文章编号: 1004-4353(2023)04-0341-05

(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统解的局部适定性

孟嘉乐
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 在 Lorenz 规范条件下,研究了(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 波动系统.利用 Sobolev 嵌入不等式和压缩映射不动点定理证明了(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统的 Cauchy 问题在 $H^2 \times H^1$ 空间上具有局部适定性.

关键词: Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统; Lorenz 规范条件; Sobolev 嵌入不等式; 局部适定性
中图分类号: O175.29　　　**文献标志码:** A

Local well-posedness of solutions of (1+1)-dimension Maxwell-Chern-Simons-Higgs system

MENG Jiale
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Under the Lorenz gauge condition, the (1+1)-dimensional Maxwell-Chern-Simons-Higgs wave system was studied. And the local well-posedness of the Cauchy problem of the (1+1)-dimensional Maxwell-Chern-Simons-Higgs system in $H^2 \times H^1$ space was proved by Sobolev embedding inequality and the contraction mapping fixed point theorem.

Keywords: Maxwell-Chern-Simons-Higgs system; Lorenz gauge condition; Sobolev embedding inequality; localwell-posedness

0 引言

1990 年,Lee 等[1]研究了同时具有 Maxwell 项和 Chern-Simons 项的(2+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs(MCSH)自对偶模型,该模型的拉格朗日函数为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}A_\rho + D_\mu\phi\overline{D^\mu\phi} + \frac{1}{2}\partial_\mu N\partial^\mu N - \frac{1}{2}(e|\phi|^2 + \kappa N - ev^2)^2 - e^2N^2|\phi|^2. \quad (1)$$

其中: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的(2+1)维闵可夫斯基度量; ϕ 是复函数; N 是实函数; $A = (A_0, A_1, A_2)$ 是实规范场,满足 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu$; e 是电子的电荷; κ 是 Chern-Simons 常数($\kappa > 0$).在该系统中,用希腊符号表示 0,1,2,用拉丁符号表示 1,2.对系统(1) 进行变分可分别得到 (A, ϕ, N) 对应的欧拉-拉格朗日方程,为:

收稿日期: 2023 - 05 - 23
作者简介: 孟嘉乐(1999—),男,硕士研究生,研究方向为偏微分方程理论及其应用.

$$\begin{cases}\partial_\lambda F^{\lambda\rho}+\dfrac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}+2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D^\rho\phi})=0,\\ D_\mu D^\mu\phi+U_\phi(|\phi|^2,N)=0,\\ \partial_\mu\partial^\mu N+U_N=0,\end{cases}$$

其中:$U(|\phi|^2,N)=\dfrac{1}{2}(e|\phi|^2+\kappa N-ev^2)^2+e^2N^2|\phi|^2$. 2002年,Chae等[2]在洛伦兹规范条件下证明了(1+2)维MCSH系统在$H^2\times H^1$空间上存在整体适定解.2021年和2019年,Jin等[3]和Huh等[4]通过降维方法研究了(1+1)维Maxwell-Chern-Simons-O(3)-sigma系统解的整体适定性.基于上述研究,本文将(1+2)维MCSH系统降维到了(1+1)维MCSH系统,并研究了该系统解的局部适定性.

1 系统性质分析

假设系统(1)与变量x_2无关,并将变量A_2重新定义为B,由此得到的(1+1)维MCSH模型的拉格朗日函数为:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(|F_{01}|^2+|\partial_0B|^2-|\partial_1B|^2)-\kappa F_{01}B+|D_0\phi|^2-|D_1\phi|^2-e^2B^2|\phi|^2+\frac{1}{2}(|\partial_0N|^2-|\partial_1N|^2)-\frac{1}{2}(e|\phi|^2+\kappa N-ev^2)^2-e^2N^2|\phi|^2.$$

其中:$g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1)$.同理,对(1+1)维MCSH系统进行变分可分别得到(ϕ,N,A,B)对应的欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{cases}D_\mu D^\mu\phi+V_{\bar\phi}(|\phi|^2,N,B)=0,\\ \partial_\mu\partial^\mu N=-V_N(|\phi|^2,N,B),\\ \partial_1\partial_0A_1-\partial_1\partial_1A_0=-\kappa\partial_1B-2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_0\phi}),\\ \partial_0\partial_0A_1-\partial_0\partial_1A_0=-\kappa\partial_0B-2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_1\phi}),\\ \partial_0\partial_0B-\partial_1\partial_1B=\kappa F_{01}-V_B(|\phi|^2,N,B).\end{cases}\tag{2}$$

