第 49 卷 第 4 期 延边大学学报(自然科学版) Vol. 49 No. 4
2023 年 12 月 Journal of Yanbian University (Natural Science Edition) Dec. 2023

文章编号: 1004-4353(2023)04-0308-03

有限生成群作用的 Gromov-Hausdorff 跟踪性

刘鑫磊, 董美花
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 将 Gromov-Hausdorff 跟踪性(GH-跟踪性)和等距跟踪性的概念推广到了紧致度量空间上的有限生成群作用,并利用类比推理的方法得到如下结果:若群作用具有伪轨跟踪性,则其具有 GH-跟踪性;若群作用具有 GH-跟踪性,则其具有等距跟踪性.该结果可为研究拓扑动力系统的跟踪性提供参考.

关键词: Gromov-Hausdorff 跟踪性; 等距跟踪性; 群作用; 伪轨跟踪性; 紧致空间
中图分类号: O192 **文献标志码:** A

Gromov-Hausdorff shadowing property for finitely generated group actions

LIU Xinlei, DONG Meihua
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The concepts of Gromov-Hausdorff shadowing property (GH-shadowing property) and isometric shadowing property were extended to finite generated group actions on compact metric spaces, and the following results were obtained using analogical reasoning: if the group action has the pseudo-orbit tracing property, it has GH-shadowing property; if the group action has GH-shadowing property, then it has isometric shadowing property. This result can provide a reference for the shadowing property research of topological dynamical systems.

Keywords: Gromov-Hausdorff hadowing property; isometric shadowing property; group action; pseudo-orbit tracing property; compact metric space

0 引言

由于伪轨跟踪性对研究拓扑稳定性具有重要作用,且它与轨道的渐近性质密切相关,因此近年来一些学者对其进行了研究[1-6]. 2017 年,Arbieto 等[7]首次将同胚上的 GH-距离应用于拓扑动力系统中,此后一些学者在此基础上研究了 Gromov-Hausdorff 意义下的拓扑动力系统. 例如:2021 年,Dong 等[8]将 GH-距离从同胚映射推广至有限生成群作用,并在 Gromov-Hausdorff 意义下研究了群作用的拓扑稳定性;2022 年,Lee 等[9]在 Gromov-Hausdorff 意义下研究了同胚的拓扑稳定性和跟踪性. 基于上述研究,本文将文献[9]中的同胚映射推广至有限生成群作用,并得到如下结果:若群作用具有伪轨跟踪性,则其具有 Gromov-Hausdorff 跟踪性(GH-跟踪性);若群作用具有 GH-跟踪性,则其具有等距跟踪性.

收稿日期: 2023-10-08
基金项目: 国家自然科学基金(12201541);吉林省教育厅科学技术研究规划项目(612021001)
第一作者: 刘鑫磊(1998—),男,硕士研究生,研究方向为拓扑动力系统.
通信作者: 董美花(1982—),女(朝鲜族),博士,副教授,研究方向为拓扑动力系统.

1　预备知识

首先给出本文所需的一些基本概念. 设 G 为有限生成群，e 为 G 的单位元，A 为 G 的有限生成元集，X 为紧致度量空间. 用 $T:G\times X\to X$ 表示 G 在 X 上的连续群作用，记 $Act(G,X)$ 为全体 G 在 X 上的连续群作用集合. 若 $T\in Act(G,X)$，$S\in Act(G,Y)$，则 T 和 S 之间关于生成元集 A 的 GH^0 距离为 $d_{\mathrm{GH}^0,A}(T,S)=\inf\limits_{a\in A}\{\Delta>0:\exists\,\Delta$-等距映射 $i:X\to Y$ 与 $j:Y\to X$ 使得 $d(i\circ T_a,S_a\circ i)<\Delta$ 且 $d(T_a\circ j,j\circ S_a)<\Delta\}$. 若对于任意的 $a\in A$、$g\in G$、$d(T_a x_g,x_{ag})<\delta$ 成立，则称序列 $\{x_g\}_{g\in G}\subset X$ 是 T 关于 A 的 δ-伪轨.

