

文章编号: 1004-4353(2023)04-0310-08

# 具有高阶扰动的 Oregonator 模型的平稳分布研究

河燕梅, 文香丹

( 延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 为了探究随机不确定因素对化学振荡反应动力学行为的影响, 建立了一个具有高阶扰动的 Oregonator 模型, 并通过构造合适的 Lyapunov 函数得到了系统存在遍历平稳分布的充分条件. 数值模拟结果表明, 小噪声能够促进系统反应的持续进行(即有利于促进系统的平稳分布), 而大噪声则不利于系统反应的持续进行.

**关键词:** 高阶扰动; Oregonator 模型; Lyapunov 函数; 平稳分布

**中图分类号:** O211.63

**文献标志码:** A

## Stationary distribution of an Oregonator model with high-order perturbation

HE Yanmei, WEN Xiangdan

( College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China )

**Abstract:** In order to investigate the effect of random uncertainties on the dynamical behavior of chemical oscillating reaction, an Oregonator model with higher-order perturbation was established. And by constructing a suitable Lyapunov function, the sufficient conditions for the existence of ergodic stationary distribution of the system were obtained. Numerical simulations were used to show that small noise can promote the continuous process of the reaction (that is, it was conducive to promoting the stationary distribution of the system), while large noise was not conducive to the continuous process of the reaction.

**Keywords:** high-order perturbation; Oregonator model; Lyapunov function; stationary distribution

## 0 引言

化学振荡反应是在开放体系中进行的一类远离平衡的反应. 由于化学振荡现象广泛存在于化工生产、食品检测和环境保护等多个领域, 因此其受到学者们的广泛关注. 1974 年, Field 等<sup>[1]</sup>基于 FKN 机制<sup>[2]</sup>和质量作用定律<sup>[3]</sup>, 针对均匀溶液中的振荡化学反应提出了如下 Oregonator 模型:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1 AY - k_2 XY + k_{3,4} AX - 2k_5 X^2, \\ \frac{dY}{dt} = -k_1 AY - k_2 XY + \theta k_6 Z, \\ \frac{dZ}{dt} = k_{3,4} AX - k_6 Z. \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2023-06-08

基金项目: 吉林省教育厅科技研究项目(JJKH20180462KJ)

第一作者: 河燕梅(2001—), 女, 本科生, 研究方向为随机微分方程和优化理论.

通信作者: 文香丹(1965—), 女(朝鲜族), 硕士, 教授, 研究方向为随机微分方程和优化理论.

对式(1)作代换( $x = \frac{k_2}{k_1 A} X, y = \frac{k_2}{k_{3,4} A} Y, z = \frac{k_2 k_6}{k_1 k_{3,4} A^2}, \tau = A \sqrt{k_1 k_{3,4}} t, q = \frac{2k_1 k_5}{k_2 k_{3,4}}, a = \sqrt{\frac{k_{3,4}}{k_1}}, b = \frac{k_6}{A \sqrt{k_1 k_{3,4}}}$ )后再用  $t$  代替  $\tau$  可得:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - xy + x - qx^2), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{a}(-y - xy + \theta z), \\ \frac{dz}{dt} = b(x - z). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $a > 0, b \geq 0, 0 < q < 1, \theta \geq 0$ . 令模型(2)中的3个方程的右端都等于0,则求解该模型可得系统存在2个平衡点,分别为  $O(0,0,0)$  和  $P(x^*, y^*, z^*)$ , 其中  $2qx^* = (1 - \theta - q) + [(1 - \theta - q)^2 + 4q(1 + \theta)]^{\frac{1}{2}}, y^* = \frac{\theta x^*}{1 + x^*}, z^* = x^*$ . 1976年, Tyson<sup>[4]</sup> 证明了平衡点  $O(0,0,0)$  是不稳定的,平衡点  $P(x^*, y^*, z^*)$  稳定的充要条件为  $\alpha > 0, \gamma > 0, \alpha\beta - \gamma > 0$ , 其中  $\alpha = b + \left[ x^* \left( \frac{1}{a} + \frac{3}{2}qa \right) + \frac{a}{2}(\theta - 1) + \frac{1}{a} \right], \beta = [2qx^* + x^*(q - 1) + \theta] + b \left[ ay^* + \left( \frac{1}{a} + 2qa \right)x^* + \left( \frac{1}{a} - a \right) \right], \gamma = bx^* [2qx^* + q + (\theta - 1)]$ .

