

文章编号: 1004-4353(2023)04-0333-08

# 考虑媒体影响的一类时滞传染病模型的分岔周期解

张子振<sup>1</sup>, 张怡雪<sup>1</sup>, 张伟诗<sup>1</sup>, 宋志强<sup>2</sup>

(1. 安徽财经大学 管理科学与工程学院, 安徽 蚌埠 233030;

2. 呼伦贝尔学院 工学院, 内蒙古 呼伦贝尔 021008)

**摘要:** 为了研究媒体报道和时滞对传染病的影响, 提出了一类考虑媒体影响的时滞传染病模型. 首先, 以媒体对疾病进行宣传报道的滞后时间为分岔参数, 利用特征值法讨论了模型的局部渐近稳定性和 Hopf 分岔的存在性. 其次, 利用中心流形法研究了模型分岔周期解的稳定性. 最后, 通过数值模拟验证了所得结果的正确性.

**关键词:** 媒体影响; 时滞; 传染病模型; 局部渐近稳定性; Hopf 分岔; 周期解

中图分类号: O175.12

文献标志码: A

## The bifurcating periodic solutions of a delayed epidemic model considering media influence

ZHANG Zizhen<sup>1</sup>, ZHANG Yixue<sup>1</sup>, ZHANG Weishi<sup>1</sup>, SONG Zhiqiang<sup>2</sup>

(1. School of Management Science and Engineering, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China; 2. College of Engineering, Hulunbuir University, Hulunbuir 021008, China)

**Abstract:** In order to explore the impact of media coverage and time delay on infectious diseases, a delayed epidemic model considering influence of media was proposed. Firstly, the local asymptotic stability and the exhibition of Hopf bifurcation were discussed by using the eigenvalue method and regarding the time delay of the media coverage of infectious disease as bifurcation parameter. Secondly, the stability of the bifurcating periodic solutions were studied with the aid of the central manifold method. Finally, the correctness of the obtained results were verified by computer numerical simulations.

**Keywords:** media influence; delay; epidemic model; local asymptotic stability; Hopf bifurcation; periodic solution

## 0 引言

传染病是严重威胁人类健康和生命的一类疾病. 研究显示, 在传染病暴发期间, 网络、电视等媒体对疾病的暴发情况进行客观准确的宣传报道, 可以使公众准确了解疾病的传播情况和提高对传染病的防范意识, 从而有助于控制疾病的传播<sup>[1-2]</sup>; 因此, 近年来考虑媒体影响的传染病模型受到学者们的关注. 例如: 李录苹等<sup>[3]</sup>提出了一类考虑媒体报道效应的 SEIQR 传染病模型, 并通过构造合适的李雅普诺夫

收稿日期: 2023-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(12061033)

第一作者: 张子振(1982—), 男, 博士, 教授, 研究方向为动力系统的稳定性.

通信作者: 宋志强(1967—), 男, 硕士, 教授, 研究方向为系统动力学.

函数研究了无疾病平衡点的全局渐近稳定性. 张雪妮等<sup>[4]</sup>研究了一类受媒体报道影响的离散传染病模型, 并分析了无疾病平衡点和有疾病平衡点的稳定性. 张钰倩等<sup>[5]</sup>和阳丽君等<sup>[6]</sup>考虑到媒体宣传的滞后性, 分别研究了不同类型的时滞传染病模型, 并针对其模型推导出了模型产生 Hopf 分岔的充分条件; 但是, 张钰倩等和阳丽君等并未对其模型的 Hopf 分岔的性质进行研究. 刘中凯等<sup>[7]</sup>建立了一类同时考虑媒体影响和疫苗接种影响的传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_n(t)}{dt} = A - \lambda S_n(t)M(t) - \beta_0 S_n(t)I(t) + \lambda_0 S_a(t) + rpI(t) + \omega fV(t) - dS_n(t), \\ \frac{dS_a(t)}{dt} = \lambda S_n(t)M(t) - \beta_1 S_a(t)I(t) - \lambda_0 S_a(t) + rqI(t) - \theta S_a(t) + \omega \delta V(t) - dS_a(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta_0 S_n(t)I(t) + \beta_1 S_a(t)I(t) - rI(t) - aI(t) - dI(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \theta S_a(t) - \omega V(t) - dV(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} = \mu I(t) - \mu_0 M(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $S_n(t)$ 、 $S_a(t)$ 、 $I(t)$  和  $V(t)$  分别表示无意识易感者、有意识易感者、感染者和接种者在时刻  $t$  的数量,  $M(t)$  表示媒体在时刻  $t$  的报道信息量;  $A$  为无意识易感者的常数输入率;  $\lambda$  为无意识易感者向有意识易感者转化的比率;  $\beta_0$  为无意识易感者的感染率;  $\lambda_0$  为有意识易感者向无意识易感者转化的比率;  $r$  为感染者的恢复率;  $p$  和  $q$  分别为感染者恢复后转化为无意识易感者的比率和感染者恢复后转化为有意识易感者的比率,  $p + q = 1$ ;  $\omega$  为接种者失去免疫力的比率;  $f$  和  $\delta$  分别为接种者失去免疫力后转化为无意识易感者的比率和接种者失去免疫力后转化为有意识易感者的比率,  $f + \delta = 1$ ;  $\theta$  为有意识易感者的接种率;  $a$  为感染者因疾病导致的死亡率;  $d$  为所有群体的自然死亡率;  $\mu$  为媒体对疾病进行宣传的力度;  $\mu_0$  为媒体在宣传过程中的信息耗散率. 在文献<sup>[7]</sup>中, 刘中凯等研究了模型(1)的稳定性, 并通过数值模拟分析了公众意识和疫苗接种率对疾病传播的影响, 但其研究未考虑媒体宣传的滞后性. 基于上述研究, 本文研究如下时滞传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_n(t)}{dt} = A - \lambda S_n(t)M(t) - \beta_0 S_n(t)I(t) + \lambda_0 S_a(t) + rpI(t) + \omega fV(t) - dS_n(t), \\ \frac{dS_a(t)}{dt} = \lambda S_n(t)M(t) - \beta_1 S_a(t)I(t) - \lambda_0 S_a(t) + rqI(t) - \theta S_a(t) + \omega \delta V(t) - dS_a(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta_0 S_n(t)I(t) + \beta_1 S_a(t)I(t) - rI(t) - aI(t) - dI(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \theta S_a(t) - \omega V(t) - dV(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} = \mu I(t - \zeta) - \mu_0 M(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\zeta$  表示媒体对疾病进行宣传报道的滞后时间.

