文章编号: 1004-4353(2023)04-0298-10

一类具有饱和发生率的染病食饵-捕食者随机模型的动力学分析

赵玉凤
(山西工商学院 计算机信息工程学院, 太原 030000)

摘要: 研究了一类带有饱和发生率和随机比率依赖的 Holling Ⅲ型功能反应的染病食饵-捕食者随机模型.首先,利用 Itô 公式和构造的 Lyapunov 函数证明了染病食饵-捕食者随机模型存在唯一的全局正解.其次,利用 Has'miniskii 遍历性理论证明了随机模型存在唯一的遍历平稳分布.再次,利用 Itô 公式、大数定律、鞅理论得到了染病食饵种群的阈值 $\mathfrak{R}_0^h$: 当 $\mathfrak{R}_0^h<1$ 时疾病将趋于灭绝,当 $\mathfrak{R}_0^h>1$ 时疾病将长期存在.最后,利用数值仿真验证了所得结果的正确性.

关键词: 染病食饵-捕食者随机模型; 饱和发生率; Holling Ⅲ型功能反应函数; 比率依赖; 平稳分布; 灭绝
中图分类号: O175.12 **文献标志码:** A

Dynamic analysis of a infected prey-predator stochastic model with saturation incidence

ZHAO Yufeng
(*College of Computer and Information Engineering*, *Shanxi Technology and Business College*, *Taiyuan* 030000, *China*)

Abstract: In this paper, we investigated the dynamics of a stochastic ratio-dependent infected prey-predator model with saturation incidence and Holling-type Ⅲ functional response. Firstly, we proved that the unique solution of stochastic model was globally positive by using Itô formula and constructing Lyapunov function. Secondly, the existence of a unique ergodic stationary distribution was studied by using the ergodicity theory of Has'miniskii. Thirdly, the threshold $\mathfrak{R}_0^h$ for the infected prey population was obtained by using Itô formula, the law of large numbers, and the martingale theory, that is, the disease will tend to extinction if $\mathfrak{R}_0^h<1$, and it will exist for a long time if $\mathfrak{R}_0^h>1$. Finally, numerical simulations were used to verify the correctness of the obtained results.

Keywords: infected prey-predator stochastic model; saturation incidence; Holling-type Ⅲ functional response function; ratio-dependent; stationary distribution; extinction

0 引言

由于 Holling Ⅲ型功能反应函数更适合于描述脊椎动物种群随时间的变化规律,因此一些学者对

收稿日期: 2023-06-16
基金项目: 山西省高等学校科技创新计划项目(2022L645);山西省高等学校教学改革创新项目(J20221313);山西省教育科学"十四五"规划课题(GH-220495)
作者简介: 赵玉凤(1985—),女,硕士,讲师,研究方向为生物数学.

Holling Ⅲ型功能反应函数的捕食模型进行了研究[1-3]. 在捕食者-食饵模型中，由于捕食者的平均生长率需要考虑食饵丰度与捕食者丰度的比值，因此一些学者进而研究了具有比例依赖的功能反应的食饵-捕食者模型[4-5]. 为了解不同生态系统的动力学性质，学者们利用 Itô 公式、大数定律、鞅理论分析了不同系统的动力学性质，其中包括全局正解的存在唯一性、遍历平稳分布的存在性、灭绝性和持久性、周期解等[4-8]. 文献[9]的研究表明，饱和发生率（$\frac{bX_1X_2}{1+aX_2}$）通常比双线性发生率（bX_1X_2）更适合于描述某些流行病的传播. 基于上述研究，本文提出了一类带有饱和发生率和比率依赖的 Holling Ⅲ 型功能反应的染病食饵-捕食者模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X_1(t)}{\mathrm{d}t}=rX_1(t)\left(1-\dfrac{X_1(t)}{k}\right)-\dfrac{\alpha X_1(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}-\dfrac{bX_1(t)X_2(t)}{1+aX_2(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}X_2(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{bX_1(t)X_2(t)}{1+aX_2(t)}-d_1X_2(t)-\dfrac{\beta X_2(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{c\alpha X_1(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}+\dfrac{c\beta X_2(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}-d_2Y(t).\end{cases}\tag{1}$$

其中：$X_1(t)$ 为易感食饵种群的密度，$X_2(t)$ 为被感染的食饵种群的密度，$Y(t)$ 为捕食者种群的密度，r 为内禀增长率，$\frac{r}{k}$ 为种间竞争率，k 为易感食饵的承载能力，$\frac{bX_1(t)X_2(t)}{1+aX_2(t)}$ 为饱和发生率，a 为饱和常数，b 为传输速率，c 为食饵转化为捕食者的系数，α 为捕食者对易感食饵的捕获率，β 为捕食者对感染食饵的捕获率，m 为半饱和常数，d_1 为感染食饵的自然死亡率，d_2 为捕食者的自然死亡率.