由于化学反应与温度、压力、pH值等因素密切相关,因此用随机微分方程来建立化学反应模型可更好地反映实际现象. 2020年, Yang等<sup>[5]</sup>研究了一种具有线性扰动的 Oregonator 模型,证明了该系统存在唯一正解,并在此基础上探讨了系统的动力学行为. 文献[6-7]的作者研究表明,利用非线性扰动随机微分方程可更好地分析系统的动力学行为. 文献[8-11]的作者研究了具有高阶扰动的种群模型和传染病模型. 受上述文献启发,本文建立了如下一种具有高阶扰动(又称为非线性扰动)的 Oregonator 模型:

$$\begin{cases} dX = (k_1 AY - k_2 XY + k_{3,4} AX - 2k_5 X^2)dt + (\beta_{11} + \beta_{12} X)X dW_1(t), \\ dY = (-k_1 AY - k_2 XY + \theta k_6 Z)dt + (\beta_{21} + \beta_{22} Y)Y dW_2(t), \\ dZ = (k_{3,4} AX - k_6 Z)dt + (\beta_{31} + \beta_{32} Z)Z dW_3(t), \end{cases} \quad (3)$$

并研究了该系统平稳分布的存在唯一性. 其中  $W_i(t) (i=1,2,3)$  表示标准一维独立布朗运动,  $\beta_{ij}^2 (\beta_{ij}^2 > 0, j=1,2)$  表示噪声强度. 式(3)被称为高阶扰动系统的原因是  $dW_1(t), dW_2(t)$  和  $dW_3(t)$  的前3项( $X^2, Y^2$  和  $Z^2$ )为高阶项. 为了减少模型(3)中的参数个数,本文对系统(3)中的变量进行无量纲转化后,再令  $\sigma_{i1} = \frac{\beta_{i1}}{A^{\frac{1}{2}}(k_1 k_{3,4})^{\frac{1}{4}}} (i=1,2,3), \sigma_{12} = \frac{\beta_{12} k_2}{A^{\frac{3}{2}} k_1^{\frac{5}{4}} k_{3,4}^{\frac{1}{4}}}, \sigma_{22} = \frac{\beta_{22} k_2}{A^{\frac{3}{2}} k_1^{\frac{1}{4}} k_{3,4}^{\frac{5}{4}}}, \sigma_{32} = \frac{\beta_{32} k_2 k_6}{A^{\frac{5}{2}} k_1^{\frac{5}{4}} k_{3,4}^{\frac{5}{4}}}, B_i(\tau) =$

$A^{\frac{1}{2}}(k_1 k_{3,4})^{\frac{1}{4}} W_i \left( \frac{\tau}{A(k_1 k_{3,4})^{\frac{1}{2}}} \right)$ , 则由此系统(3)可转化为以下方程组(用  $t$  代替  $\tau$ ):

$$\begin{cases} dx = [a(y - xy + x - qx^2)] dt + (\sigma_{11} + \sigma_{12}x)x dB_1(t), \\ dy = \left[ \frac{1}{a}(-y - xy + \theta z) \right] dt + (\sigma_{21} + \sigma_{22}y)y dB_2(t), \\ dz = [b(x - z)] dt + (\sigma_{31} + \sigma_{32}z)z dB_3(t). \end{cases} \quad (4)$$

## 1 相关引理

**引理 1** (Has'minskii 定理)<sup>[12]</sup> 假设存在一个具有正则边界  $\Gamma$  的有界开区域  $U \subset \mathbf{R}^l$  ( $\mathbf{R}^l$  表示  $l$  维欧几里得空间), 且其具有以下性质:

(A1) 在区域  $U$  及其一些邻域内, 扩散矩阵  $A(x)$  的最小特征值是非零的.

(A2) 当  $x \in \mathbf{R}^l \setminus U$  时, 从  $x$  出发的路径到达集合  $U$  的平均时间  $\tau$  是有限的, 且对于每个紧子集  $Q \subset \mathbf{R}^l$  有  $\sup_{x \in Q} \mathbf{E}_x \tau < \infty$ , 则由随机微分方程描述的 Markov 过程  $X(t)$  存在唯一的平稳分布  $\mu(\cdot)$ . 若  $f(\cdot)$  是关于测度  $\mu$  可积的函数, 则对所有的  $x \in \mathbf{R}^l$  有  $\mathbf{P}_x \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t)) dt = \int_{\mathbf{R}^l} f(x) \mu(dx) \right\} = 1$  成立, 并记  $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ ,  $\mathbf{R}_+^d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d : x_i > 0, 1 \leq i \leq d\}$ .

## 2 解的平稳分布及其证明

首先证明系统(4) 是否存在全局正解. 为此, 首先给出以下定理.

**定理 1** 对任意的初始值  $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 随机系统(4) 始终存在唯一解  $(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \geq 0$ , 且此解以概率 1 位于  $\mathbf{R}_+^3$  空间内, 即对所有的  $t \geq 0$ , 有  $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}_+^3$  a.s..

