文章编号: 1004-4353(2023)04-0324-09

利用矩阵迹求解两类正交矩阵谱的研究

林志兴[1], 陈梅香[2], 杨忠鹏[1], 杨子斌[3]
(1.福建省金融信息处理重点实验室(莆田学院), 福建 莆田 351100;
2.金融数学福建省高校重点实验室(莆田学院), 福建 莆田 351100; 3.福州大学 数学与统计学院, 福州 350108)

摘要: 应用正交矩阵的特征值与迹的关系,得到了判定平方对称正交矩阵和 4 次方幂对称正交矩阵的充要条件. 基于此,给出了这两类正交矩阵的特征值及其重数的计算公式,并利用该公式计算了已有文献中的相关数值例子. 计算结果表明,该算法可不用通过求解特征多项式来求解特征值,因此该方法比传统方法简单、方便.

关键词: 正交矩阵; 实对称矩阵; 矩阵迹; 谱; 充要条件; 特征值
中图分类号: O151.21 **文献标志码**: A

Study on solving the spectrum for two types of orthogonal matrices by matrix trace

LIN Zhixing[1], CHEN Meixiang[2], YANG Zhongpeng[1], YANG Zibin[3]
(1. *Fujian Key Laboratory of Financial Information Processing* (*Putian University*), *Putian* 351100, *China*;
2. *Key Laboratory of Financial Mathematics of Fujian Province University* (*Putian University*),
Putian 351100, *China*; 3. *School of Mathematics and Statistics*, *Fuzhou University*, *Fuzhou* 350108, *China*)

Abstract: The necessary and sufficient conditions for the judgement of two types of orthogonal matrices with square and quartic be symmetric were obtained by applying the relationship between the eigenvalues and traces of orthogonal matrices. Based on these, the calculation formulas for eigenvalues and multiplicities of these two types of orthogonal matrices were given, and be used to calculate relevant numerical examples of orthogonal matrices in the existing literatures. The results show that the algorithm is simple and convenient, as it avoids solving characteristic polynomials. The calculation results show that the algorithm can solve the eigenvalues without characteristic polynomials, thus the method is simpler and more convenient than the traditional.

Keywords: orthogonal matrix; real symmetric matrix; matrix trace; spectrum; necessary and sufficient condition; eigenvalue

0 引言

设 $\mathbf{C}$、$\mathbf{R}$ 分别为复数域、实数域, $\mathbf{Z}$ 为所有整数的集合. 复数 $\mathrm{i}\in\mathbf{C}$ 满足 $\mathrm{i}^2=-1$. $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}_n$) 为 $n\times n$ 单位矩阵. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$|\boldsymbol{A}|$、$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置、行列式、迹. 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$, 则称 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵. $\boldsymbol{O}^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 正交矩阵集合, $\boldsymbol{SO}^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 对称正交矩阵集合, $\boldsymbol{IO}^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 特征值都为实数或为

收稿日期: 2023-02-11
基金项目: 国家自然科学基金(61772292);福建省自然科学基金(2023J01997,2021J011103);莆田市科学技术局项目(2022SZ3001ptxy05)
第一作者: 林志兴(1973—),男,教授,研究方向为矩阵理论和多元统计.
通信作者: 杨忠鹏(1947—),男,教授,研究方向为矩阵理论.

纯虚数的正交矩阵集合. 称 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的特征多项式 $|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 在 $\mathbf{C}$ 上的 n 个根($\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$) 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且记 $\boldsymbol{A}$ 的谱为 $\sigma(\boldsymbol{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$.

研究显示，在复数域上证明 $n\times n$ 矩阵特征多项式存在 n 个根具有较多困难[1]. 目前，利用 Mathematic 和 Maple 软件虽可计算求出一个中等规模矩阵的特征多项式，但对于 $n\geqslant 5$ 的 $n\times n$ 矩阵仍无良好的求解方法[2]. 为此，许多学者利用不同的方法探讨了该问题，其中有些学者采用迹估计了矩阵特征值的上下界[3-11]. 1961 年，Smith[12] 首次用迹给出了 3×3 实对称矩阵特征值的计算公式；2018 年和 2020 年，文献[13-14]的作者用迹研究了 3×3 正交矩阵的特征值. 1999 年和 2011 年，文献[15-16]的作者研究了 3×3 正交矩阵的迹等式；2020 年，文献[17]的作者在文献[15-16]的基础上研究了更为一般的 $n\times n$ 正交矩阵的迹方程，并且得到了特征值全为实数或为纯虚数的正交矩阵类 $\boldsymbol{IO}^{n\times n}$（由后面的讨论可知，该 $\boldsymbol{IO}^{n\times n}$ 是平方对称的正交矩阵）的所有解的显示表达. 另外，文献[15]和[18]的作者还得到了 $n\times n$ 正交矩阵为对合的充分条件，并用 2 个 4×4 正交矩阵的数值例子（该例子为平方对称和 4 次方幂对称）说明了使用该结论时应注意的问题. 以上研究表明，平方对称和 4 次方幂对称的正交矩阵是较为常见的正交矩阵，因此研究求解这两类正交矩阵的特征值具有重要意义.