考虑到环境噪声会对生物学系统产生不可忽略的影响，因此本文对系统(1) 进行了线性扰动，以此建立了一个如下具有饱和发生率和 logistic 增长的随机模型(式(2))，并对其动力学性质进行了研究.

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_1(t)=\left[rX_1(t)\left(1-\dfrac{X_1(t)}{k}\right)-\dfrac{\alpha X_1(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}-\dfrac{bX_1(t)X_2(t)}{1+aX_2(t)}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1X_1(t)\mathrm{d}B_1,\\ \mathrm{d}X_2(t)=\left[\dfrac{bX_1(t)X_2(t)}{1+aX_2(t)}-d_1X_2(t)-\dfrac{\beta X_2(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}\right]\mathrm{d}t+\sigma_2X_2(t)\mathrm{d}B_2,\\ \mathrm{d}Y(t)=\left[\dfrac{c\alpha X_1(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}+\dfrac{c\beta X_2(t)Y^2(t)}{(X_1(t)+X_2(t))^2+mY^2(t)}-d_2Y(t)\right]\mathrm{d}t+\sigma_3Y(t)\mathrm{d}B_3.\end{cases}\tag{2}$$

式中：$\{B_i\}_{t\geqslant 0}(i=1,2,3)$ 是相互独立的标准布朗运动.

1　全局正解的存在性和唯一性

随机微分方程 $\mathrm{d}X(t)=f(X(t))\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{m}g_k(X)\mathrm{d}B_k(t)$. $X(t)$ 的扩散矩阵为 $\boldsymbol{H}(x)=(h_{ij}(x))$，$h_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{m}g_k^i(x)g_k^j(x)$. 用 L 作用于函数 $V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^+)$ 可得：

$$LV(X,t)=V_t(X,t)+V_X(X,t)f(X,t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(X,t)V_{XX}(X,t)g(X,t)],$$

其中 $V_t=\frac{\partial V}{\partial t}$, $V_X=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_d}\right)$, $V_{XX}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{d\times d}$.

设 $X(t)\in\mathbf{R}^n$，则 Lyapunov 函数 V 的 Itô 公式为 $\mathrm{d}V(X(t),t)=LV(X(t),t)\mathrm{d}t+V_X(X(t),t)g(X(t),t)\mathrm{d}B(t)$.

定理 1　对于任意的初值$(X_1(0),X_2(0),Y(0))\in\mathbf{R}_+^3$，当 $t\geqslant 0$ 时，系统(2) 存在唯一的全局正解

$(X_1(t), X_2(t), Y(t))$，且该解以概率 1 在 $\mathbf{R}_+^3$ 中. 即当 $t \geqslant 0$ 时，$(X_1(t), X_2(t), Y(t)) \in \mathbf{R}_+^3$ a.s..

证明 由于定理 1 的证明过程与文献[4]中定理 2.1 的证明过程相似，故省略.

2 平稳分布的遍历性

引理 1(Has'miniskii)[10] 设有界域 $D \subset \mathbf{R}^d$，且其边界是正则的，若：

1) 存在一个正数 M，使得 $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant M|\xi|^2$，$x \in D$，$\xi \in \mathbf{R}^d$；

2) 存在一个非负 C^2-函数 V，使得对于任意的 $\mathbf{R}^d \backslash D$，LV 是负的，

则系统(2)中的马尔可夫过程 $X(t)$ 有一个遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$.

定理 2 假设 $\widetilde{\mathfrak{R}}_0^h = \left(r + d_2 + \frac{\sigma_3^2}{2} - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\alpha}{m} - \frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}\right) \Big/ \left[\frac{r}{bk}\left(d_1 + \frac{\beta}{m} + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right] > 1$，环境噪声足够小，$\sigma_2^2 < 2d_1$，$\sigma_3^2 < 2d_2$，则对于任意的初值 $(X_1(0), X_2(0), Y(0)) \in \mathbf{R}_+^3$，系统(2)存在唯一的遍历平稳分布.