**证明** 由于定理 1 的证明与文献[5] 中的定理 2.1 类似, 故本文在此省略.

**定理 2** 假设  $a > \frac{\sigma_{11}^2}{2}$ , 则系统(4) 存在唯一的平稳分布, 且具有遍历性.

**证明** 为了证明定理 2, 需首先验证引理 1 中的条件(A1) 和(A2) 成立. 由系统(4) 的漂移项可知, 其扩散矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} (\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2 x^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2 y^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{31} + \sigma_{32}z)^2 z^2 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵  $A$  是正定的, 因此显然可知条件(A1) 成立.

下证条件(A2) 成立. 由文献[13] 可知, 要证条件(A2) 成立, 只需证明在  $\mathbf{R}_+^3$  中存在一个关于  $x, y, z$  的非负  $C^2$ -函数  $V$  和一个有界区域  $D_\epsilon$  使得对任意的  $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 \setminus D_\epsilon$  有  $LV(x, y, z) \leq -1$  成立即可. 对  $-\ln x, y$  和  $z$  作用微分算子  $L$  可得:

$$\begin{aligned} L(-\ln x) &= -\frac{a}{x}(y - xy + x - qx^2) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2 = -\left(a - \frac{\sigma_{11}^2}{2}\right) + a\left(-\frac{y}{x} + y + qx\right) + \\ &\quad \sigma_{11}\sigma_{12}x + \frac{\sigma_{12}^2}{2}x^2 \leq -\left(a - \frac{\sigma_{11}^2}{2}\right) + a(y + qx) + \sigma_{11}\sigma_{12}x + \frac{\sigma_{12}^2}{2}x^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$L(y) = \frac{1}{a}(-y - xy + \theta z), \quad (6)$$

$$L(z) = b(x - z). \quad (7)$$

为了分析  $x$  趋于零边界时的情况, 本文构造了一个  $C^2$ -函数  $V_1: \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , 其形式为  $V_1 = -\ln x + a^2 y + \frac{a\theta}{b}z$ . 于是由式(5)–(7) 可得:

$$LV_1 \leq -\left(a - \frac{\sigma_{11}^2}{2}\right) + [a(q + \theta) + \sigma_{11}\sigma_{12}]x + \frac{\sigma_{12}^2}{2}x^2. \quad (8)$$

定义  $V_2 = -\ln y$ ,  $V_3 = -\ln z$ . 于是对  $V_2$  和  $V_3$  分别应用 Itô 公式进行计算可得:

$$LV_2 = \frac{1}{a}\left(x - \theta \frac{z}{y}\right) + \frac{1}{a} + \frac{\sigma_{21}^2}{2} + \sigma_{21}\sigma_{22}y + \frac{\sigma_{22}^2}{2}y^2, \quad (9)$$

$$LV_3 = -b \frac{x}{z} + b + \frac{\sigma_{31}^2}{2} + \sigma_{31}\sigma_{32}z + \frac{\sigma_{32}^2}{2}z^2. \quad (10)$$

为了分析  $x, y, z$  趋于无穷边界时的情况, 本文构造一个  $C^2$ -函数  $V_4: \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , 其形式为  $V_4 =$

$\left(x + a^2 y + \frac{a\theta}{b} z + 1\right)^p$ , 其中  $0 < p < 1$  是一个充分小的常数. 同时, 令  $h = \frac{\min\left\{\sigma_{12}^2, a^4 \sigma_{22}^2, \left(\frac{a\theta}{b}\right)^2 \sigma_{32}^2\right\}}{\left(\max\left\{1, a^2, \frac{a\theta}{b}\right\}\right)^2}$ .

由此再利用  $C_p$  不等式对  $\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 1 - 1}{(x + y + z + 1)^{2-p}}$  进行放缩可得:

$$\begin{aligned} LV_4 &= p \left(x + a^2 y + \frac{a\theta}{b} z + 1\right)^{p-1} [a(-xy + x - qx^2) + a(-xy) + a\theta x] - \frac{p}{2}(1-p) \cdot \\ &\quad \left(x + a^2 y + \frac{a\theta}{b} z + 1\right)^{p-2} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2 x^2 + a^4(\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2 y^2 + \left(\frac{a\theta}{b}\right)^2 (\sigma_{31} + \sigma_{32}z)^2 z^2\right] \leq \\ &\quad pa(1+\theta)x - \frac{p}{2}(1-p) \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2 x^2 + a^4(\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2 y^2 + \left(\frac{a\theta}{b}\right)^2 (\sigma_{31} + \sigma_{32}z)^2 z^2}{\left(x + a^2 y + \frac{a\theta}{b} z + 1\right)^{2-p}} \leq \\ &\quad pa(1+\theta)x - \frac{p}{2}(1-p)h \frac{x^4 + y^4 + z^4 + 1 - 1}{(x + y + z + 1)^{2-p}} \leq \\ &\quad pa(1+\theta)x - \frac{p}{2}(1-p)h \left[\frac{(x + y + z + 1)^4}{64(x + y + z + 1)^{2-p}} - \frac{1}{(x + y + z + 1)^{2-p}}\right] \leq \\ &\quad pa(1+\theta)x - \frac{p}{128}(1-p)h(x + y + z + 1)^{2+p} + \frac{p}{2}(1-p)h. \end{aligned} \quad (11)$$