为此，本文从平方对称、4 次方幂对称的这两类 $n\times n$ 正交矩阵的特征值与迹的关系入手，应用正交相似矩阵的特征值和迹的不变性得到了判定这两类矩阵为平方对称正交矩阵和 4 次方幂对称正交矩阵的充要条件，并在此基础上给出了相应矩阵的特征值及其重数的计算公式. 将本文计算方法应用到已有文献中的数值例子上显示，该方法比传统方法（通过求解特征多项式来得到特征值）简单、方便.

1　预备知识

引理 1（正交标准形）[19]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$，则对于给定的正交矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$，$\boldsymbol{W}_j=\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{2\times 2}$，$-1<a_j<1$，$a_j^2+b_j^2=1$，$a_j,b_j\in\mathbf{R}$，$j=1,2,\cdots,k$，且使得：

$$\boldsymbol{O}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{E}_t,-\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_k)=\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}},\ t+s+2k=n;\tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}\text{ 当且仅当式(1)中 }k=0.\tag{2}$$

如同式(1)，本文作如下约定：$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$ 的特征值 1 和 -1 的重数分别为 t 和 s；k 为 $\boldsymbol{A}$ 的两两共轭的非实的特征值的对数，且 $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的正交标准形.

引理 2[17]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$，$\sigma(\boldsymbol{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，则对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_j 有：$|\lambda_j|=1$，$\lambda_j\in\sigma(\boldsymbol{A})$，且 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^s$，-1 为 $\boldsymbol{A}$ 的 s 重特征值.

引理 3　设 $\alpha=a+b\sqrt{2}$，$a,b\in\mathbf{Z}$. 若有 $c,d\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=c+d\sqrt{2}$，则 $a=c$，$b=d$.

证明　若 $0\neq a-c=(b-d)\sqrt{2}$，则有 $b-d\neq 0$，所以 $\sqrt{2}=\dfrac{a-c}{b-d}$ 为有理数. 这与 $\sqrt{2}$ 为无理数的事实矛盾，证毕.

引理 4　设 $\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{2\times 2}$，则对于这些正交阵有：

$$\sigma(\boldsymbol{H}_2)=\{\pm\mathrm{i}\},\ \sigma(\boldsymbol{M}_2)=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})\right\},\ \sigma(\boldsymbol{N}_2)=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})\right\};\tag{3}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_2=0,\ \operatorname{tr}\boldsymbol{M}_2=\sqrt{2},\ \operatorname{tr}\boldsymbol{N}_2=-\sqrt{2};\tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}_2^2=-\boldsymbol{E}_2\in\boldsymbol{SO}^{2\times 2},\ \boldsymbol{M}_2^2=\boldsymbol{N}_2^2=\boldsymbol{H}_2,\ \boldsymbol{M}_2^4=\boldsymbol{N}_2^4=-\boldsymbol{E}_2\in\boldsymbol{SO}^{2\times 2}.\tag{5}$$

证明　计算 $\boldsymbol{H}_2$、$\boldsymbol{M}_2$、$\boldsymbol{N}_2$ 的特征多项式即可得到式(3)和式(4)，再计算 $\boldsymbol{H}_2$、$\boldsymbol{M}_2$、$\boldsymbol{N}_2$ 的平方或 4 次方幂即可得式(5)成立. 证毕.

引理5 设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$,实数$a$和$b$满足$-1<a<1$,$a^2+b^2=1$,则有$a\pm b\,\mathrm{i}\in\sigma(\boldsymbol{A})$当且仅当有$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{2\times 2}$或$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$是式(1)所示的$\boldsymbol{A}$的正交标准形$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$的子块.

证明 ① 充分性.当$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{2\times 2}$或$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$是式(1)所示的$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$的子块时,由$\sigma(\boldsymbol{W})=\sigma(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})=\{a\pm b\,\mathrm{i}\}$和$\sigma(\boldsymbol{A})=\sigma(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}})$即可知$a\pm b\,\mathrm{i}\in\sigma(\boldsymbol{A})$.充分性得证.