证明 由扩散矩阵的计算公式得系统(2)的扩散矩阵为：

$$\boldsymbol{H}(X_1, X_2, Y) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 X_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 X_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 Y^2 \end{bmatrix}.$$

于是再由正定矩阵的判定易得对于任意的 $(X_1, X_2, Y) \subset \mathbf{R}_+^3$，$\boldsymbol{H}(X_1, X_2, Y)$ 是正定的.

定义 C^2-函数 $\widetilde{V} = M\left(-\ln X_1 - \frac{r}{bk}\ln X_2 + \frac{b}{d_1}X_2\right) + \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2 + \frac{Y}{c}\right)^2$，其中：

$$M = \frac{bk}{r\left(d_1 + \frac{\beta}{m} + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\mathfrak{R}}_0^h - 1)} \max\{2 + \bar{f}_1 + f_2 + f_3, 2 + f_1 + \bar{f}_2 + f_3, 1 + f_1 + f_2 + \bar{f}_3\},$$

函数 f_1、f_2、f_3、$\bar{f}_1$、$\bar{f}_2$ 和 $\bar{f}_3$ 的表达式分别为：

$$f_1(X_1) = -\frac{r}{k}X_1^3 + \left(\frac{2r}{5} + \frac{2r}{5c}\right)X_1^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\sigma_1^2}{2} + r\right)X_1^2,$$

$$f_2(X_2) = -\left(d_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)X_2^2 + \frac{3r}{5}X_2^{\frac{5}{3}},\ f_3(Y) = -\frac{1}{c^2}\left(d_2 - \frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2 + \frac{3r}{5c}Y^{\frac{5}{3}},$$

$$\bar{f}_1(X_1) = -\frac{r}{2k}X_1^3 + \left(\frac{2r}{5} + \frac{2r}{5c}\right)X_1^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\sigma_1^2}{2} + r\right)X_1^2,$$

$$\bar{f}_2(X_2) = -\frac{d_1 - \sigma_2^2/2}{2}X_2^2 + \frac{3r}{5}X_2^{\frac{5}{3}},\ \bar{f}_3(Y) = -\frac{1}{2c^2}\left(d_2 - \frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2 + \frac{3r}{5c}Y^{\frac{5}{3}}.$$

参考文献[4]中的方法可得，$\widetilde{V}$ 存在唯一的最小值点 $(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{Y})$. 定义一个非负 C^2-Lyapunov 函数，即 $V = M\left(-\ln X_1 - \frac{r}{bk}\ln X_2 + \frac{b}{d_1}X_2 + \ln Y\right) + \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2 + \frac{Y}{c}\right)^2 - \widetilde{V}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{Y})$，并令：

$$V_1 = -\ln X_1 - \frac{r}{bk}\ln X_2 + \frac{b}{d_1}X_2 + \ln Y,\ V_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2 + \frac{Y}{c}\right),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{L}V_1 = & -r + \frac{rs}{k} + \frac{\alpha Y^2}{mY^2 + (X_1 + X_2)^2} + \frac{bX_2}{1 + aX_2} + \frac{b^2 X_1 X_2}{d_1(1 + aX_2)} - bX_2 - \\ & \frac{b\beta X_2 Y^2}{d_1[mY^2 + (X_1 + X_2)^2]} - \frac{rs}{k(1 + aX_2)} + \frac{rd_1}{bk} + \frac{r\beta Y^2}{bk[mY^2 + (X_1 + X_2)^2]} + \\ & \frac{c\alpha X_1 Y}{mY^2 + (X_1 + X_2)^2} - d_2 + \frac{c\beta X_2 Y}{mY^2 + (X_1 + X_2)^2} + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \frac{r}{bk}\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) \leqslant \end{aligned}$$

$$-r+\frac{rs}{k}+\frac{\alpha Y^2}{mY^2+(X_1+X_2)^2}+bX_2-bX_2+\frac{b^2X_1X_2}{d_1(1+aX_2)}-\frac{rX_1}{k}+\frac{arX_1X_2}{k(1+aX_2)}+$$
$$\frac{rd_1}{bk}+\frac{r\beta}{bkm}+\frac{c\alpha+c\beta}{2\sqrt{m}}-d_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\frac{r}{bk}\sigma_2^2-\sigma_3^2\right)\leqslant$$
$$-r+\frac{\alpha}{m}+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)X_1X_2+\frac{rd_1}{bk}+\frac{r\beta}{bkm}+\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}-d_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\frac{r}{bk}\sigma_2^2-\sigma_3^2\right)=$$
$$-\left[r+d_2+\frac{\sigma_3^2}{2}-\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{\alpha}{m}-\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}\right]+\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)X_1X_2.$$