## 1 局部稳定性和 Hopf 分岔的存在性

根据刘中凯等<sup>[7]</sup>的研究, 如果基本再生数  $R_0 = \frac{\beta_0 A}{d(r+d+a)} > 1$  且  $r+d+a > \beta_1 S_{a*}$ , 则模型(2)

存在唯一有疾病平衡点  $D_*(S_{n*}, S_{a*}, I_*, V_*, M_*)$ , 其中  $S_{n*} = \frac{r+d+a-\beta_1 S_{a*}}{\beta_0}$ ,  $S_{a*} = \frac{X_1 I_*}{X_2 I_* + X_3}$ ,

$V_* = \frac{\theta S_{a*}}{\omega + d}$ ,  $M_* = \frac{\mu I_*}{\mu_0}$  ( $X_1 = (\omega + d)[\lambda \mu(r+d+a) + rq\mu_0 \beta_0]$ ,  $X_2 = \mu(\omega + d)(\lambda \beta_1 + \beta_0)$ ,  $X_3 = \mu_0 \beta_0[(\lambda_0 + d + \theta)(\omega + d) - \omega \delta \theta]$ ). 此时  $I_*$  为如下方程(3)的正根:

$$\varphi_2 I_*^2 + \varphi_1 I_* + \varphi_0 = 0. \quad (3)$$

其中:  $\varphi_0 = (1-R_0) \frac{d(r+d+a)}{\beta_0} X_3$ ,  $\varphi_1 = (d+a)X_3 + \frac{d(\omega+d)(\beta_0-\beta_1)+d\theta\beta_0}{\beta_0(\omega+d)} X_1 + (1-R_0) \cdot \frac{d(r+d+a)}{\beta_0} X_2$ ,  $\varphi_2 = (d+a)X_2$ .

模型(2)在有疾病平衡点  $D_*(S_{n*}, S_{a*}, I_*, V_*, M_*)$  处的雅克比矩阵为:

$$J(D_*) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \mu e^{-\lambda\zeta} & 0 & k_{55} \end{pmatrix}.$$

其中:  $k_{11} = -\lambda M_* - \beta_0 I_* - d$ ,  $k_{12} = \lambda_0$ ,  $k_{13} = -\beta_0 S_{n*} + rp$ ,  $k_{14} = \omega f$ ,  $k_{15} = -\lambda S_{n*}$ ,  $k_{21} = \lambda M_*$ ,  $k_{22} = -\lambda_0 - \beta_1 I_* - \theta - d$ ,  $k_{23} = -\beta_1 S_{a*} + rp$ ,  $k_{24} = \omega \delta$ ,  $k_{25} = \lambda S_{n*}$ ,  $k_{31} = \beta_0 I_*$ ,  $k_{32} = \beta_1 I_*$ ,  $k_{33} = \beta_0 S_{n*} + \beta_1 S_{a*} - r - a - d$ ,  $k_{42} = \theta$ ,  $k_{44} = -\omega - d$ ,  $k_{55} = -\mu_0$ .

模型(2)在有疾病平衡点处  $D_*(S_{n*}, S_{a*}, I_*, V_*, M_*)$  的特征方程为:

$$\rho^5 + \Theta_4 \rho^4 + \Theta_3 \rho^3 + \Theta_2 \rho^2 + \Theta_1 \rho + \Theta_0 + (\Xi_2 \rho^2 + \Xi_1 \rho + \Xi_0) e^{-\rho\zeta} = 0. \quad (4)$$

其中:

$$\Xi_0 = -\mu [(k_{15}(k_{22}k_{31}k_{44} - k_{24}k_{31}k_{42} - k_{21}k_{32}k_{44}) + k_{25}(k_{11}k_{32}k_{44} - k_{12}k_{31}k_{44} + k_{14}k_{31}k_{42}))],$$

$$\Xi_1 = -\mu (k_{15}k_{21}k_{32} - k_{15}k_{22}k_{31} - k_{15}k_{31}k_{44} - k_{25}k_{32}k_{44} - k_{11}k_{25}k_{32} + k_{12}k_{25}k_{31}),$$