其中:$V(|\phi|^2,N,B)=e^2B^2|\phi|^2+U(|\phi|^2,N)=\dfrac{1}{2}(e|\phi|^2+\kappa N-ev^2)^2+(N^2+B^2)e^2|\phi|^2$,$V_{\bar\phi}$、$V_N$、$V_B$分别是$V(|\phi|^2,V)$对应于$\bar\phi$、$N$、$B$的导数:

$$V_{\bar\phi}(|\phi|^2,N,B)=(e|\phi|^2+\kappa N-ev^2)e\phi+(N^2+B^2)e^2\phi,$$
$$V_N(|\phi|^2,N,B)=\kappa(e|\phi|^2+\kappa N-ev^2)+2e^2N|\phi|^2,$$
$$V_B(|\phi|^2,N,B)=2e^2B|\phi|^2.$$

为了方便对共变导数进行运算,本文首先作以下说明:$D_\mu D_\nu\phi=D_\nu D_\mu\phi-\mathrm{i}eF_{\mu\nu}\phi$,$\partial_\mu(\phi\bar\psi)=\bar\psi D_\mu\phi+\phi\overline{D_\mu\psi}$,$D_\mu(\psi\phi)=\partial_\mu\psi\phi+\psi D_\mu\phi$.因此,参考文献[2]对系统(2)进行计算可得系统(2)在如下变换下具有规范不变性:

$$\phi\to\phi e^{\mathrm{i}\chi},\ A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\chi,\ B\to B,\ N\to N.$$

其中$\chi:\mathbf{R}^{1+1}\to\mathbf{R}$是一个光滑函数.由上式可知,系统(2)的解可由规范等价对(ϕ,N,A_μ,B)组成.对系统(2)进行积分运算可得系统(2)的守恒能量为:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}|F_{01}|^2+|\partial_\mu B|^2+2|D_\mu\phi|^2+|\partial_\mu N|^2+2V(|\phi|^2,N,B)\mathrm{d}x=E(0).$$

由上式可以看出,(ϕ,N,A_μ,B)有两种自然渐进条件可使能量有限,分别为:

$$\begin{cases}\text{非拓扑边界情况:当 }x\to\infty\text{ 时},(\phi,N,A_\mu,B)\to\left(0,\dfrac{ev^2}{\kappa},0,0\right);\\ \text{拓扑边界情况:当 }x\to\infty\text{ 时},(|\phi|^2,N,A_\mu,B)\to(v^2,0,0,0).\end{cases}\tag{3}$$

对于式(3) 的非拓扑边界情况，本文用 $\widetilde{N}$ 来代替系统(2) 中的 $N-\dfrac{ev^2}{\kappa}$，并将 $\widetilde{N}$ 再次记作 N. 由此得当 $|x|\to\infty$ 时，有 $(\phi,N,A_\mu,B)\to(0,0,0,0)$，由此可得：

$$U(|\phi|^2,N)=\frac{1}{2}(e|\phi|^2+\kappa N)^2+e^2(N+\frac{ev^2}{\kappa})^2|\phi|^2,$$

$$V(|\phi|^2,N,B)=\frac{1}{2}(e|\phi|^2+\kappa N)^2+B^2e^2|\phi|^2+(N+\frac{ev^2}{\kappa})^2e^2|\phi|^2.$$

对于式(3) 的拓扑边界情况，本文用 $|\tilde{\phi}|^2$ 来代替系统(2) 中的 $|\phi|^2-v^2$，并将 $|\tilde{\phi}|^2$ 也记作 $|\phi|^2$. 由于该情况解的存在性的证明方法与非拓扑边界情况解的存在性的证明方法相同，所以其证明在此省略.