② 必要性.若$a\pm b\,\mathrm{i}\in\sigma(\boldsymbol{A})$,则由$\sigma(\boldsymbol{A})=\sigma(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}})$和式(1)可知,必有$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$的子块$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{2\times 2}$使$\sigma(\boldsymbol{L})=\{a\pm b\,\mathrm{i}\}$.于是由$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=2x=2a$可得,$x=a$,$|\boldsymbol{L}|=a^2+y^2=a^2+b^2=1$.由此进一步可得$y=b$或$y=-b$,因此$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$或$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.必要性得证.

由引理5可直接得如下引理6.

引理6 设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$,则对于$\boldsymbol{A}$的谱来说,$\pm\mathrm{i}\in\sigma(\boldsymbol{A})$(或$\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})\in\sigma(\boldsymbol{A})$,或$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})\in\sigma(\boldsymbol{A})$)当且仅当$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$(或$\boldsymbol{M}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,或$\boldsymbol{N}_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$)是式(1)所示的$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$的子块.

2 特征值为实数或纯虚数时正交矩阵的谱和迹

定理1 设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$,则$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{IO}^{n\times n}$当且仅当$\boldsymbol{A}^2\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$.

证明 当$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{IO}^{n\times n}$时,由引理6知式(1)中的每个$\boldsymbol{W}_j$都为$\boldsymbol{W}_j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}_2$.于是由引理4的式(5)可得:

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_t,-\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_k)^2\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_{t+s},-\boldsymbol{E}_{2k})\boldsymbol{Q}^{-1}\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}.\tag{6}$$

当$\boldsymbol{A}^2\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$时,若$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则由式(2)知$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{IO}^{n\times n}$;若$\boldsymbol{A}\notin\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则由$|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2=1$和引理2知$-1$为$\boldsymbol{A}^2$的偶数重特征值.于是由式(1)和式(6)可得:

$$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}^2}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{E}_s,-\boldsymbol{E}_2,\cdots,-\boldsymbol{E}_2)=(\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}})^2=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_t,(-\boldsymbol{E}_s)^2,\boldsymbol{W}_1^2,\cdots,\boldsymbol{W}_k^2),$$

$$\boldsymbol{W}_j^2=\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ -b_j & a_j\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a_j^2-b_j^2 & 2a_jb_j\\ -2a_jb_j & a_j^2-b_j^2\end{pmatrix}=-\boldsymbol{E}_2,\ 1\leqslant j\leqslant k.\tag{7}$$

再由$b_j\neq 0$和式(7)中的$2a_jb_j=0$可知,$a_j=0$.由此可得$b_j=\pm 1$,即$\boldsymbol{W}_j=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}_2$或$\boldsymbol{W}_j=\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}$,$j=1,2,\cdots,k$.再由引理1和式(3)可知,$\boldsymbol{A}$的特征值为实数或纯虚数,即$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{IO}^{n\times n}$.证毕.

定理1表明,特征值全为实数或为纯虚数的正交矩阵与平方对称的正交矩阵是同一类的正交矩阵,因此用矩阵平方的对称性来确定$\boldsymbol{IO}^{n\times n}$更为简单实用.

定理2 设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$.若$\boldsymbol{A}^2\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则$\boldsymbol{A}$的所有可能的特征值为实数或纯虚数,且有:

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_t,-\boldsymbol{E}_s,\underbrace{\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_2}_{k})=\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}},\ \boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{O}^{n\times n},\ t+s+2k=n;\tag{8}$$

$$t=\frac{1}{4}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}),\ s=\frac{1}{4}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2-2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}),\ k=\frac{1}{4}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2).\tag{9}$$

证明 由定理1知$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{IO}^{n\times n}$.由式(1)、(3)、(5)和引理6知式(6)和式(8)成立.由此再由式(1)和式(5)可得:

1) 当$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$时,由式(1)、(2)、(8)可知$k\neq 0$.由此再由式(8)、(4)、(6)可得$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2=t+s-2k=$

$t+s+2k-4k=n-4k$，即：

$$k=\frac{1}{4}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2).\tag{10}$$

再由式(8) 可得 $t+s=n-2k=\frac{1}{2}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2)$. 由此再由式(4) 和式(8) 所得的 $t-s=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 可知式(9) 成立.

2) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，由式(1)、(2)、(8) 知 $k=0$. 再由式(10) 知，式(9) 仍然成立. 证毕.

定理 2 表明，只用矩阵迹就可确定 $\boldsymbol{IO}^{n\times n}$ 中矩阵的谱的计算公式.