$$\Xi_2 = -\mu (k_{15}k_{31} + k_{25}k_{32}),$$

$$\Theta_0 = k_{44}k_{55}(k_{11}k_{23}k_{32} + k_{12}k_{21}k_{33} + k_{13}k_{22}k_{31} - k_{11}k_{22}k_{33} - k_{13}k_{21}k_{32} - k_{12}k_{23}k_{31}) + k_{42}k_{55}(k_{11}k_{24}k_{33} + k_{14}k_{23}k_{31} - k_{14}k_{21}k_{33} - k_{13}k_{24}k_{31}),$$

$$\Theta_1 = k_{44}(k_{11}k_{22}k_{33} + k_{13}k_{21}k_{32} + k_{12}k_{23}k_{31} - k_{11}k_{23}k_{32} - k_{12}k_{21}k_{33} - k_{13}k_{22}k_{31}) -$$

$$k_{55}[k_{11}k_{23}k_{32} + k_{12}k_{21}k_{33} + k_{13}k_{22}k_{31} - k_{11}k_{22}k_{33} - k_{13}k_{21}k_{32} - k_{12}k_{23}k_{31} -$$

$$k_{44}(k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} - k_{23}k_{32} - k_{12}k_{21} - k_{13}k_{31})] -$$

$$k_{42}[k_{11}k_{24}k_{33} - k_{14}k_{21}k_{33} - k_{13}k_{24}k_{31} + k_{14}k_{23}k_{31} - k_{55}(k_{14}k_{21} - k_{11}k_{24} - k_{33}k_{24})],$$

$$\Theta_2 = k_{11}k_{23}k_{32} + k_{12}k_{21}k_{33} + k_{13}k_{22}k_{31} - k_{11}k_{22}k_{33} - k_{13}k_{21}k_{32} - k_{12}k_{23}k_{31} +$$

$$k_{44}(k_{12}k_{21} + k_{13}k_{31} + k_{23}k_{32} - k_{11}k_{22} - k_{11}k_{33} - k_{22}k_{33}) - k_{55}[k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} -$$

$$k_{23}k_{32} - k_{12}k_{21} - k_{13}k_{31} + k_{44}(k_{11} + k_{22} + k_{33})] - k_{14}k_{21}k_{42} + k_{24}k_{42}(k_{11} + k_{33} + k_{55}),$$

$$\Theta_3 = k_{11}(k_{22} + k_{33}) + k_{44}(k_{11} + k_{22} + k_{33}) + k_{55}(k_{11} + k_{22} + k_{33} + k_{44}) + k_{22}k_{33} -$$

$$k_{12}k_{21} - k_{13}k_{31} - k_{23}k_{32} - k_{24}k_{42},$$

$$\Theta_4 = -(k_{11} + k_{22} + k_{33} + k_{44} + k_{55}).$$

由上述特征方程可知,当  $\zeta = 0$  时,方程(4)变为:

$$\rho^5 + \Delta_4 \rho^4 + \Delta_3 \rho^3 + \Delta_2 \rho^2 + \Delta_1 \rho + \Delta_0 = 0. \quad (5)$$

其中:  $\Delta_0 = \Theta_0 + \Xi_0$ ,  $\Delta_1 = \Theta_1 + \Xi_1$ ,  $\Delta_2 = \Theta_2 + \Xi_2$ ,  $\Delta_3 = \Theta_3$ ,  $\Delta_4 = \Theta_4$ . 根据 Rough-Hurwitz 定理可知,如果有  $\Delta_4 > 0$ ,  $\Delta_3 \Delta_4 > \Delta_2$ ,  $\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 + \Delta_0 \Delta_4 > \Delta_1 \Delta_4^2 + \Delta_2^2$ ,  $2\Delta_0 \Delta_1 \Delta_4 + \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 + \Delta_0 \Delta_2 \Delta_3 > \Delta_1 \Delta_4^2 + \Delta_1 \Delta_2^2 + \Delta_0 \Delta_3^2 \Delta_4 + \Delta_0^2$ , 则方程(5)的根均有负实部,且此时模型(2)是局部渐近稳定的. 当  $\zeta > 0$  时,令  $\rho = i\chi$  ( $\chi > 0$ ) 为方程(4)的根,则有:

$$\begin{cases} \Xi_1 \chi \sin(\zeta \chi) + (\Xi_0 - \Xi_2 \chi^2) \cos(\zeta \chi) = \Theta_2 \chi^2 - \Theta_4 \chi^4 - \Theta_0, \\ \Xi_1 \chi \cos(\zeta \chi) + (\Xi_2 \chi^2 - \Xi_0) \sin(\zeta \chi) = \Theta_3 \chi^3 - \chi^5 - \Theta_1 \chi. \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可得:

$$\chi^{10} + \alpha_4 \chi^8 + \alpha_3 \chi^6 + \alpha_2 \chi^4 + \alpha_1 \chi^2 + \alpha_0 = 0. \quad (7)$$

其中:  $\alpha_0 = \Theta_0^2 - \Xi_0^2$ ,  $\alpha_1 = \Theta_1^2 - 2\Theta_0\Theta_2 - \Xi_1^2 + 2\Xi_0\Xi_2$ ,  $\alpha_2 = \Theta_2^2 + 2\Theta_0\Theta_4 - 2\Theta_1\Theta_3 - \Xi_2^2$ ,  $\alpha_3 = \Theta_3^2 - 2\Theta_2\Theta_4 + 2\Theta_1\alpha_4 = \Theta_4^2 - 2\Theta_3$ . 令  $\chi^2 = \epsilon$ , 则方程(7) 变为:

$$\epsilon^5 + \alpha_4\epsilon^4 + \alpha_3\epsilon^3 + \alpha_2\epsilon^2 + \alpha_1\epsilon + \alpha_0 = 0. \quad (8)$$