为了分析变量  $x, y, z$  趋于零边界和无穷边界时的情况, 本文利用  $V_1, V_2, V_3$  和  $V_4$  构造了一个  $C^2$ -函数  $G: \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , 其形式为  $G(x, y, z) = MV_1 + V_2 + V_3 + V_4$ , 其中  $M > 0$ ,  $M$  满足  $-M\left(a - \frac{\sigma_{11}^2}{2}\right) + K \leq -2$ ,

$$\begin{aligned} K &= \sup_{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3} \left\{ -\frac{p}{256}(1-p)h(x + y + z + 1)^{2+p} + \frac{p}{2}(1-p)h + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{a} + \frac{\sigma_{21}^2}{2} + \sigma_{21}\sigma_{22}y + \frac{\sigma_{22}^2}{2}y^2 + b + \frac{\sigma_{31}^2}{2} + \sigma_{31}\sigma_{32}z + \frac{\sigma_{32}^2}{2}z^2 \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

由于  $G$  是一个连续函数,  $\liminf_{k \rightarrow \infty, (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 \setminus Q_k} G(x, y, z) = +\infty$ , 其中  $Q_k = \left(\frac{1}{k}, k\right) \times \left(\frac{1}{k}, k\right) \times \left(\frac{1}{k}, k\right)$ , 因此  $G(x, y, z)$  在  $\mathbf{R}_+^3$  内部具有极小值  $G(x_0, y_0, z_0)$ .

为了保证 Lyapunov 函数的非负性, 本文构造了一个非负  $C^2$ -函数  $V: \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}_+$ , 其形式为  $V(x, y, z) = G(x, y, z) - G(x_0, y_0, z_0)$ . 由式(8)–(12) 可得:

$$\begin{aligned} LV(x, y, z) &\leq M \left[ -\left(a - \frac{\sigma_{11}^2}{2}\right) + (a(q + \theta) + \sigma_{11}\sigma_{12})x + \frac{\sigma_{12}^2}{2}x^2 \right] + \left(\frac{1}{a} + pa(1+\theta)\right)x - \\ &\quad \frac{\theta}{a} \frac{z}{y} - b \frac{x}{z} - \frac{p}{256}(1-p)h(x + y + z + 1)^{2+p} + K. \end{aligned}$$

由上式易知: 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $LV(x, y, z) \leq -M\left(a - \frac{\sigma_{11}^2}{2}\right) + K \leq -2$ ; 当  $y \rightarrow 0^+$  或  $z \rightarrow 0^+$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $y \rightarrow +\infty$ 、 $z \rightarrow +\infty$  时,  $LV(x, y, z) \leq -\infty$ . 因此, 对任意  $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 \setminus D_\epsilon$  有  $LV(x, y, z) \leq -1$ . 其中  $D_\epsilon = \left\{ \epsilon \leq x \leq \frac{1}{\epsilon}, \epsilon^3 \leq y \leq \frac{1}{\epsilon^3}, \epsilon^2 \leq z \leq \frac{1}{\epsilon^2} \right\}$ ,  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) 是一个充分小的常数. 证毕.

### 3 数值模拟

本文利用 Milstein 高阶方法<sup>[14]</sup>对系统(4)的离散形式进行数值模拟. 由文献[14]可知, 系统(4)的

离散形式为:

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + a(y_j - x_j y_j + x_j - q x_j^2) \Delta t + (\sigma_{11} + \sigma_{12} x_j) x_j \sqrt{\Delta t} \omega_{1j} + \\ \quad \frac{x_j}{2} (\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{11}\sigma_{12}x_j + 2\sigma_{12}^2 x_j^2), \\ y_{j+1} = y_j + \frac{1}{a}(-y_j - x_j y_j + \theta z_j) \Delta t + (\sigma_{21} + \sigma_{22} y_j) y_j \sqrt{\Delta t} \omega_{2j} + \\ \quad \frac{y_j}{2} (\sigma_{21}^2 + 3\sigma_{21}\sigma_{22}y_j + 2\sigma_{22}^2 y_j^2), \\ z_{j+1} = z_j + b(x_j - z_j) \Delta t + (\sigma_{31} + \sigma_{32} z_j) z_j \sqrt{\Delta t} \omega_{3j} + \frac{z_j}{2} (\sigma_{31}^2 + 3\sigma_{31}\sigma_{32}z_j + 2\sigma_{32}^2 z_j^2). \end{cases}$$