推论 1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$. 若 $\boldsymbol{A}^2\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$，则有：

1) $t-s=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\in\mathbf{Z}$，$t+s=\frac{1}{2}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2)$；

2) 若 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}>0$，则 $t\geqslant 1$；若 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}<0$，则 $s\geqslant 1$；

3) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，$t=\frac{1}{2}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A})$，$s=\frac{1}{2}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A})$，$\sigma(\boldsymbol{A})=\{\underbrace{1,\cdots,1}_{t},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{s}\}$.

证明　由式(9) 可知推论中的 1) 成立. 若 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}>0$（即 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\geqslant 1$），则 $t=s+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\geqslant\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\geqslant 1$；若 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}<0$（即 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\leqslant -1$），则有 $s=t-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\geqslant -\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\geqslant 1$. 由此得推论中的 2) 成立.

当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，由定理 2 中的 2) 可得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_n$，即 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2=n$. 由于 $\boldsymbol{SO}^{n\times n}\subset\boldsymbol{IO}^{n\times n}$，因此式(9) 成立，由此可知推论中的 3) 得证. 证毕.

例 1　设 $\boldsymbol{D}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6 & 2\sqrt{3} & -\sqrt{6}-\sqrt{2} & -\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ -2\sqrt{3} & 6 & -\sqrt{6}+\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2}\\ \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2} & 6 & -2\sqrt{3}\\ \sqrt{6}+\sqrt{2} & -\sqrt{6}+\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\in$ $\boldsymbol{O}^{4\times 4}$. 用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 生成如下 5 个正交矩阵：$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{DF}$，$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{D}^3\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{D}^4\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{A}_5=\boldsymbol{D}^5\boldsymbol{F}$. 同时设 $\boldsymbol{A}_6=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_7=\boldsymbol{D}^3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{4\times 4}$[20]. 请用本文方法求矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{A}_j\,(j=1,2,\cdots,7)$ 的特征值和谱.

由文献[20]中的例6.2可知，$\boldsymbol{F}$ 和$\boldsymbol{A}_j\,(j=1,2,\cdots,7)$ 都是对称的. 由于 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_j=2\,(j=1,2,\cdots,6)$，因此由推论 1 中的 3) 可知，$\sigma(\boldsymbol{F})=\sigma(\boldsymbol{A}_j)=\{1,1,1,-1\}$，$j=1,2,\cdots,6$. 类似地，由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_7=0$ 和推论 1 中的 3) 可知，$\sigma(\boldsymbol{A}_7)=\{1,1,-1,-1\}$.

例 2　请用本文的方法求出如下两组置换矩阵[20] 的特征值和谱：

1) $\boldsymbol{\mu}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu}_5=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu}_6=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

2) $\boldsymbol{\omega}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_5=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_6=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_6$ 是对称矩阵,且置换矩阵是正交的,因此 $\boldsymbol{\mu}_j\in\boldsymbol{SO}^{4\times4}$, $j=1,2,\cdots,6$. 再由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\mu}_j=2$ 和推论 1 中的 3) 可知,$\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_6$ 彼此为正交相似,且其正交标准形为 $\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$.

$\boldsymbol{\omega}_j\notin\boldsymbol{SO}^{4\times4}$. 但由文献[20]中的例 8.1 可知,$\boldsymbol{\omega}_j^2\in\boldsymbol{SO}^{4\times4}$,且 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\omega}_j=\mathrm{tr}\boldsymbol{\omega}_j^2=0$. 于是由式(8) 和式(9) 可知,$t=s=k=1$, $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\omega}_j}=\mathrm{diag}\left(1,-1,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$. 由此再由推论 1 中的 3) 可得 $\sigma(\boldsymbol{\omega}_j)=\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$, $j=1,2,\cdots,6$.

3 四次方幂对称的正交矩阵的谱和迹

定理 3 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的特征值为实数,或为纯虚数、$\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$、$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}^4\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$.