如果给定模型(2) 的系数, 则利用 Matlab 软件可计算得出方程(8) 的根. 因此, 本文假设方程(8) 存在 1 个正实根  $\epsilon_0$ , 使得方程(4) 存在纯虚根  $\pm i\chi_0 = \pm i\sqrt{\epsilon_0}$ . 于是根据方程(6) 可知, 对于  $\chi_0$  有  $\zeta_0 = \frac{1}{\chi_0} \arccos \left[ \frac{U_1(\chi_0)}{U_2(\chi_0)} \right]$ , 其中  $U_1(\chi_0) = (\Xi_2\Theta_4 - \Xi_1)\chi_0^6 + (\Xi_1\Theta_3 - \Xi_0\Theta_4 - \Xi_2\Theta_2)\chi_0^4 + (\Xi_2\Theta_0 + \Xi_0\Theta_2 - \Xi_1\Theta_1)\chi_0^2 - \Xi_0\Theta_0$ ,  $U_2(\chi_0) = \Xi_2^2\chi_0^4 + (\Xi_1^2 - 2\Xi_0\Xi_2)\chi_0^2 + \Xi_0^2$ . 由此再根据方程(4) 可得:

$$\left[ \frac{d\rho}{d\zeta} \right]^{-1} = \frac{5\rho^4 + 4\Theta_4\rho^3 + 3\Theta_3\rho^2 + 2\Theta_2\rho + \Theta_1}{\rho(\Xi_2\rho^2 + \Xi_1\rho + \Xi_0)e^{-\rho\zeta}} + \frac{2\Xi_2\rho + \Xi_1}{\rho(\Xi_2\rho^2 + \Xi_1\rho + \Xi_0)} - \frac{\zeta}{\rho},$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{d\rho}{d\zeta} \right]_{\zeta=\zeta_0}^{-1} = \frac{H'(\epsilon_0)}{\Xi_2^2\chi_0^4 + (\Xi_1^2 - 2\Xi_0\Xi_2)\chi_0^2 + \Xi_0^2}.$$

其中:  $H(\epsilon) = \epsilon^5 + \alpha_4\epsilon^4 + \alpha_3\epsilon^3 + \alpha_2\epsilon^2 + \alpha_1\epsilon + \alpha_0$ , 且  $\epsilon_0 = \chi_0^2$ . 所以, 如果  $H'(\epsilon_0) \neq 0$ , 则  $\operatorname{Re} \left[ \frac{d\rho}{d\zeta} \right]_{\zeta=\zeta_0}^{-1} \neq 0$ .

故由上述结果和分岔存在性定理可得如下定理 1 成立:

**定理 1** 对于模型(2), 当  $\zeta \in [0, \zeta_0)$  时, 有疾病平衡点  $D_*(S_{n*}, S_{a*}, I_*, V_*, M_*)$  是局部渐近稳定的; 当  $\zeta = \zeta_0$  时, 模型(2) 产生 Hopf 分岔, 并在有疾病平衡点  $D_*(S_{n*}, S_{a*}, I_*, V_*, M_*)$  处产生分岔周期解.

其中,  $\zeta_0 = \frac{1}{\chi_0} \arccos \left[ \frac{U_1(\chi_0)}{U_2(\chi_0)} \right]$ .

## 2 分岔周期解的稳定性

令  $\zeta = \zeta_0 + l$ ,  $l \in \mathbf{R}$ ,  $v_1(t) = S_n(t) - S_{n*}$ ,  $v_2(t) = S_a(t) - S_{a*}$ ,  $v_3(t) = I(t) - I_*$ ,  $v_4(t) = V(t) - V_*$ ,  $v_5(t) = M(t) - M_*$ , 并对  $t$  作变换  $t \rightarrow (t/\zeta)$ , 由此模型(2) 可以转换为:

$$\dot{v}(t) = Y_l v_t + U(l, v_t). \quad (9)$$

其中:

$$Y_l(\phi) = (\zeta_0 + l)K_1\phi(0) + (\zeta_0 + l)K_2\phi(-1),$$

$$U(l, \phi) = (\zeta_0 + l) \begin{pmatrix} -\lambda\phi_1(0)\phi_5(0) - \beta_0\phi_1(0)\phi_3(0) \\ \lambda\phi_1(0)\phi_5(0) - \beta_1\phi_2(0)\phi_3(0) \\ \beta_0\phi_1(0)\phi_3(0) + \beta_1\phi_2(0)\phi_3(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据 Riesz 表示定理可知, 存在  $\eta(s, l)$ , 且当  $s \in [-1, 0]$  时  $Y_l(\phi)$  满足  $Y_l(\phi) = \int_{-1}^0 d\eta(s, l)\phi(s)$ .

为了将方程(9) 转化为便于处理的算子方程形式, 本文选取  $\eta(s, l) = (\zeta_0 + l)(K_1\delta(s) + K_2\delta(s+1))$ .