在洛伦兹规范条件 $\partial_0A_0-\partial_1A_1=0$ 下，(1＋1) 维 MCSH 系统的柯西问题可改写为：

$$\begin{cases}\square\phi=2\mathrm{i}eA_\mu\partial^\mu\phi+e^2A_\mu A^\mu\phi-V_{\bar{\phi}}(|\phi|^2,N,B),\\ \square N=-V_N(|\phi|^2,N,B),\\ \square A_0=-\kappa\partial_1B-2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_0\phi}),\\ \square A_1=-\kappa\partial_0B-2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_1\phi}),\\ \square B=\kappa F_{01}-V_B(|\phi|^2,N,B).\end{cases}\tag{4}$$

其中：$V(|\phi|^2,N,B)=\dfrac{1}{2}(e|\phi|^2+\kappa N)^2+e^2B^2|\phi|^2+(N+\dfrac{ev^2}{\kappa})^2e^2|\phi|^2$.

本文设系统(4) 的初值为 $\phi(0,\cdot)=\varphi_0$，$\partial_t(0,\cdot)=\varphi_1$，$A_\mu(0,\cdot)=a_{0\mu}$，$\partial_tA_\mu(0,\cdot)=a_{1\mu}$，$B(0,\cdot)=b_0$，$\partial_tB(0,\cdot)=b_1$，$N(0,\cdot)=n_0$，$\partial_tN(0,\cdot)=n_1$. 且上述初值满足约束方程：

$$\begin{cases}\partial_0a_{10}-\partial_1a_{01}=0,\\ \partial_1\partial_1a_{00}-\partial_1a_{11}-\kappa\partial_1b_0-2e\,\mathrm{Im}(\varphi_0\bar{\varphi}_1+\mathrm{i}ea_{00}|\varphi_0|^2)=0.\end{cases}\tag{5}$$

2　结果及其证明

定理 1　假设系统(4) 的初值 $\varphi_0\in H^2$，$\varphi_1\in H^1$，$a_{0\mu}\in H^2$，$a_{1\mu}\in H^1$，$b_0\in H^2$，$b_1\in H^1$，$n_0\in H^2$，$n_1\in H^1$，且上述初值满足约束方程(5)，则 MCSH 系统(4) 存在唯一的局部时间解，且满足：

$$\phi\in C([0,T],H^2(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T],H^1(\mathbf{R})),$$
$$A_\mu\in C([0,T],H^2(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T],H^1(\mathbf{R})),$$
$$B\in C([0,T],H^2(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T],H^1(\mathbf{R})),$$
$$N\in C([0,T],H^2(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T],H^1(\mathbf{R})).$$

为证明定理 1，首先作以下说明并给出引理 2. 记 $u=(A,\phi,B,N)$，其中 $A=(A_0,A_1)$；记 $H^s\times H^{s-1}$ 空间的范数为 $\|u(t)\|_{H^s\times H^{s-1}}=\|u(t)\|_{H^s}+\|\partial_0u(t)\|_{H^{s-1}}$；令 $u_0=u(\cdot,0)$ 和 $u_1=\partial_tu(\cdot,0)$. 由上述得到 $\|u_0\|_{H^2\times H^1}=\|u_0\|_{H^2}+\|u_1\|_{H^1}$.

引理 2[5]　令 $(u_0,u_1)\in H^s\times H^{s-1}$，$h\in L^1([0,T],H^{s-1})$，则线性波动方程 $\square u=h(x,t)$，$u(x,0)=u_0(x)$，$\partial_tu(x,0)=u_1(x)$ 存在唯一解，且其满足 $u\in C([0,T];H^s)\cap C([0,T];H^{s-1})$. 即对于 $0\leqslant t\leqslant T$，有如下能量不等式成立：

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|\partial_tu(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}\leqslant C(1+t)\Big(\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^{s-1}}+\int_0^t\|h(\cdot,s)\|_{H^{s-1}}\mathrm{d}s\Big).$$