证明 ① 必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能非实特征值 $\pm\mathrm{i}$、$\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$、$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})$ 的对数分别为 k_1、k_2、k_3,则由引理 1 的式(1) 可知 $k_1+k_2+k_3$ 即为式(1) 中 $\boldsymbol{A}$ 的所有非实特征值的对数 k,所以 $n=t+s+2k_1+2k_2+2k_3$. 由此再由引理 4 的式(3) 和式(4) 以及引理 6 可设:

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_t,-\boldsymbol{E}_s,\underbrace{\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_2}_{k_1},\underbrace{\boldsymbol{M}_2,\cdots,\boldsymbol{M}_2}_{k_2},\underbrace{\boldsymbol{N}_2,\cdots,\boldsymbol{N}_2}_{k_3})=\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}},\ \boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}. \tag{11}$$

再由式(3)—(5) 可得:

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_{t+s},-\boldsymbol{E}_{2k_1},\underbrace{\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_2}_{k_2},\underbrace{\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_2}_{k_3})=\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}^2}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_{t+s+2k_1},-\boldsymbol{E}_{2k_2},-\boldsymbol{E}_{2k_3})=\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}^4}\in\boldsymbol{SO}^{n\times n},\ n=t+s+2k_1+2k_2+2k_3. \tag{13}$$

于是由式(13) 知 $\boldsymbol{A}^4\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,必要性得证.

② 充分性. 由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^4\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,因此由定理 1 可知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2\in\boldsymbol{IO}^{n\times n}$. 设 $t_{\boldsymbol{B}}$、$s_{\boldsymbol{B}}$、$k_{\boldsymbol{B}}$ 分别为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 1 和 -1 的重数以及特征值 $\pm\mathrm{i}$ 的对数,于是由式(6)、(8)、(9) 可得:

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}^2U=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{BU}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_{t_{\boldsymbol{B}}},-\boldsymbol{E}_{s_{\boldsymbol{B}}},\underbrace{\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_2}_{k_{\boldsymbol{B}}}),\ \boldsymbol{U}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_{t_{\boldsymbol{B}}+s_{\boldsymbol{B}}},-\boldsymbol{E}_{2k_{\boldsymbol{B}}}). \tag{15}$$

再由式(5)、(6)、(8)、(14) 可知,$t_{\boldsymbol{B}}=t+s$. 于是由引理 2 和引理 4 可知,$s_{\boldsymbol{B}}$ 为偶数,且 $s_{\boldsymbol{B}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\pm\mathrm{i}$ 的对数. 另外,由式(2)—(5) 可知,$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$ 中有 $s_{\boldsymbol{B}}=2k_1$,即 $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$ 中有 k_1 个 $\boldsymbol{H}_2$. 由于 $\pm\mathrm{i}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})\right)^2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\mathrm{i})\right)^2$,因此可知 $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$ 中有 k_2 个 $\boldsymbol{M}_2$ 和 k_3 个 $\boldsymbol{N}_2$,且 $k_{\boldsymbol{B}}=k_2+k_3$. 于是由引理 1 中的式(1) 可

知,存在正交矩阵 $\boldsymbol{V}$,使得

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_t,-\boldsymbol{E}_s,\underbrace{\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_2}_{k_1},\underbrace{\boldsymbol{M}_2,\cdots,\boldsymbol{M}_2}_{k_2},\underbrace{\boldsymbol{N}_2,\cdots,\boldsymbol{N}_2}_{k_3}),\ k=k_1+k_2+k_3. \tag{16}$$

式(3)和式(16)表明,$\boldsymbol{A}$ 的所有可能的特征值为实数,或为纯虚数、$\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})$、$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})$. 充分性得证. 证毕.

引理 7　若 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{O}^{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}^4\in \boldsymbol{SO}^{n\times n}$,$a,b\in \mathbf{Z}$ 是由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a+b\sqrt{2}$ 确定的已知整数,则 $a=t-s$,$b=k_2-k_3$,其中 t、s、k_2、k_3 是由式(11)确定的.

证明　由引理 4 的式(4)和定理 3 的式(11)可得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=t-s+\sqrt{2}(k_2-k_3)=a+b\sqrt{2}$,$a,b\in \mathbf{Z}$. 再应用引理 3 得 $a=t-s$,$b=k_2-k_3$. 证毕.

定理 4　设 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{O}^{n\times n}$. 若 $\boldsymbol{A}^4\in \boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的特征值为实数,或为纯虚数、$\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})$、$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})$,且式(11)成立. 若 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a+b\sqrt{2}$,$a,b\in \mathbf{Z}$,则有:

$$t=\frac{1}{8}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4+2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+4a),\ s=\frac{1}{8}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4+2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2-4a), \tag{17}$$

$$k_1=\frac{1}{8}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4-2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2),\ k_2=\frac{1}{8}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4+4b),\ k_3=\frac{1}{8}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4-4b). \tag{18}$$

证明　由 $\boldsymbol{A}^4\in \boldsymbol{SO}^{n\times n}$ 和定理 3 可知,$\boldsymbol{A}$ 的所有可能的特征值为实数,或为纯虚数、$\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})$、$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})$,且式(11)—(13)都成立. 由式(4)和式(13)可得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4=t+s+2k_1-2k_2-2k_3=n-4(k_2+k_3)$,即:

$$k_2+k_3=\frac{1}{4}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4). \tag{19}$$