对于  $\phi \in C([-1, 0], \mathbf{R}^5)$ , 本文定义  $A(l)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(s)}{ds}, & -1 \leq s < 0, \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, l)\phi(s), & s = 0; \end{cases} R(l)\phi = \begin{cases} 0, & -1 \leq s < 0, \\ U(l, \phi), & s = 0. \end{cases}$  于

是模型(9)可以转换为下列算子方程形式:

$$\dot{v}(t) = A(l)v_t + R(l)v_t. \quad (10)$$

$$\text{对于 } \varphi \in C^1([0,1], (\mathbf{R}^5)^*), \text{ 本文定义 } A^*(l)\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi(x)}{dx}, & 0 < x \leq 1, \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(x,0)\varphi(-x), & x = 0. \end{cases} \quad \text{同时定义 } \phi(s) \text{ 和}$$

$\varphi(x)$  的双线性内积为:

$$\langle \phi(s), \varphi(x) \rangle = \bar{\phi}(0)\varphi(0) - \int_{s=-1}^0 \int_{\vartheta=0}^s \bar{\phi}(\vartheta-s) d\eta(s)\varphi(\vartheta) d\vartheta. \quad (11)$$

为了计算模型(2)在  $l=0$  处的中心流形系数,令  $\mathbf{Z}(s) = (1, z_2, z_3, z_4, z_5) e^{i\chi_0 \zeta_0 s}$  为  $A(0)$  对应于特征值  $i\chi_0 \zeta_0$  的特征向量,  $\mathbf{Z}^*(x) = B(1, z_2^*, z_3^*, z_4^*, z_5^*) e^{i\chi_0 \zeta_0 x}$  为  $A^*(0)$  对应于特征值  $-i\chi_0 \zeta_0$  的特征向量,则根据  $A(0)$  和  $A^*(0)$  的定义对  $\mathbf{Z}(s)$  和  $\mathbf{Z}^*(x)$  的分量进行计算可得:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(i\chi_0 - k_{44})(i\chi_0 - k_{55})[(i\chi_0 - k_{11})(i\chi_0 - k_{33}) - k_{13}k_{31}] - \mu k_{15}k_{31}(i\chi_0 - k_{44})}{(i\chi_0 - k_{44})(i\chi_0 - k_{55})[k_{13}k_{32} + k_{12}(i\chi_0 - k_{33})] + k_{14}k_{42}(i\chi_0 - k_{33})(i\chi_0 - k_{55})}, \\ z_3 &= \frac{k_{31} + k_{32}z_2}{i\chi_0 - k_{33}}, z_4 = \frac{k_{42}z_2}{i\chi_0 - k_{44}}, z_5 = \frac{\mu e^{-i\chi_0 \zeta_0} z_3}{i\chi_0 - k_{55}}, \\ z_2^* &= -\frac{i\chi_0 + k_{11} + k_{31}z_3^*}{k_{21}}, z_4^* = -\frac{k_{14} + k_{24}z_2^*}{i\chi_0 + k_{44}}, z_5^* = -\frac{k_{15} + k_{25}z_2^*}{i\chi_0 + k_{55}}, \\ z_3^* &= \frac{k_{21}(i\chi_0 + k_{33})(i\chi_0 + k_{55}) + k_{31}[k_{23}(i\chi_0 + k_{55}) - k_{25}\mu e^{i\chi_0 \zeta_0}]}{(i\chi_0 + k_{11})[k_{23}(i\chi_0 + k_{55}) - k_{25}\mu e^{i\chi_0 \zeta_0}] - k_{21}[k_{15}\mu e^{i\chi_0 \zeta_0} - k_{13}(i\chi_0 + k_{55})]}. \end{aligned}$$

进而,利用方程(11)对  $\bar{B}$  进行计算可得:

$$\bar{B} = (1 + z_2 \bar{z}_2^* + z_3 \bar{z}_3^* + z_4 \bar{z}_4^* + z_5 \bar{z}_5^* + \mu z_3 \bar{z}_5^* e^{-i\chi_0 \zeta_0})^{-1}.$$

根据上述计算,再利用文献[8]中的方法即可求得中心流形系数  $v_{20}, v_{11}, v_{02}$  和  $v_{21}$  的表达式,由此再进一步计算即可得模型(2)在  $\zeta = \zeta_0$  处的分岔周期解的稳定性系数:

$$G_1(0) = \frac{i}{2\chi_0 \zeta_0} \left( v_{11} v_{20} - 2|v_{11}|^2 - \frac{|v_{02}|^2}{3} \right) + \frac{v_{21}}{2}, \quad Q_1 = -\frac{\operatorname{Re}\{G_1(0)\}}{\operatorname{Re}\{\rho'(\zeta_0)\}}, \quad Q_2 = 2\operatorname{Re}\{G_1(0)\}.$$

**定理 2** 当  $Q_1 > 0$  ( $Q_1 < 0$ ) 时,模型(2)在  $\zeta = \zeta_0$  处产生的 Hopf 分岔是超临界(次临界)的;当  $Q_2 > 0$  ( $Q_2 < 0$ ) 时,模型(2)在有疾病平衡点  $D_*(S_{n*}, S_{a*}, I_*, V_*, M_*)$  处产生的分岔周期解是不稳定的(稳定的).