定义 1　对于任意的 $\varepsilon>0$，若存在 $\delta_*>0$，使得对于任意的 $0<\delta<\delta_*$ 和满足 $d_{\mathrm{GH}^0,A}(T,S)\leqslant\delta$ 的任意有限生成群作用 $S\in Act(G,Y)$ 存在 δ-等距映射 $j:Y\to X$；且若对于 S 的任意 δ-伪轨 $\{y_g\}_{g\in G}$ 存在 $x\in X$，使得 $d(T_g(x),j(y_g))\leqslant\varepsilon$：则称有限生成群作用 $T\in Act(G,X)$ 关于生成元集 A 具有 GH-跟踪性.

注 1　当群 G 为整数加群时，有限生成元集 $A=\{1,-1\}$. 由于此时的群作用 T 是紧致度量空间 X 上的同胚映射，因此同胚上的 GH-跟踪性为定义 1 的特例. 因由文献[4]中的性质 1 易证定义 1 不受生成元选取的影响，故本文在此省略.

定义 2　若有限生成群作用 $T\in Act(G,X)$ 关于生成元集 A 具有 GH-跟踪性，则称 T 具有 GH-跟踪性.

定义 3　对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_*>0$，使得对于任意 $0<\delta<\delta_*$ 和满足 $d_{\mathrm{GH}^0}(T,S)\leqslant\delta$ 的有限生成群作用 $S\in Act(G,Y)$ 存在 δ-等距映射 $j:Y\to X$；且若对于任意 $y\in Y$，存在 $x\in X$，使得 $d(T_g(x),j(S_g(y)))\leqslant\varepsilon$ 成立：则称群作用 T 具有弱 GH-跟踪性.

注 2　GH-跟踪性与弱 GH-跟踪性二者的不同之处为：前者是 S 的 δ-伪轨，后者是 S 的真轨. 但由于每个 S 的真轨一定是 S 的 δ-伪轨，所以当 T 具有 GH-跟踪性时，T 一定具有弱 GH-跟踪性.

定义 4　对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_*>0$，使得对于任意的 $0<\delta<\delta_*$ 存在 δ-等距映射 $j:Y\to X$；且若对于 T 的任意 δ-伪轨 $\{x_g\}_{g\in G}$，存在 $x\in X$，使得 $d(T_g(x),j(x_g))\leqslant\varepsilon$ 对于任意 $g\in G$ 均成立：则称群作用 T 具有等距跟踪性.

2　主要结果及其证明

定理 1　若群作用 T 具有伪轨跟踪性，则 T 具有 GH-跟踪性.

证明　设 G 为有限生成群，A 为 G 的有限生成元集，其中 $a\in A$ 为群 G 的生成元. 设 $T\in Act(G,X)$，$\varepsilon>0$. 由于 T 具有伪轨跟踪性，所以存在 $\delta'>0$. 设 $\delta_*=\dfrac{\delta'}{3}$，$0<\delta<\delta_*$，由此可知若 $S\in Act(G,Y)$ 为有限生成群 G 在紧致度量空间 Y 上的连续作用，且 T 与 S 之间的距离满足 $d_{\mathrm{GH}^0}(T,S)\leqslant\delta$，则存在 δ-等距映射 $j:Y\to X$ 使得 $d(T_a\circ j,j\circ S_a)\leqslant\delta$. 设 $\{y_g\}_{g\in G}$ 为 S 的任意一条 δ-伪轨，即 $d(S_a(y_g),y_{ag})\leqslant\delta$ 对于任意的 $a\in A$ 和 $g\in G$ 均成立，则由此可得对于任意的 $g\in G$ 有：

$$\begin{aligned}&d(T_a(j(y_g)),j(y_{ag}))\leqslant d(T_a(j(y_g)),j(S_a(y_g)))+d(j(S_a(y_g)),j(y_{ag}))\leqslant\\&\quad\delta+\delta+d(S_a(y_g),y_{ag})\leqslant 3\delta\leqslant\delta'.\end{aligned}$$

由上式可知，$\{j(y_g)\}_{g\in G}$ 是 T 的 δ'-伪轨. 由于 T 具有伪轨跟踪性，因此可知存在 $x\in X$，使得 $d(T_g(x),j(y_g))\leqslant\varepsilon$ 成立，故 T 具有 GH-跟踪性. 定理 1 证毕.