由式(4)和式(11)可得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=t-s+\sqrt{2}(k_2-k_3)=a+b\sqrt{2}$,由引理 7 可得:

$$a=t-s,\ b=k_2-k_3,\ \mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a+b\sqrt{2},\ a,b\in \mathbf{Z}. \tag{20}$$

由式(19)和式(20)中的 $b=k_2-k_3$ 即可得式(18)中的 k_2 和 k_3 的表达式. 再由式(4)和式(12)可得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2=t+s-2k_1=n-4k_1-2(k_2+k_3)=n-4k_1-\frac{1}{2}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4)$,由此可得式(18)中 k_1 的表达式. 再利用式(11)—(13)可得 $t+s=n-2k_1-2(k_2+k_3)=n-\frac{1}{4}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4-2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2)-\frac{1}{2}(n-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4)$,即:

$$t+s=\frac{1}{4}(n+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4+2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2). \tag{21}$$

于是再由式(20)所得的 $t-s=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-b\sqrt{2}=a$ 和式(21)即可得式(17). 证毕.

例 3　设 $\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}(-\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E}_2)\in \boldsymbol{O}^{4\times 4}$[20],其中 $\boldsymbol{M}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$[20],求 $\boldsymbol{M}$ 的特征值和谱.

由式(5)知 $\boldsymbol{M}^2=\mathrm{diag}(\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E}_2)$,且 $\boldsymbol{M}^4=\mathrm{diag}(-\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_2)\in \boldsymbol{SO}^{4\times 4}$,进而可知 $\boldsymbol{M}$ 满足定理 4 所要求的条件. 再由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{M}=2-\sqrt{2}$ 知 $a=2$,$b=-1$,$\mathrm{tr}\boldsymbol{M}^2=2$,$\mathrm{tr}\boldsymbol{M}^4=0$. 由此再由式(17)和式(18)得 $t=2$,$s=k_1=k_2=0$,$k_3=1$,即 $\sigma(\boldsymbol{M})=\left\{1,1,-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})\right\}$.

4 主要结论的应用

1962 年,华罗庚在研究辛群的辛方阵的相似问题时,用简洁的方法再次得到了“两个正交矩阵正交相似的充要条件是它们的特征矩阵有相同的初等因子”[21] 的结论.由初等因子理论易知,该结论与本文的引理 1 等价,由此进一步表明两个正交矩阵是否正交相似是由它们所有的特征值来确定的.

定理 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{O}^{n\times n}$,则:

1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似当且仅当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$;

2) 若 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{B}^2\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似当且仅当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2$;

3) 若 $\boldsymbol{A}^4,\boldsymbol{B}^4\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似当且仅当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^4=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^4$.

证明 1) 必要性.由矩阵正交相似的性质可知,当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似时,$\boldsymbol{A}^l$ 与 $\boldsymbol{B}^l$ 也正交相似,因此 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^l=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^l$,其中 l 是任意的正整数.必要性得证.

2) 充分性.① 当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$ 时,由推论 1 中的 3) 知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同,因此由式(1)知此时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似.② 当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2$ 时,由式(9)知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正交相似的.③ 由 $\boldsymbol{A}^4,\boldsymbol{B}^4\in\boldsymbol{SO}^{n\times n}$ 和定理 4 可知,存在 $a_{\boldsymbol{A}},b_{\boldsymbol{A}},a_{\boldsymbol{B}},b_{\boldsymbol{B}}\in\mathbf{Z}$,使得 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=a_{\boldsymbol{A}}+b_{\boldsymbol{A}}\sqrt{2}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=a_{\boldsymbol{B}}+b_{\boldsymbol{B}}\sqrt{2}$.由引理 3 可知,当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$ 时有 $a_{\boldsymbol{A}}=a_{\boldsymbol{B}}$, $b_{\boldsymbol{A}}=b_{\boldsymbol{B}}$.由此再由式(17)和式(18)可知,当 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2$, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^4=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^4$ 时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正交标准形子块的结构相同,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似.证毕.

原有的相关文献都是通过求解特征多项式来求解正交矩阵的特征值,如例 4、例 5 和例 6,而本文仅采用矩阵迹即可求出正交矩阵的特征值.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{SO}^{4\times4}$,请求出 $\boldsymbol{A}$ 的正交标准形[22-24].