于是由不等式 $xy\leqslant\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}$ 可得：

$$\mathrm{L}V_2=rX_1^2-\frac{r}{k}X_1^3+rX_1X_2-d_1X_2^2+\frac{rX_1Y}{c}-\frac{d_2Y^2}{c^2}+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2X_1^2+\sigma_2^2X_2^2+\frac{\sigma_3^2Y^2}{c^2}\right)\leqslant$$
$$rX_1^2-\frac{r}{k}X_1^3+\left(\frac{2}{5}r+\frac{2r}{5c}\right)X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{\sigma_1^2}{2}X_1^2-\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)X_2^2+\frac{3}{5}rX_2^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2+\frac{3r}{5c}Y^{\frac{5}{3}},$$
$$\mathrm{L}V=M\mathrm{L}V_1+\mathrm{L}V_2\leqslant M\left[-\left(r+d_2+\frac{\sigma_3^2}{2}-\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{\alpha}{m}-\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}\right)+\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)X_1X_2\right]-\frac{r}{k}X_1^3+\left(\frac{2}{5}r+\frac{2r}{5c}\right)X_1^{\frac{5}{2}}+\left(\frac{\sigma_1^2}{2}+r\right)X_1^2-\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)X_2^2+\frac{3}{5}rX_2^{\frac{5}{3}}-$$
$$\frac{1}{c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2+\frac{3r}{5c}Y^{\frac{5}{3}}=-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)X_1X_2M-$$
$$\frac{r}{k}X_1^3+\left(\frac{2}{5}r+\frac{2r}{5c}\right)X_1^{\frac{5}{2}}+\left(\frac{\sigma_1^2}{2}+r\right)X_1^2-\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)X_2^2+\frac{3}{5}rX_2^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2+\frac{3r}{5c}Y^{\frac{5}{3}}\leqslant$$
$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)X_1X_2M+f_1(X_1)+f_2(X_2)+f_3(Y).$$

其中：$\widetilde{\Re}_0^h=\left(r+d_2+\frac{\sigma_3^2}{2}-\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{\alpha}{m}-\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}\right)\Big/\left(\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right)$.

设有界集 $D=\left\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:\varepsilon\leqslant X_1\leqslant\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\leqslant X_2\leqslant\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\leqslant Y\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\right\}$，$\mathbf{R}_+^3\backslash D=D_1^c\cup D_2^c\cup D_3^c\cup D_4^c\cup D_5^c\cup D_6^c$，其中：$D_1^c=\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:0<X_1<\varepsilon\}$，$D_2^c=\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:0<X_2<\varepsilon\}$，$D_3^c=\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:0<Y<\varepsilon\}$，$D_4^c=\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:X_1>\frac{1}{\varepsilon}\}$，$D_5^c=\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:X_2>\frac{1}{\varepsilon}\}$，$D_6^c=\{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3:Y>\frac{1}{\varepsilon}\}$. 上式中 ε 是满足下列条件的足够小的正数，且同时满足：

$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon+f_1(X_1)+\bar{f}_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant-1,\tag{3}$$
$$\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon<\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)/2,\tag{4}$$
$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon+\bar{f}_1(X_1)+f_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant-1,\tag{5}$$
$$\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon<\frac{r}{2k},\tag{6}$$
$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+A+\frac{3r}{5c}\varepsilon^{\frac{5}{3}}\leqslant-1,\tag{7}$$

$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+B-\frac{r}{2k\varepsilon^3}\leqslant -1, \tag{8}$$

$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+C-\frac{1}{2\varepsilon^3}\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\leqslant -1, \tag{9}$$

$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+D-\frac{1}{2\varepsilon^2c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)\leqslant -1. \tag{10}$$