定理 1 的证明　首先对于任意的 $T>0$，令 $X_T=C([0,T);H^2(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T);H^1(\mathbf{R}))$，且定义 X_T 空间上的范数为 $\|f\|_{X_T}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_{H^2\times H^1}$. 假设存在常数 T 和 Δ_0，使得在闭球 $\mathscr{B}=\{(u,\partial_0u)\in C([0,T];H^2\times H^1):\|u\|_{X_T}\leqslant\Delta_0\}$ 上可构造一个映射 $\mathscr{F}:X_T\to X_T$，同时该映射满足 $(A^{(n+1)},\phi^{(n+1)},B^{(n+1)},N^{(n+1)})=\mathscr{F}(A^{(n)},\phi^{(n)},B^{(n)},N^{(n)})$ 和(1＋1) 维 MCSH 系统(4)：

$$\begin{cases}\Box\phi^{(n+1)}=2\mathrm{ie}A_0^{(n)}\partial_0\phi^{(n)}-2\mathrm{ie}A_1^{(n)}\partial_1\phi^{(n)}+e^2(A_0^{(n)})^2\phi^{(n)}-e^2(A_1^{(n)})^2\phi^{(n)}-\\ \qquad V_{\bar{\phi}^{(n)}}(|\phi^{(n)}|^2,N^{(n)},B^{(n)}),\\ \Box N^{(n+1)}=-V_{N^{(n)}}(|\phi^{(n)}|^2,N^{(n)},B^{(n)}),\\ \Box A_0^{(n+1)}=-\kappa\partial_1B^{(n)}-2e\,\mathrm{Im}(\phi^{(n)}\overline{D_0\phi^{(n)}}),\\ \Box A_1^{(n+1)}=-\kappa\partial_0B^{(n)}-2e\,\mathrm{Im}(\phi^{(n)}\overline{D_1\phi^{(n)}}),\\ \Box B^{(n+1)}=\kappa\partial_0A_1^{(n)}-\kappa\partial_1A_0^{(n)}-V_{B^{(n)}}(|\phi^{(n)}|^2,N^{(n)},B^{(n)}).\end{cases}\tag{6}$$

令$\|u_0^{(n+1)}\|_{H^2\times H^1}=d$,再对式(6)应用引理2可得:

$$\|\phi^{(n+1)}\|_{H^2\times H^1}\lesssim C(1+t)\left(d+\int_0^t\|A^{(n)}\partial\phi^{(n)}\|_{H^1}+\|(A^{(n)})^2\phi^{(n)}\|_{H^1}+\|V_{\bar{\phi}^{(n)}}\|_{H^1}\,\mathrm{d}s\right),$$

$$\|N^{(n+1)}\|_{H^2\times H^1}\lesssim C(1+t)\left(d+\int_0^t\|V_{N^{(n)}}\|_{H^1}\,\mathrm{d}s\right),$$

$$\|A^{(n+1)}\|_{H^2\times H^1}\lesssim C(1+t)\left(d+\int_0^t\|\partial B^{(n)}\|_{H^1}+\|\mathrm{Im}(\phi^{(n)}\overline{D\phi^{(n)}})\|_{H^1}\,\mathrm{d}s\right),$$

$$\|\phi^{(n+1)}\|_{H^2\times H^1}\lesssim C(1+t)\left(d+\int_0^t\|\partial A^{(n)}\|_{H^1}+\|V_{B^{(n)}}\|_{H^1}\,\mathrm{d}s\right).$$

其中:∂表示∂_0或∂_1,D表示D_0或D_1,常数C取值依赖于e.为了控制$\|u^{(n+1)}\|_{H^2\times H^1}$,本文应用Sobolev嵌入不等式$H^1(\mathbf{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R})$对上式积分项进行估计,其中对最高阶项的估计结果为:

$$\|A^{(n)}\partial\phi^{(n)}\|_{H^1}\leqslant\|A^{(n)}\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}+\|\partial_1A^{(n)}\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}+\|A^{(n)}\partial_1\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}\lesssim$$
$$\|A^{(n)}\|_{H^1}\|\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}+\|\partial_1A^{(n)}\|_{H^1}\|\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}+\|A^{(n)}\|_{H^1}\|\partial_1\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}\lesssim\|u^{(n)}\|_{H^2\times H^1}.$$