由 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=2$ 和定理 5 中的 1) 可知,$\boldsymbol{A}$ 与例 1 中的 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ $(j=1,2,\cdots,6)$ 以及例 2 中的 1) 中的 $\boldsymbol{\mu}_j\in\boldsymbol{SO}^{4\times4}$ $(j=1,2,\cdots,6)$ 都是正交相似的.于是由推论 1 中的 3) 可知,它们的正交标准形为 $\operatorname{diag}(1,1,1,-1)$.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-\sqrt{2}\\1&1&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{3\times3}$,请求出 $\boldsymbol{A}$ 的正交标准形[23].

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{SO}^{3\times3}$ 和定理 1 可知,$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{IO}^{3\times3}$.再由 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=1>0$ 和推论 1 中的 2) 可得 $t=k=1$, $s=0$,即 $\sigma(\boldsymbol{A})=\{1,i,-i\}$.由此再应用式(1)、(3)、(5) 可得 $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}=\operatorname{diag}\left(1,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$.

例 6 设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\-1&1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{O}^{4\times4}$,请求出 $\boldsymbol{A}$ 的正交标准形[22-23,25].

由于 $\boldsymbol{A}^2=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ 是对称的,且 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=0$,因此由式(9)可得 $t=s=k=1$,进而可得 $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}=\operatorname{diag}\left(1,-1,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$.

另外，由于例 2 中的 2）中的置换矩阵 $\boldsymbol{\omega}_j$ 满足 $\boldsymbol{\omega}_j^2 \in \boldsymbol{SO}^{4\times 4}$，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_j = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\omega}_j^2 = 0$，因此由定理 5 中的 2）可知，例 6 中的 $\boldsymbol{A}$ 与这些置换矩阵 $\boldsymbol{\omega}_j\,(j=1,2,\cdots,6)$ 是彼此正交相似的.

例 7　1）请用本文的方法求解 $\boldsymbol{U}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&-1&1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\in \boldsymbol{O}^{4\times 4}$[24] 的特征值.

矩阵 $\boldsymbol{U}$ 是文献[24]中的习题 545 所用的正交矩阵（将二次型化为正交标准形）. 由于 $\boldsymbol{U}^2=\mathrm{diag}\left(1,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},1\right)$，$\boldsymbol{U}^4=\mathrm{diag}(1,-1,-1,1)\in \boldsymbol{SO}^{4\times 4}$，因此可得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{U}^2=2$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{U}^4=0$. 再由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{U}=\sqrt{2}$ 和引理 7 可得 $a=0$，$b=1$. 由此再由式(17) 和式(18) 可得 $t=s=k_2=1$，$k_1=k_3=0$，即 $\sigma(\boldsymbol{U})=\left\{1,-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})\right\}$.

2）请用本文的方法求解 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{U}$[15,18] 的特征值.

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\in \boldsymbol{O}^{4\times 4}. \tag{22}$$

由式(22) 可知：

$$\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\neq \boldsymbol{E}_4)，且\ \boldsymbol{A}^4=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{U}^2=-\boldsymbol{E}_4\in \boldsymbol{SO}^{4\times 4}. \tag{23}$$

再由式(23) 可知，$\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 分别是平方对称、4 次方幂对称的正交矩阵. 由于 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{U}=0$，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{U}^2=-4$，因此由定理 2 和式(11) 可得 $t=s=0$，$k=2$，即

$$\sigma(\boldsymbol{U})=\{\mathrm{i},\mathrm{i},-\mathrm{i},-\mathrm{i}\}. \tag{24}$$

由式(22)、(23) 还可得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2=0$，$a=b=0$（因 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a+b\sqrt{2}=0$），$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^4=-4$. 由此再由式(17) 和式(18) 可得 $t=s=k_1=0$，$k_2=k_3=1$，即：

$$\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},-\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right),\ \sigma(\boldsymbol{A})=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i}),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i})\right\}.$$

文献[15]和文献[18]给出了正交矩阵的一个重要结论：当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{U}\in \boldsymbol{O}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{U}$ 没有重特征值和 $\boldsymbol{UA}=\boldsymbol{AU}^{\mathrm{T}}$ 时，必有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$.

式(22) 中的 2 个矩阵是文献[15]中的定理 6.5 和文献[18]中定理 1 中的 2 个数值例子. 由式(22) 和式(23) 可知，$\boldsymbol{UA}=\boldsymbol{AU}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^2\neq \boldsymbol{E}$；因此，由式(24) 可知文献[15]和文献[18]中给出的结论其前提条件“$\boldsymbol{U}$ 无重特征值”是必不可少的.