其中:

$$A=\sup_{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3}\left\{M\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}\right)+f_1(X_1)+f_2(X_2)\right\},$$

$$B=\sup_{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3}\left\{M\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}\right)+\bar f_1(X_1)+f_2(X_2)+f_3(Y)\right\},$$

$$C=\sup_{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3}\left\{\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}M+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}M\right)+f_1(X_1)+\bar f_2(X_2)+f_3(Y)\right\},$$

$$D=\sup_{(X_1,X_2,Y)\in\mathbf{R}_+^3}\left\{\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}M+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}M\right)+f_1(X_1)+f_2(X_2)+\bar f_3(Y)\right\}.$$

情形 1 若$(X_1,X_2,Y)\in D_1^c$,则显然有 $X_1X_2<\varepsilon X_2<\varepsilon(1+X_2^2)$.由此再由式(3)和式(4)可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}V\leqslant&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon+f_1(X_1)+\\&\left[-\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)/2+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon\right]X_2^2+\bar f_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant\\&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon+f_1(X_1)+\bar f_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant -1.\end{aligned}$$

情形 2 若$(X_1,X_2,Y)\in D_2^c$,则显然有 $X_1X_2<\varepsilon X_1<\varepsilon(1+X_1^3)$.由此再由式(5)和式(6)可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}V\leqslant&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon+\bar f_1(X_1)+\\&\left[-\frac{r}{2k}+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon\right]X_1^3+f_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant\\&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\varepsilon+\bar f_1(X_1)+f_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant -1.\end{aligned}$$

情形 3 若$(X_1,X_2,Y)\in D_3^c$,则显然有 $X_1X_2\leqslant\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}$.由此再由式(7)可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}V\leqslant&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\cdot\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}M+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\cdot\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}M+\\&f_1(X_1)+f_2(X_2)-\frac{1}{c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2+\frac{3r}{5c}\varepsilon^{\frac{5}{3}}\leqslant\\&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+A+\frac{3r}{5c}\varepsilon^{\frac{5}{3}}\leqslant -1.\end{aligned}$$

情形 4 若$(X_1,X_2,Y)\in D_4^c$,则显然有 $X_1X_2\leqslant\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}$ 和 $-\frac{r}{2k}X_1^3<-\frac{r}{2k}\varepsilon^{-3}$.由此再由式(8)可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}V\leqslant&-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\cdot\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}M+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\cdot\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}M-\\&\frac{r}{k}X_1^3+\left(\frac{2r}{5}+\frac{2r}{5c}\right)X_1^{\frac{5}{2}}+\left(\frac{\sigma_1^2}{2}+r\right)X_1^2-\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)X_2^2+\frac{3r}{5}X_2^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2+\frac{3r}{5c}\varepsilon^{\frac{5}{3}}\leqslant\end{aligned}$$

$$-M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+M\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}\right)-\frac{r}{2k}\varepsilon^{-3}+\bar{f}_1(X_1)+$$
$$f_2(X_2)+f_3(Y)\leqslant -M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+B-\frac{r}{2k\varepsilon^3}\leqslant -1.$$

情形 5　若 $(X_1,X_2,Y)\in D_5^c$，则显然有 $X_1X_2\leqslant \frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}$ 和 $-\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)X_2^2c-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)$. 由此再由式(9)可得：

$$LV\leqslant -M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}\right)+f_1(X_1)+\bar{f}_2(X_2)+$$
$$f_3(Y)-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\leqslant -M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+C-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\leqslant -1.$$

情形 6　若 $(X_1,X_2,Y)\in D_6^c$，则显然有 $X_1X_2\leqslant \frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{2}}$ 和 $-\frac{1}{2c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)Y^2<-\frac{1}{2\varepsilon^2c^2}\left(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)$. 由此再由式(10)可得：

$$LV\leqslant -M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+\left(\frac{b^2}{d_1}+\frac{ar}{k}\right)M\left(\frac{2}{5}X_1^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{5}X_2^{\frac{5}{3}}\right)+f_1(X_1)+f_2(X_2)+$$
$$\bar{f}_3(Y)-\frac{1}{2\varepsilon^2c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)\leqslant -M\left[\frac{r}{bk}\left(d_1+\frac{\beta}{m}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\widetilde{\Re}_0^h-1)\right]+D-\frac{1}{2\varepsilon^2c^2}\left(d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right)\leqslant -1.$$

由上述讨论和引理 1 可得，系统(2)存在一个平稳分布，定理 2 得证.