### 3 数值模拟

模拟参数选取  $A=2, \lambda=0.9, \beta_0=0.06, \lambda_0=0.05, r=0.08, p=0.8, q=0.2, \omega=0.15, f=0.8, \delta=0.2, d=0.128, \beta_1=0.03, \theta=0.9, a=0.001, \mu=0.3, \mu_0=0.1$ . 在上述参数下模型(2)变为:

$$\begin{cases} \frac{dS_n(t)}{dt} = 2 - 0.9S_n(t)M(t) - 0.06S_n(t)I(t) + 0.05S_a(t) + 0.064I(t) + \\ \quad 0.12V(t) - 0.128S_n(t), \\ \frac{dS_a(t)}{dt} = 0.9S_n(t)M(t) - 0.03S_a(t)I(t) - 0.05S_a(t) + 0.016I(t) - \\ \quad 0.9S_a(t) + 0.03V(t) - 0.128S_a(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = 0.06S_n(t)I(t) + 0.03S_a(t)I(t) - 0.08I(t) - 0.129I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = 0.9S_a(t) - 0.278V(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} = 0.3I(t - \zeta) - 0.1M(t). \end{cases} \quad (12)$$

对式(12) 进行计算可知,基本再生数  $R_0 = 4.4856 > 1$ ,由此得模型(12) 存在唯一有疾病平衡点  $D_*(1.9368, 3.0930, 0.5878, 10.0133, 1.7634)$ , 且  $\chi_0 = 0.9057$ ,  $\zeta_0 = 13.0471$ . 为了验证模型(12) Hopf 分岔的存在性,本文首先选取  $\zeta = 12.0675 \in [0, \zeta_0)$ . 此时,模型(12) 的状态图和相图分别如图 1 和图 2 所示. 由图 1 和图 2 可以看出,模型(12) 是局部渐近稳定的. 其次,选取  $\zeta = 15.2625 > \zeta_0$ . 此时,模型(12) 的状态图和相图分别如图 3 和图 4 所示. 由图 3 和图 4 可以看出,此时模型(12) 失去稳定性,并在有疾病平衡点  $D_*(1.9368, 3.0930, 0.5878, 10.0133, 1.7634)$  附近产生了 Hopf 分岔.