文献[24]中的习题 535、文献[26]5.3 节中的习题 22.3、文献[27]5.3 节中的习题 21.3 都是应用正交变换将同一个二次型“$2x_1x_2+2x_3x_4$”化为标准形，但其所用的正交矩阵是各不相同的. 应用本文方法计算这 3 个正交矩阵的特征值得：文献[24]所用的正交矩阵是平方对称的；文献[26]和文献[27]所用的正交矩阵是 4 次方对称的，且由定理 5 中的 3）可知这两个矩阵是正交相似的. 由此表明，将一个实二次型化为正交标准形时，可以使用不同的正交矩阵，且所使用的正交矩阵既可以是正交相似的，也可以不是正交相似的.

以上数值例子表明，利用矩阵迹求解平方对称和 4 次方幂对称的这两类正交矩阵的特征值，可不用通过求解特征多项式来求解，因此该方法比传统方法简单、实用.

参考文献:

[1] WOLKOWICZ H, STYAN G P H. Bounds for eigenvalues using trace[J]. Linear Algebra and Its Application, 1980,29:471-506.
[2] LAY D C. Linear Algebra and Its Applications[M]. 5th. New Jersey: Pearson Education, Inc, 2019:281.
[3] WOLKOWICZ H, STYAN G P H. More bounds for eigenvalues using trace[J]. Linear Algebra and Its Application, 1980,31:1-17.
[4] TARAZAGA P. Eigenvalue estimates for symmetric matrices[J]. Linear Algebra and Its Application, 1990,135:171-179.
[5] MERIKOSKI J K, VIRTANEN A. Bounds for eigenvalues using the trace and determinant[J]. Linear Algebra and Its Application, 1997,264:101- 108.
[6] HORNE B G. Lower bounds for the spectral radius of a matrix[J]. Linear Algebra and Its Application, 1997,263:261-273.
[7] 杨忠鹏,陈智雄. 关于用矩阵的迹表示的特征值的界[J]. 福建师范大学学报(自然科学版),2002,18(4):7-10.
[8] 吕洪斌,杨忠鹏. 关于用迹表示的实矩阵的特征值的虚部的界[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版),2004,25(2):43-46.
[9] HUANG T Z, WANG L. Improving upper bounds for eigenvalues of complex matrices using traces[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007,426:841-854.
[10] ZHONG Q, HUANG T Z. Bounds for the extreme eigenvalues using the trace and determinant[J]. Journal of Information and Computing Science, 2008,3(2):118-124.
[11] KITTANEH F, LIN M. Trace inequalities for positive semidefinite block matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2017,524:153-158.
[12] SMITH O K. Eigenvalues of a symmetric 3×3 matrix[J]. Communications ACM, 1961,4(4):168.
[13] 陈梅香,杨忠鹏,晏瑜敏,等. 迹为整数的 3×3 阶正交矩阵的谱[J]. 北华大学学报(自然科学版),2018,19(2):158-163.
[14] 陈梅香,杨忠鹏,李雨昕,等. 3×3 正交矩阵谱的确定及其应用[J]. 福建师范大学学报(自然科学版),2020,36(4):1-8.
[15] ZHANG F Z. Matrix Theory Basic Results and Techniques[M]. 2nd. New York: Springer, 2011:181.
[16] ZHANG F Z. Matrix Theory Basic Results and Techniques[M]. New York: Springer, 1999:141.
[17] 林志兴,杨忠鹏,陈梅香,等. 一类矩阵迹方程正交解的一些研究[J]. 延边大学学报(自然科学版),2020,46(2):115-121.
[18] GOODSON G R. The inverse - similarity problem for real orthogonal matrices[J]. The American Mathematical Monthly, 1997,104(3):223-230.
[19] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. 2nd. New York: Cambridge University Press, 2013:136.
[20] ZHANG S G, LIN H L. Algorithms for symmetric groups of simplexes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007,188:1610-1634.
[21] 华罗庚. 辛方阵的辛相似[J]. 中山大学学报(自然科学版),1962(4):1-12.
[22] N. B. 普罗斯库烈柯夫. 线性代数习题集[M]. 周晓钟,译. 北京:人民教育出版社,1983:250.
[23] 张贤科,许甫华. 高等代数学[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,2006:323-324.
[24] 法杰耶夫,索明斯基. 高等代数习题集[M]. 丁寿田,译. 北京: 高等教育出版社,1987:261.
[25] 张贤科. 高等线性代数学[M]. 北京:高等教育出版社,2012:272.
[26] 李师正. 高等代数解题方法与技巧[M]. 北京:高等教育出版社,2004:178.
[27] 李刚. 高等代数解题方法与技巧[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2022:140.