3　灭绝性和持久性

引理 2[11]　设 $X(t)\in C(\Omega_X[0,\infty),\mathbf{R}_+)$，则有：

1) 如果存在 $T\,(T>0)$、$\lambda_0(\lambda_0>0)$、λ 和 n_i，使得当 $t\geqslant T$ 时有 $\ln X(t)\leqslant \lambda t-\lambda_0\int_0^t X(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{j}n_iB(t)$ a.s.，则有 $\begin{cases}\langle X(t)\rangle^*\leqslant \frac{\lambda}{\lambda_0}\ \text{a.s.},\ \lambda\geqslant 0;\\ \lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0\ \text{a.s.},\ \lambda<0,\end{cases}$ 其中 $\langle X(t)\rangle^*=\limsup\limits_{t\to\infty}\langle X(t)\rangle$，$\langle X(t)\rangle=\frac{1}{t}\int_0^t X(t)\mathrm{d}t$.

2) 如果存在 $T\,(T>0)$、$\lambda_0(\lambda_0>0)$、$\lambda\,(\lambda>0)$ 和 n_i，使得当 $t\geqslant T$ 时有 $\ln X(t)\geqslant \lambda t-\lambda_0\int_0^t X(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{j}n_iB(t)$ a.s.，则有 $\langle X(t)\rangle^*\geqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}$ a.s.，其中 $\langle X(t)\rangle^*=\liminf\limits_{t\to\infty}\langle X(t)\rangle$.

定理 3　设 $(X_1(t),X_2(t),Y(t))$ 是系统(2)的解，其初值为 $(X_1(0),X_2(0),Y(0))\in\mathbf{R}_+^3$. 若 $r>\frac{\sigma_1^2}{2}$，$\alpha+\beta<2\sqrt{m}(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2})/c$，$\Re_0^h=\left[bk\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\right]/\left[r\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right]<1$，则有：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln X_2(t)}{t}\leqslant\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\Re_0^h-1)<0\ \text{a.s.},$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln Y(t)}{t}\leqslant-\left[\left(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)-\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}\right]<0\ \text{a.s.},$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s=k\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)/r\ \text{a.s.}.$$

证明 对 $\ln X_1$ 利用 Itô 公式可得：

$$\mathrm{d}\ln X_1=\left[r-\frac{rX_1}{k}-\frac{\alpha Y^2}{\beta Y^2+(X_1+X_2)^2}-\frac{bX_2}{1+aX_2}-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\leqslant$$
$$\left(r-\frac{r}{k}X_1-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t). \tag{11}$$

对式(11)从0到t进行积分后再除以t可得：

$$\frac{1}{t}\ln\frac{X_1(t)}{X_1(0)}\leqslant r-\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{r}{k}\left(\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s\right)/t+\left(\int_0^t\sigma_1\mathrm{d}B_1(\theta)\right)/t,$$
$$\ln\frac{X_1(t)}{X_1(0)}\leqslant\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)t-\frac{r}{k}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_1\mathrm{d}B_1(\theta).$$

由上式和引理2中的结论1)可得$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}=\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)/\left(\frac{r}{k}\right)=k\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)/r$ a.s..

类似地,对 $\ln X_2$ 利用 Itô 公式可得：

$$\mathrm{d}\ln X_2=\left[\frac{bX_1}{1+aX_2}-d_1-\frac{\beta Y^2}{mY^2+(X_1+X_2)^2}-\frac{\sigma_2^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\leqslant$$
$$\left[bX_1-\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t). \tag{12}$$

对式(12)从0到t进行积分后再除以t可得$\frac{1}{t}\ln\frac{X_2(t)}{X_2(0)}\leqslant\left(b\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s\right)/t-\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)+\left(\int_0^t\sigma_2\mathrm{d}B_2(\theta)\right)/t$.由上式和引理2中的结论1)可得：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln X_2(t)}{t}\leqslant bk\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)/r-\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)=\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\Re_0^h-1)<0\ \text{a.s.}.$$

