_2\succ x_4\succ x_3\succ x_1$.

由以上结果可知,利用本文方法得到的最优节点x_2不仅与第3部分中所得的最优节点完全一致,而且与文献[4]中的方法(基于传统距离测度的TOPSIS方法)所获得的结果也完全一致. 该结果说明,本文提出的基于改进距离测度的TOPSIS方法不仅能有效保留原始的概率语言信息,而且还可有效提高排序的准确度;因此,该方法可为解决模糊多属性决策问题的排序方案提供良好参考.

参考文献:

[1] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning: I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[2] RODRIGUEZ R M, MARTINEZ L, HERRERA F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, 20(1): 109-119.

[3] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[4] PANG Q, WANG H, XU Z S. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2016, 369(11): 128-143.

[5] ZHANG Y X, XU Z S, WANG H, et al. Consistency-based risk assessment with probabilistic linguistic preference relation[J]. Applied Soft Computing, 2016, 49: 817-833.

[6] MAO X B, WU M, DONG J Y, et al. A new method for probabilistic linguistic multi-attribute group decision making: Application to the selection of financial technologies[J]. Applied Soft Computing, 2019, 77: 155-175.

[7] 王志平,彭仲文,王慧闯. 基于改进可能度和距离测度的概率语言多属性群决策方法研究[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(11): 10-20.

[8] LIN M W, XU Z S. Probabilistic linguistic distance measures and their applications in multi-criteria group decision making[J]. Soft Computing Applications for Group Decision-making and Consensus Modeling, 2018, 357: 411-440.

[9] SU Z, XU Z S, ZHAO H, et al. Entropy measures for probabilistic hesitant fuzzy information[J]. IEEE Access, 2019, 7: 65714-65727.

[10] FANG B. Probabilistic linguistic decision-making based on the hybrid entropy and cross-entropy measures[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2023, 22(3): 415-445.

[11] 沈玲玲,庞晓冬,张倩,等. 基于概率语言术语集的TODIM方法及其应用[J]. 统计与决策, 2019, 35(18): 80-83.

[12] ZHANG X F, GOU X J, XU Z S, et al. A projection method for multiple attribute group decision making with probabilistic linguistic term sets[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2019, 10(9): 2515-2528.