其中:时间增量  $\Delta t > 0$ ,  $\omega_{ij}$  ( $i=1,2,3$ ) 是服从  $N(0,1)$  分布的高斯随机变量. 在系统(4)中,假设时间单位为 min,反应物的浓度为 mol/(L·min),初始值为  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.8, 0.3, 0.5)$ ,步长  $\Delta t = 0.1$ ,其他参数值依据文献[7]分别取  $a = 7.727$ ,  $q = 0.08375$ ,  $\theta = 1$ ,  $b = 0.161$ . 为了研究不同白噪声强度对系统(4)动力学行为的影响,本文取 4 组不同的白噪声强度对其平稳分布的存在性进行数值模拟.

1) 取白噪声  $\sigma_{11} = 0.025$ ,  $\sigma_{12} = 0.0075$ ,  $\sigma_{21} = 0.03$ ,  $\sigma_{22} = 0.0025$ ,  $\sigma_{31} = 0.0125$ ,  $\sigma_{32} = 0.002$ . 将该白噪声代入  $\frac{\sigma_{11}^2}{2}$  中进行计算可得  $a > \frac{\sigma_{11}^2}{2} = 0.0003125$ . 由该结果可知定理 2 中的条件成立,因此系统(4)存在唯一遍历平稳分布. 在上述白噪声下的数值仿真模拟结果见图 1.

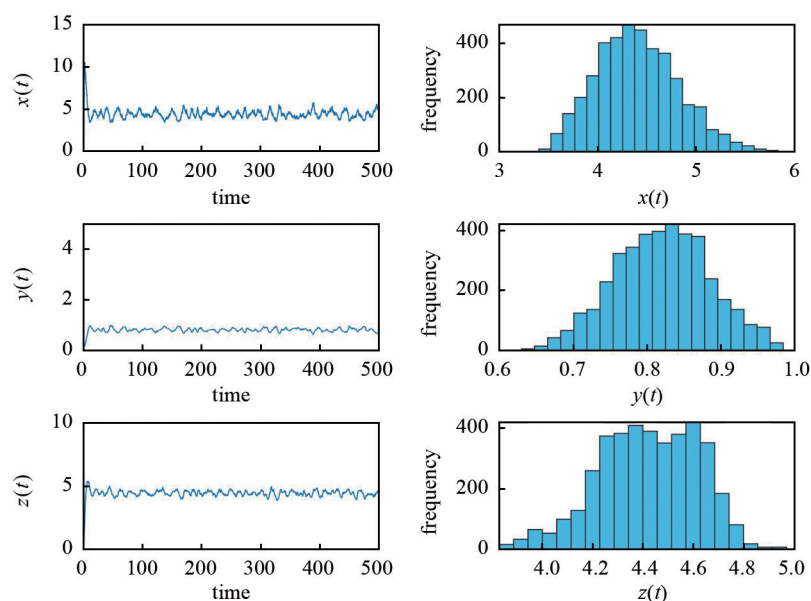


图 1 白噪声取  $\sigma_{11} = 0.025$ 、 $\sigma_{12} = 0.0075$ 、 $\sigma_{21} = 0.03$ 、 $\sigma_{22} = 0.0025$ 、 $\sigma_{31} = 0.0125$ 、 $\sigma_{32} = 0.002$  时系统(4)存在的平稳分布(左图为系统(4)的解,右图为系统(4)的密度函数)

2) 取白噪声  $\sigma_{11} = 0.05$ ,  $\sigma_{12} = 0.015$ ,  $\sigma_{21} = 0.06$ ,  $\sigma_{22} = 0.005$ ,  $\sigma_{31} = 0.025$ ,  $\sigma_{32} = 0.004$ . 将该白噪声代入  $\frac{\sigma_{11}^2}{2}$  中计算得  $a > \frac{\sigma_{11}^2}{2} = 0.00125$ . 由该结果可知定理 2 中的条件成立,因此系统(4)存在唯一遍历平稳分布. 在上述白噪声下的数值仿真模拟结果见图 2.

3) 取白噪声  $\sigma_{11} = 0.1$ ,  $\sigma_{12} = 0.03$ ,  $\sigma_{21} = 0.12$ ,  $\sigma_{22} = 0.01$ ,  $\sigma_{31} = 0.05$ ,  $\sigma_{32} = 0.008$ . 将该白噪声代入  $\frac{\sigma_{11}^2}{2}$  中进行计算可得  $a > \frac{\sigma_{11}^2}{2} = 0.005$ . 由该结果可知定理 2 中的条件成立,因此系统(4)存在唯一遍历平

稳分布.在上述白噪声下的数值仿真模拟结果见图3.