同理可得:

$$\|\mathrm{Im}(\phi^{(n)}\overline{D\phi^{(n)}})\|_{H^1}\lesssim\|\phi^{(n)}\overline{D\phi^{(n)}}\|_{L^2}+\|\partial_1\phi^{(n)}\overline{D\phi^{(n)}}\|_{L^2}+\|\phi^{(n)}\partial_1\overline{D\phi^{(n)}}\|_{L^2}\lesssim$$
$$\|\phi^{(n)}\partial^{(n)}\phi\|_{L^2}+\||\phi^{(n)}|^2A^{(n)}\|_{L^2}+\|\partial_1\phi^{(n)}\partial^{(n)}\phi\|_{L^2}+\|\partial_1\phi^{(n)}\phi^{(n)}A^{(n)}\|_{L^2}+$$
$$\|\phi^{(n)}\partial_1\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}+\||\phi^{(n)}|^2\partial_1A^{(n)}\|_{L^2}+\|\phi^{(n)}\partial_1\phi^{(n)}A^{(n)}\|_{L^2}\lesssim$$
$$\|\phi^{(n)}\|_{H^1}\|\partial^{(n)}\phi\|_{L^2}+\|\phi^{(n)}\|_{H^1}^2\|A^{(n)}\|_{L^2}+\|\partial_1\phi^{(n)}\|_{H^1}\|\partial^{(n)}\phi\|_{L^2}+$$
$$\|\phi^{(n)}\|_{H^1}\|A^{(n)}\|_{H^1}\|\partial_1\phi^{(n)}\|_{L^2}+\|\phi^{(n)}\|_{H^1}\|\partial_1\partial\phi^{(n)}\|_{L^2}+\|\phi^{(n)}\|_{H^1}^2\|\partial_1A^{(n)}\|_{L^2}+$$
$$\|\phi^{(n)}\|_{H^1}\|A^{(n)}\|_{H^1}\|\partial_1\phi^{(n)}\|_{L^2}\lesssim\|u^{(n)}\|_{H^2\times H^1}.$$

对其他项应用同样的估计方法并合并最终可得:

$$\|u^{(n+1)}(t)\|_{H^2\times H^1}\leqslant C(1+t)\left(d+\int_0^t\|u^{(n)}(s)\|_{H^2\times H^1}\,\mathrm{d}s\right).\tag{7}$$

利用$\|u^{(n)}\|_{X_T}\leqslant\Delta_0$对上式进行估计得$\|u^{(n+1)}(t)\|_{H^2\times H^1}\leqslant C(1+t)(d+\Delta_0t)$,其中$0\leqslant t\leqslant T$.令$d=\dfrac{T}{1+T}\Delta_0$,$T<\sqrt{\dfrac{1+C}{C}}-1$,由此可得$\|u^{(n+1)}\|_{X_T}\leqslant\Delta_0$.又由式(7)可知当$0\leqslant t\leqslant T$时,映射$\mathscr{F}:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$满足下式:

$$\|(\mathscr{F}(u^{(n)})-\mathscr{F}(v^{(n)}))(t)\|_{H^2\times H^1}\leqslant C(1+t)\left(\int_0^t\|(u^{(n)}-v^{(n)})(s)\|_{H^2\times H^1}\,\mathrm{d}s\right).$$

其中:$0\leqslant t\leqslant T$.令T足够小且可使$C(1+T)T\leqslant\dfrac{1}{2}$,于是由上式可得:

$$\|\mathscr{F}(u^{(n)})-\mathscr{F}(v^{(n)})\|_{X^T}\leqslant\frac{1}{2}\|u^{(n)}-v^{(n)}\|_{X^T}.$$

由上式可知$\mathscr{F}$为$\mathscr{B}\to\mathscr{B}$上的压缩映射.由此再通过不动点定理即可得系统(4)存在唯一的解$u\in C([0,T];H^2(\mathbf{R}))\cap C^1([0,T];H^1(\mathbf{R}))$.

(下转第371页)

51(4)：151-159.
[8]　张占梅，黄大俊，石瑞琦，等. 重庆主城区河流底泥中重金属污染现状及生态风险分析[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版)，2020，39(11)：122-127.
[9]　韩继博，张晟瑀，周昊，等. 中国北方某湖泊底泥污染分析及重金属潜在生态风险评价[J]. 世界地质，2022，41(1)：227-235.
[10]　MULLER G. Index of geoaccumulationin sediments of the Rhine River[J]. Geo Journal，1969，2(3)：108-118.
[11]　成杭新，李括，李敏，等. 中国城市土壤化学元素的背景值与基准值[J]. 地学前缘，2014，21(3)：265-306.
[12]　陈静生，周家义. 中国水环境重金属研究[M]. 北京：中国环境科学出版社，1992：168-170.
[13]　国家环境保护局，中国环境监测总站. 中国土壤元素背景值[M]. 北京：中国环境科学出版社，1990.
[14]　MA X L，ZUO H，TIAN M J，et al. Assessment of heavy metals contamination in sediments from three adjacent regions of the Yellow River using metal chemical fractions and multivariate analysis techniques[J]. Chemosphere，2016，144：264-272.
[15]　孙映宏. 基于 Muller 地质累积指数法的杭州城区河道底泥重金属污染评价[J]. 浙江水利水电专科学校学报，2013，25(1)：1-3.
[16]　孟敏，杨林生，韦炳干，等. 我国设施农田土壤重金属污染评价与空间分布特征[J]. 生态与农村环境学报，2018，34(11)：1019-1026.