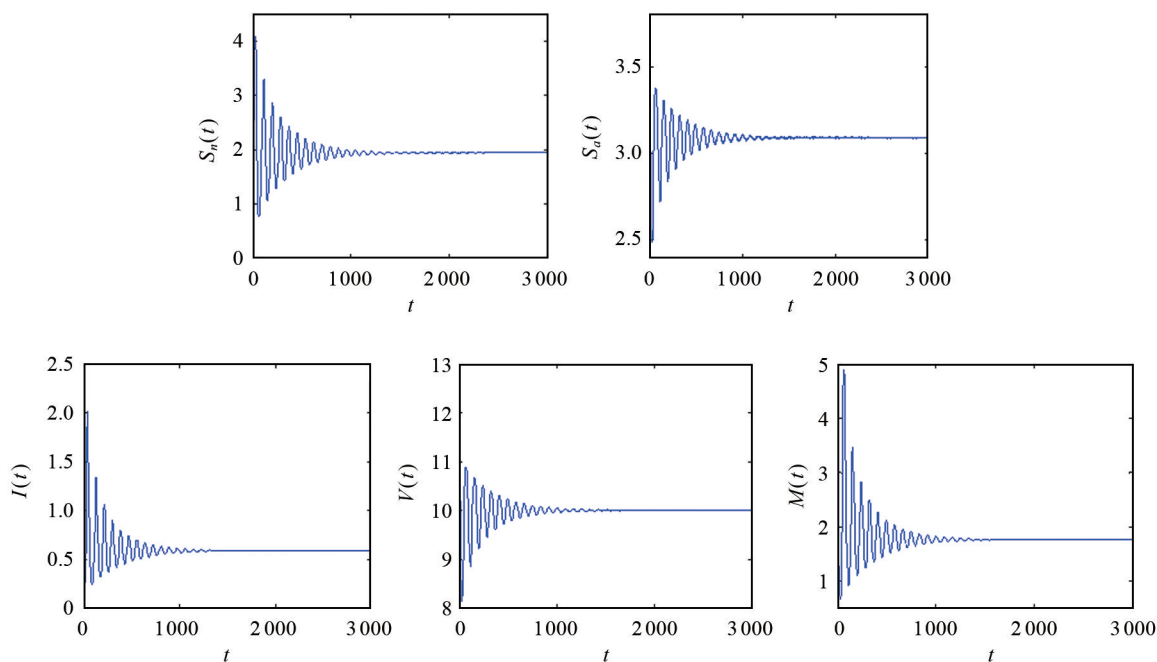


图 1  $\zeta = 12.0675 \in [0, \zeta_0)$  时模型(12) 的状态图

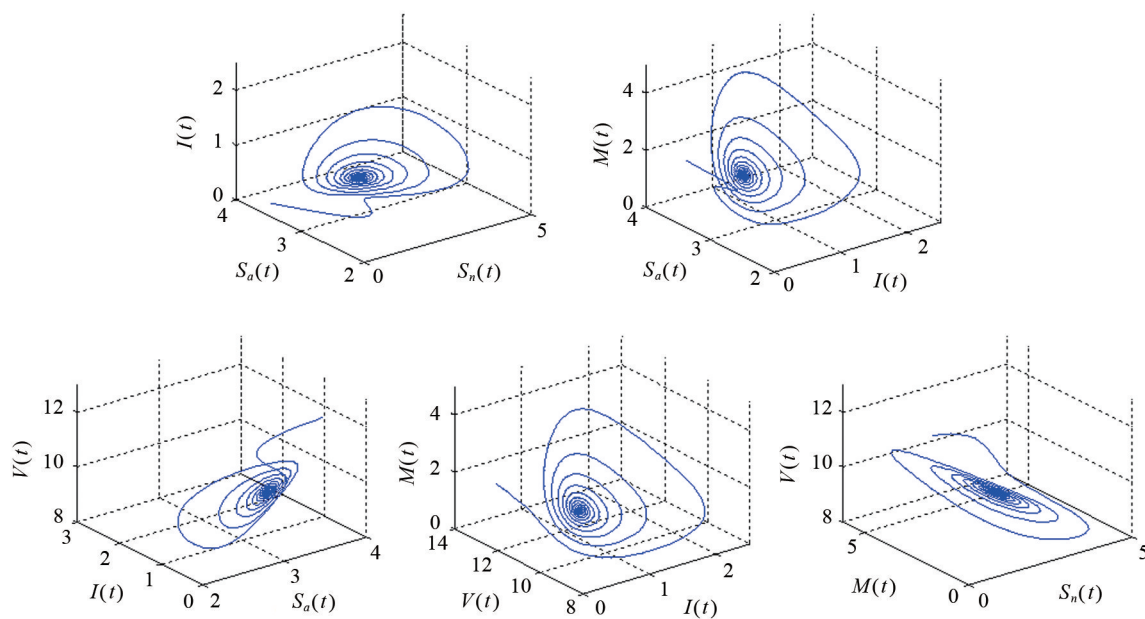
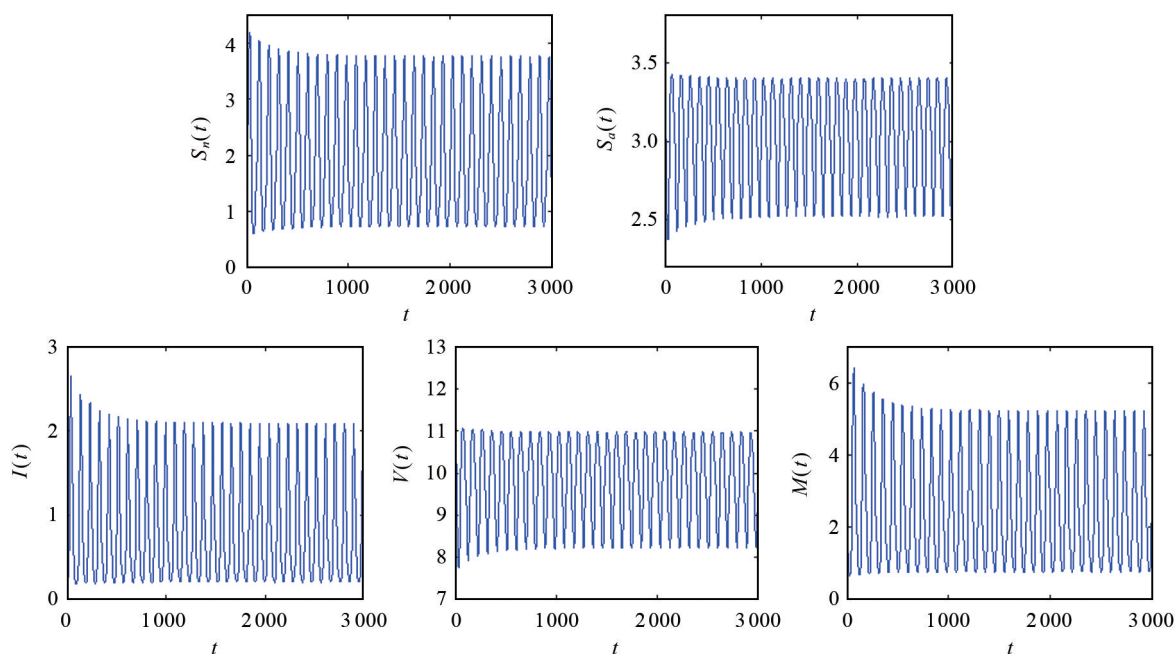
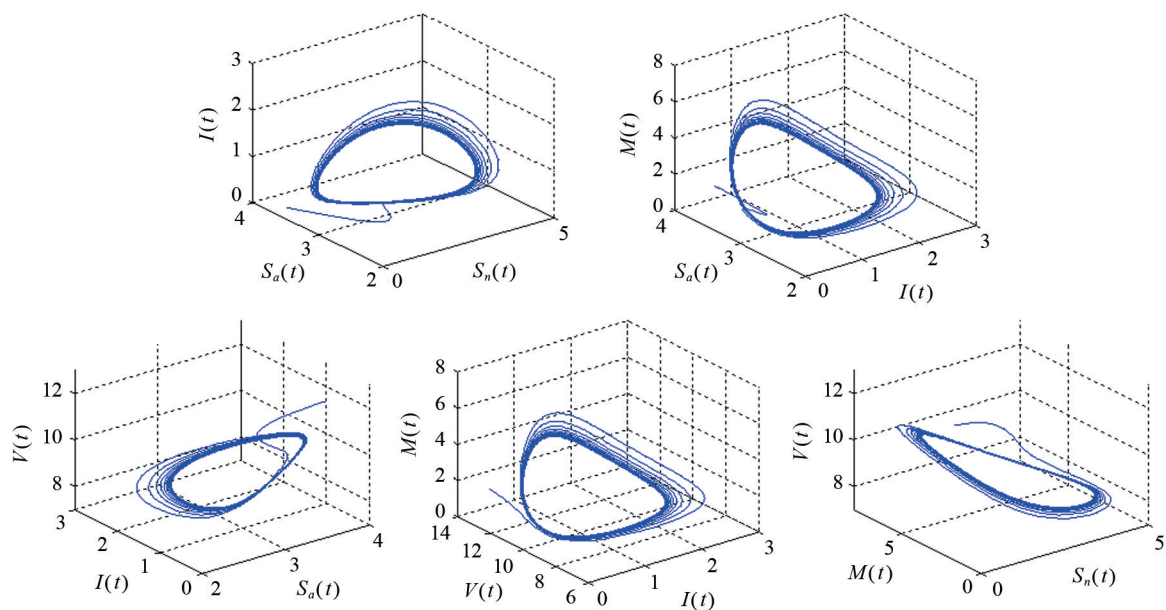