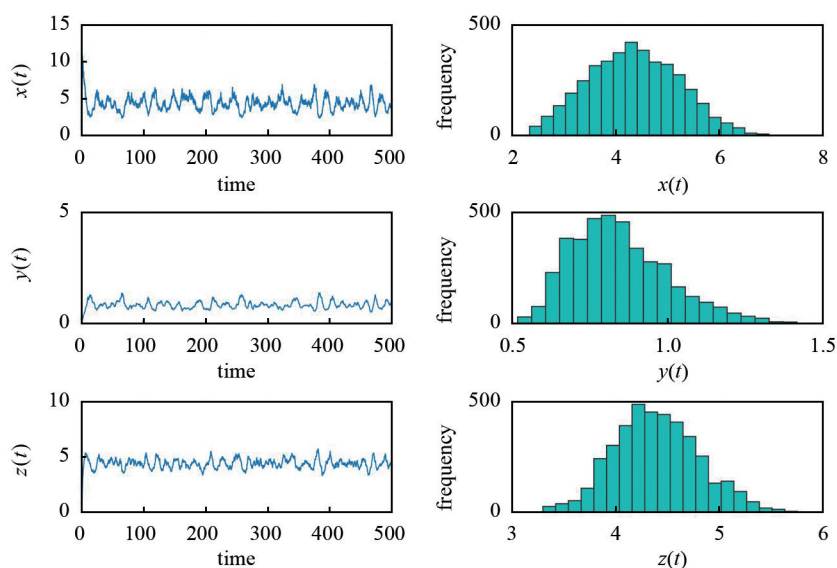


图2 白噪声取  $\sigma_{11} = 0.05$ 、 $\sigma_{12} = 0.015$ 、 $\sigma_{21} = 0.06$ 、 $\sigma_{22} = 0.005$ 、 $\sigma_{31} = 0.025$ 、 $\sigma_{32} = 0.004$  时系统(4)存在的平稳分布(左图为系统(4)的解,右图为系统(4)的密度函数)

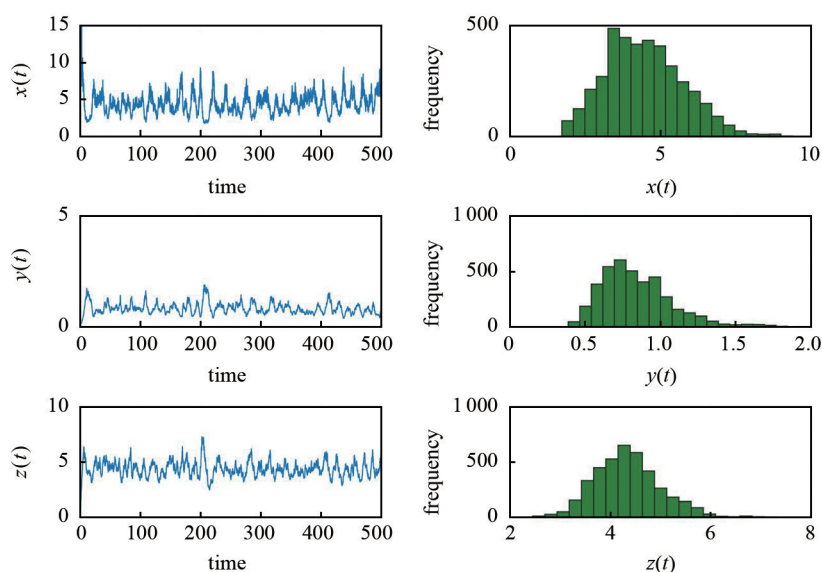


图3 白噪声取  $\sigma_{11} = 0.1$ 、 $\sigma_{12} = 0.03$ 、 $\sigma_{21} = 0.12$ 、 $\sigma_{22} = 0.01$ 、 $\sigma_{31} = 0.05$ 、 $\sigma_{32} = 0.008$  时系统(4)存在的平稳分布(左图是系统(4)的解,右图是系统(4)的密度函数)

4) 取白噪声  $\sigma_{11} = 0.15$ 、 $\sigma_{12} = 0.045$ 、 $\sigma_{21} = 0.18$ 、 $\sigma_{22} = 0.015$ 、 $\sigma_{31} = 0.075$ 、 $\sigma_{32} = 0.012$ . 将该白噪声代入  $\frac{\sigma_{11}^2}{2}$  中计算得  $a > \frac{\sigma_{11}^2}{2} = 0.01125$ . 由该结果可知定理2中的条件成立,因此系统(4)存在唯一遍历平稳分布.在上述白噪声下的数值仿真模拟结果见图4.