(上接第 344 页)

下证解的稳定性. 假设 u 和 v 分别为 MCSH 系统(4) 对应于初值 u_0 和 v_0 的解，若 $\|u_0\|_{H^2\times H^1}$，$\|v_0\|_{H^2\times H^1} \leqslant d$，则由式(7) 可得：

$$\|\mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(v)\|_{X_T} = \|u - v\|_{X_T} \leqslant C(1+t)(\|u_0 - v_0\|_{H^2\times H^1} + T\|u - v\|_{X_T}).$$

同样，令 T 足够小且可使 $C(1+T)T \leqslant \dfrac{1}{2}$，由此可得 $\|u - v\|_{X_T} \leqslant C\|u_0 - v_0\|_{X_T}$.

最后证明(1+1) 维 MCSH 系统的解满足约束方程(5). 令 X：$\partial_0 A_0 - \partial_1 A_1$，$Y$：$\partial_1\partial_1 A_0 - \partial_1\partial_0 A_1 - \kappa\partial_1 B - 2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_0\phi})$，则由此再利用式(4) 可分别得：

$$\partial_t X = \partial_0\partial_0 A_0 - \partial_0\partial_1 A_1 = \partial_1\partial_1 A_0 - \kappa\partial_1 B - 2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_0\phi}) - \partial_1\partial_0 A_1 = Y,$$

$$\begin{aligned}\Delta X &= \partial_0\partial_1\partial_1 A_0 - \partial_1\partial_1\partial_1 A_1 = \partial_0\partial_1\partial_1 A_0 - \partial_1[\partial_0\partial_0 A_1 + \kappa\partial_0 B + 2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_1\phi})] = \\ &\quad \partial_t[\partial_1\partial_1 A_0 - \partial_1\partial_0 A_1 - \kappa\partial_1 B] - 2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_1 D_1\phi}) = \\ &\quad \partial_t[\partial_1\partial_1 A_0 - \partial_1\partial_0 A_1 - \kappa\partial_1 B - 2e\,\mathrm{Im}(\phi\overline{D_0\phi})] = \partial_t Y.\end{aligned}$$

由上式可得 $\square X = 0$ 为齐次线性波动方程，因此 $X \in H^2 \times H^1$ 且唯一. 再由文献[6] 可知，对于任意的 $u(t) \in H^3 \times H^2$ 始终有 $X \in H^2 \times H^1$，因此有 $X = 0$，$Y = 0$，即 $u(t)$ 满足约束方程. 定理 1 证毕.

参考文献：

[1]　LEE C，LEE K，MIN H. Self-dual Maxwell-Chern-Simons solitons[J]. Phys Lett B，1990，252：79-83.
[2]　CHAE D，CHAE M. The global existence in the Cauchy problem of the Maxwell-Chern-Simons-Higgs system[J]. J Math Phys，2002，43：5470-5482.
[3]　JIN G H，MOON B. Local and global solutions to the O(3)-sigma model with the Maxwell and the Chern-Simons gauges in $\mathbf{R}^{1+1}$[J]. J Math Anal Appl，2021，495：124715.
[4]　HUH H，JIN G H. Remarks on Chern-Simons gauged O(3) sigma model in one space dimension[J]. J Math Phys，2019，60：021508.
[5]　SOGGE C D. Lectures on Nonlinear Wave Equations[M]. Boston MA：International Press，1995：11-23.
[6]　MONCRIEF V. Global existence of Maxwell-Klein-Gordon fields in (2+1)-dimensional space-time[J]. J Math Phys，1980，21(8)：2291-2296.