图 2  $\zeta = 12.0675 \in [0, \zeta_0)$  时模型(12) 的相图

图3  $\zeta=15.2625 > \zeta_0$  时模型(12)的状态图图4  $\zeta=15.2625 > \zeta_0$  时模型(12)的相图

#### 4 结论

本文研究表明:当媒体对疾病进行宣传报道的滞后时间足够短时,模型(2)中的无意识易感者、有意识易感者、感染者和接种者的数量将趋于稳定;而当媒体对疾病进行宣传报道的滞后时间超过时滞临界点  $\zeta_0$  时,模型(2)中的无意识易感者、有意识易感者、感染者和接种者的数量将在有疾病平衡点处产生周期震荡.由此表明,媒体对疾病进行宣传报道的滞后时间对模型(2)稳定性具有非常重要的影响.同时也说明,在疾病暴发前,若媒体在客观条件允许的前提下能及时地对疾病进行宣传报道,则有助于控制疾病的传播.本文在研究模型(2)的 Hopf 分岔时,仅研究了其局部 Hopf 分岔行为;因此,在今后的研究中我们将研究模型(2)是否存在全局 Hopf 分岔行为.

## 参考文献:

- [1] 赖祥鑫, 韦煜明, 彭华勤. 一类具有媒体报道影响和饱和发生率的 SIRI 传染病模型[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(3): 20-31.
- [2] LI T J, XIAO Y N. Complex dynamics of an epidemic model with saturated media coverage and recovery[J]. Non-linear Dynamics, 2022, 107(3): 2995-3023.
- [3] 李录苹, 孔丽丽. 考虑媒体报道效应的 SEIQR 传染病模型的研究[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2021, 37(6): 54-56.
- [4] 张雪妮, 刘俊利. 受媒体报道影响的离散传染病模型的分析[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2022, 38(3): 332-338.
- [5] 张钰倩, 张太雷, 侯雯珊, 等. 一类具有媒体效应和追踪隔离的 SIQR 时滞传染病模型[J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, 49(2): 159-169.
- [6] 阳丽君, 班相函, 王文龙. 一类受媒体报道滞后性影响的传染病模型[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2022, 40(4): 420-424.
- [7] 刘中凯, 刘俊利, 刘白茹. 受媒体报道和疫苗接种影响的传染病模型分析[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2022, 38(4): 442-449.
- [8] UPADHYAY R K, KUMARI S. Discrete and data packet delays as determinants of switching stability in wireless sensor networks[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 72(8): 513-536.

~~~~~  
(上接第 309 页)

**证明** 给定  $\varepsilon > 0$ , 并根据群作用  $T$  的 GH-跟踪性选取  $\delta_*$ . 若  $0 < \delta < \delta_*$ , 则令  $S = T$ , 由此可得  $d_{\text{GH}^0}(T, S) = 0 < \delta$ . 因此存在  $\delta$ -等距映射  $j: Y \rightarrow X$ , 使得对于  $S$  的任意  $\delta$ -伪轨  $\{x_g\}_{g \in G}$  存在  $x \in X$ , 使得  $d(T_g(x), j(x_g)) \leq \varepsilon$  对于任意的  $g \in G$  均成立, 故  $T$  具有等距跟踪性. 定理 2 证毕.

根据定理 1 与定理 2 的证明, 可以得到以下几种跟踪性质间的关系:

$T$  具有伪轨跟踪性  
 $\Downarrow$   
 $T$  具有 GH-跟踪性  $\Rightarrow T$  具有弱 GH-跟踪性  
 $\Downarrow$   
 $T$  具有等距跟踪性.

## 参考文献:

- [1] OSIPOV A V, TIKHOMIROV S B. Shadowing for actions of some finitely generated groups[J]. Dynamical Systems, 2014, 29(3): 337-351.
- [2] DONG M H, JUNG W C, LEE K H. Pointwise continuous shadowing and stability in group actions[J]. Journal of the Chungcheong Mathematical Society, 2019, 32(4): 509-524.
- [3] KAWAGUCHI N. Quantitative shadowable points[J]. Dynamical Systems, 2017, 32(4): 504-518.
- [4] OSIPOV A V, TIKHOMIROV S B. Shadowing for actions of some finitely generated groups[J]. Dynamical Systems, 2014, 29(3): 337-351.
- [5] SHIN B. On the set of shadowable measures[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 469(2): 872-881.
- [6] LEE K H, MORALES C A. Topological stability and pseudo-orbit tracing property for expansive measures[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(6): 3467-3487.
- [7] ARBIETO A, ROJAS C A M. Topological stability from Gromov-Hausdorff viewpoint[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2017, 37(7): 3531-3544.
- [8] DONG M H, LEE K H, MORALES C. Gromov-Hausdorff stability for group actions[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2021, 41(3): 1347-1357.
- [9] LEE J H, MORALES C. Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs[M]. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2022: 79-85.