由图1—图4可以看出,白噪声强度越小,系统解的振荡幅度越小.另外,本文以3)中的白噪声为例,给出了3个系统(非线性系统(4)与其相对应的确定性系统(2)、线性系统(13))解的运行图.由图5中的(a)和(c)可以看出,系统(4)的解在系统(2)解的附近振荡;由图5中的(b)和(c)可以看出,系统(4)的解的振荡幅度大于线性扰动系统(13)的振荡幅度.上述结果表明,非线性扰动系统(4)的解大幅偏离了原系统的平衡状态.

$$\begin{cases} dx = [a(y - xy + x - qx^2)] dt + \sigma_{11}x dB_1(t), \\ dy = \left[ \frac{1}{a}(-y - xy + \theta z) \right] dt + \sigma_{21}y dB_2(t), \\ dz = [b(x - z)] dt + \sigma_{31}z dB_3(t). \end{cases} \quad (13)$$

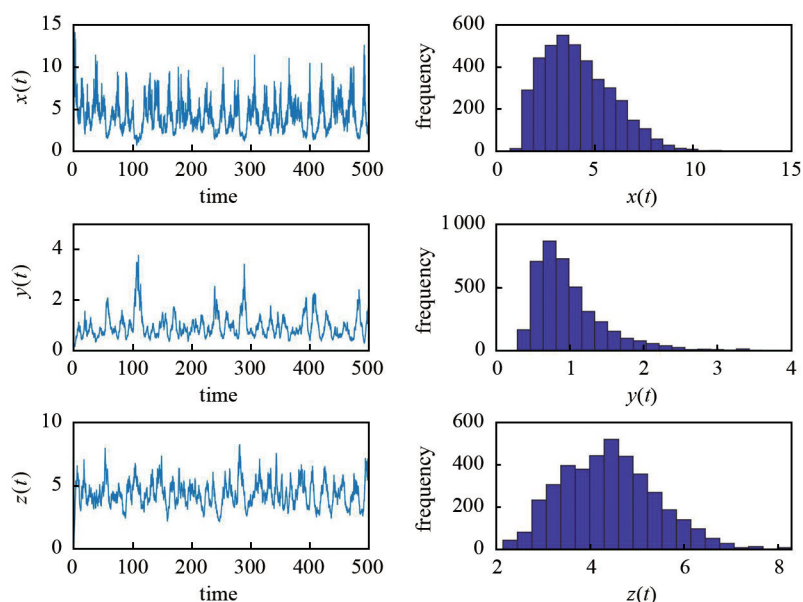


图 4 白噪声取  $\sigma_{11} = 0.15$ 、 $\sigma_{12} = 0.045$ 、 $\sigma_{21} = 0.18$ 、 $\sigma_{22} = 0.015$ 、 $\sigma_{31} = 0.075$ 、 $\sigma_{32} = 0.012$  时系统(4)存在的平稳分布(左图是系统(4)的解,右图是系统(4)的密度函数)

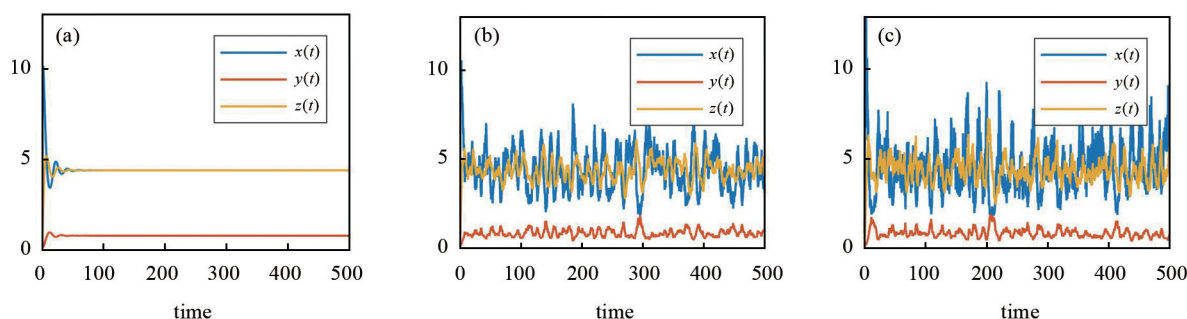


图 5 白噪声取  $\sigma_{11} = 0.1$ 、 $\sigma_{12} = 0.03$ 、 $\sigma_{21} = 0.12$ 、 $\sigma_{22} = 0.01$ 、 $\sigma_{31} = 0.05$ 、 $\sigma_{32} = 0.008$  时不同系统的解((a)为系统(2)的解,(b)为与系统(2)相对应的线性扰动系统(13)的解,(c)为与系统(2)相对应的非线性扰动系统(4)的解)

## 4 结论

对本文构建的具有非线性扰动系统的 Oregonator 模型的平稳分布进行研究表明:当噪声强度  $\sigma_{11}^2$  较小时,该系统存在唯一遍历平稳分布;小噪声能够促进反应的持续进行,而大噪声则不利于反应持续进行. 本文研究结果丰富了化学振荡反应系统的动力学性质,并可为研究具有高阶扰动的化学振荡反应模型的平稳分布提供参考.