定理 2　若 T 具有 GH-跟踪性，则 T 具有等距跟踪性.

（下转第 340 页）

参考文献:

[1] 赖祥鑫,韦煜明,彭华勤.一类具有媒体报道影响和饱和发生率的 SIRI 传染病模型[J].南宁师范大学学报(自然科学版),2020,37(3):20-31.

[2] LI T J, XIAO Y N. Complex dynamics of an epidemic model with saturated media coverage and recovery[J]. Nonlinear Dynamics, 2022,107(3):2995-3023.

[3] 李录苹,孔丽丽.考虑媒体报道效应的 SEIQR 传染病模型的研究[J].山西大同大学学报(自然科学版),2021,37(6):54-56.

[4] 张雪妮,刘俊利.受媒体报道影响的离散传染病模型的分析[J].哈尔滨商业大学学报(自然科学版),2022,38(3):332-338.

[5] 张钰倩,张太雷,侯雯珊,等.一类具有媒体效应和追踪隔离的 SIQR 时滞传染病模型[J].浙江大学学报(理学版),2022,49(2):159-169.

[6] 阳丽君,班相函,王文龙.一类受媒体报道滞后性影响的传染病模型[J].湖北民族大学学报(自然科学版),2022,40(4):420-424.

[7] 刘中凯,刘俊利,刘白茹.受媒体报道和疫苗接种影响的传染病模型分析[J].哈尔滨商业大学学报(自然科学版),2022,38(4):442-449.

[8] UPADHYAY R K, KUMARI S. Discrete and data packet delays as determinants of switching stability in wireless sensor networks[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019,72(8):513-536.

(上接第 309 页)

证明 给定 $\varepsilon>0$,并根据群作用 T 的 GH-跟踪性选取 δ_*.若 $0<\delta<\delta_*$,则令 $S=T$,由此可得 $d_{GH^0}(T,S)=0<\delta$.因此存在 δ-等距映射 $j:Y\to X$,使得对于 S 的任意 δ-伪轨 $\{x_g\}_{g\in G}$ 存在 $x\in X$,使得 $d(T_g(x),j(x_g))\leqslant\varepsilon$ 对于任意的 $g\in G$ 均成立,故 T 具有等距跟踪性.定理 2 证毕.

根据定理 1 与定理 2 的证明,可以得到以下几种跟踪性质间的关系:

T 具有伪轨跟踪性

$\Downarrow$

T 具有 GH-跟踪性 $\Rightarrow T$ 具有弱 GH-跟踪性

$\Downarrow$

T 具有等距跟踪性.

参考文献:

[1] OSIPOV A V, TIKHOMIROV S B. Shadowing for actions of some finitely generatedgroups[J]. Dynamical Systems, 2014,29(3):337-351.

[2] DONG M H, JUNG W C, LEE K H. Pointwise continuous shadowing and stability in group actions[J]. Journal of the Chungcheong Mathematical Society, 2019,32(4):509-524.

[3] KAWAGUCHI N. Quantitative shadowable points[J]. Dynamical Systems, 2017,32(4):504-518.

[4] OSIPOV A V, TIKHOMIROV S B. Shadowing for actions of some finitely generated groups[J]. Dynamical Systems, 2014,29(3):337-351.

[5] SHIN B. On the set of shadowable measures[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019,469(2):872-881.

[6] LEE K H, MORALES C A. Topological stability and pseudo-orbit tracing property for expansive measures[J]. Journal of Differential Equations, 2017,262(6):3467-3487.

[7] ARBIETO A, ROJAS C A M. Topological stability from Gromov-Hausdorff viewpoint[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2017,37(7):3531-3544.

[8] DONG M H, LEE K H, MORALES C. Gromov-Hausdorff stability for group actions[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2021,41(3):1347-1357.

[9] LEE J H, MORALES C. Gromov-Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs[M]. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2022:79-85.