## 参考文献:

- [1] FIELD R J, NOYES R M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction[J]. Journal of Chemical Physics, 1974, 60:1877-1884.

(下转第 357 页)



析.研究表明,2015—2021年福建省高职教育资源配置的规模收益呈下降趋势,但教育资源的纯技术效率、规模效率和技术改进效率呈波动上升趋势.另外,高职院校的资源配置还存在明显的不均衡现象.该研究结果可为提高高职教育的资源配置效率提供参考.

### 参考文献:

- [1] 中共中央办公厅,国务院办公厅.关于推动现代职业教育高质量发展的意见[EB/OL]. [2023-01-12]. [http://www.gov.cn/zhengce/2021-10/12/content\\_5642120.htm](http://www.gov.cn/zhengce/2021-10/12/content_5642120.htm).
- [2] 罗红云,庄馨予,张斌.我国职业教育财政投入效率评价:基于DEA-Malmquist指数三分法[J].地方财政研究,2020(7):49-56.
- [3] 鄢裕强,魏天言,柳军.我国职业教育财政投入效率评价[J].职业教育(下旬刊),2022,21(7):36-44.
- [4] 唐智彬,曾媛.中等职业教育资源配置效率测度与评估研究[J].职业技术教育,2021,42(34):25-30.
- [5] 何景师.我国高等职业教育投入产出效率及影响因素研究[J].黑龙江高教研究,2022,40(11):129-136.
- [6] 杨广俊.高职院校经费投入产出效率评价研究[J].职教论坛,2020,36(10):70-74.
- [7] 陶红,左芬.粤东西北地区高职院校教育经费投入效益分析[J].南方职业教育学刊,2020,10(2):7-14.
- [8] 李爽,赵曦.基于数据包络分析的广东高职院校投入产出效率评价研究[J].职业技术,2022,21(4):7-13.
- [9] 陈钰芬,陈骥.多元统计分析[M].北京:清华大学出版社,2020:98.

(上接第316页)

- [2] FIELD R J, KOROS E, NOYES R M. Oscillations in chemical systems: II. Thorough analysis of temporal oscillations in the bromate-cerium-malonic acid system[J]. Journal of the American Chemical Society, 1972, 94(25): 8649-8664.
- [3] ZHABOTINSKII A M. Periodic processes of the oxidation of malonic acid in solution (Study of the kinetics of Belousov's reaction)[J]. Biofizika, 1964, 9: 306-311.
- [4] TYSON J J. The Belousov-Zhabotinskii Reaction, Lecture Notes in Biomathematics (LNBM, volume 10)[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [5] YANG Y, JIANG D Q, O'REGAN D, et al. Dynamics of the stochastic Belousov-Zhabotinskii chemical reaction model[J]. Mathematics, 2020, 8(5): 663.
- [6] ZHANG W W, MENG X Z, DONG Y L. Periodic solution and ergodic stationary distribution of stochastic SIRS epidemic systems with nonlinear perturbations[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2019, 32(4): 1104-1124.
- [7] HAN B T, JIANG D Q, HAYAT T, et al. Stationary distribution and extinction of a stochastic staged progression AIDS model with staged treatment and second-order perturbation[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2020, 140: 110238.
- [8] NGUYEN D H, YIN G. Coexistence and exclusion of stochastic competitive Lotka-Volterra models[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(3): 1192-1225.
- [9] ZU L, JIANG D Q, O'REGAN D, et al. Ergodic property of a Lotka-Volterra predator-prey model with white noise higher order perturbation under regime switching[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 330: 93-102.
- [10] LIU Q, JIANG D Q. Periodic solution and stationary distribution of stochastic predator-prey models with higher-order perturbation[J]. Journal of Nonlinear Science, 2018, 28(2): 423-442.
- [11] LIU Q, JIANG D Q. Stationary distribution and extinction of a stochastic SIR model with nonlinear perturbation[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 73: 8-15.
- [12] KHASMINSKII R. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. New York: Springer, 1980.
- [13] ZHU C, YIN G. Asymptotic properties of hybrid diffusion systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 46(4): 1155-1179.
- [14] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Review, 2001, 43(3): 525-546.