类似地,对 $\ln Y$ 利用 Itô 公式可得：

$$\mathrm{d}\ln Y=\left[\frac{c\alpha X_1P}{mY^2+(X_1+X_2)^2}+\frac{c\beta X_2P}{mY^2+(X_1+X_2)^2}-d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_3\mathrm{d}B_3(t)\leqslant$$
$$\left[\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}-d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_3\mathrm{d}B_3(t). \tag{13}$$

对式(13)从0到t进行积分后再除以t可得$\frac{1}{t}\ln\frac{Y(t)}{Y(0)}\leqslant\left[\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}-d_2-\frac{\sigma_3^2}{2}\right]+\left(\int_0^t\sigma_3\mathrm{d}B_3(\theta)\right)/t$.由该式和引理2中的结论1)可得$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln Y(t)}{t}\leqslant-\left[\left(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2}\right)-\frac{c(\alpha+\beta)}{2\sqrt{m}}\right]<0$ a.s..于是再由$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln Y(t)}{t}<0$ a.s.可知,存在任意小的常数$\varepsilon_1(\varepsilon_1>0)$和$\varepsilon_2(\varepsilon_2>0)$,使得当$t>T$时有$\frac{Y^2}{mY^2+(X_1+X_2)^2}<\varepsilon_1$和$\frac{bX_2}{1+aX_2}<\varepsilon_2$,所以有：

$$\mathrm{d}\ln X_1=\left[r-\frac{rX_1}{k}-\frac{\alpha Y^2}{\beta Y^2+(X_1+X_2)^2}-\frac{bX_2}{1+aX_2}-\frac{\sigma_1^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\geqslant$$
$$\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{rX_1}{k}-\alpha\varepsilon_1-b\varepsilon_2\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t). \tag{14}$$

对式(14)从0到t进行积分后再除以t可得$\frac{1}{t}\ln\frac{X_1(t)}{X_1(0)}\geqslant r-\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{r}{k}\left(\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s\right)/t-\alpha\varepsilon_1-b\varepsilon_2+\left(\int_0^t\sigma_1\mathrm{d}B_1(\theta)\right)/t$.由该式和引理2以及$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$的任意性可得：

$$\ln \frac{X_1(t)}{X_1(0)} \geqslant \left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)t-\frac{r}{k}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s-\alpha\varepsilon_1 t-b\varepsilon_2 t+\int_0^t \sigma_1 \mathrm{d}B_1(\theta)=$$

$$\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}-\alpha\varepsilon_1-b\varepsilon_2\right)t-\frac{r}{k}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma_1 \mathrm{d}B_1(\theta),$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s \geqslant \left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\Big/\left(\frac{r}{k}\right)=k\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\Big/r \text{ a.s.}.$$

于是再由式(12)可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s=k\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)/r$ a.s.，定理 3 证毕.

定理 4　设 $(X_1(t),X_2(t),Y(t))$ 是系统(2)的解，其初值为 $(X_1(0),X_2(0),Y(0))\in\mathbf{R}_+^3$. 若 $r>\frac{\sigma_1^2}{2}$，$\alpha+\beta<2\sqrt{m}(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2})/c$，$\mathfrak{R}_0^h>1$，则有 $\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{\ln X_2(t)}{t}\geqslant\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\mathfrak{R}_0^h-1)>0$ a.s..

证明　对 $\ln X_2$ 利用 Itô 公式可得 $\mathrm{d}\ln X_2=\left[\frac{bX_1}{1+aX_2}-d_1-\frac{\beta Y^2}{mY^2+(X_1+X_2)^2}-\frac{\sigma_2^2}{2}\right]\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)$. 再由定理 3 可知，存在任意小的常数 $\varepsilon_1(\varepsilon_1>0)$ 和 $\varepsilon_2(\varepsilon_2>0)$，使得当 $t>T$ 时有 $\frac{Y^2}{mY^2+(X_1+X_2)^2}<\varepsilon_1$ 和 $X_2<\varepsilon_2$. 由此可得：$\mathrm{d}\ln X_2\geqslant\left(\frac{bX_1}{1+a\varepsilon_2}-d_1-\beta\varepsilon_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\geqslant\left(bX_1-d_1-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)$. 对该式从 0 到 t 进行积分后再除以 t 可得：

$$\frac{1}{t}\ln\frac{X_2(t)}{X_2(0)}\geqslant\left(b\int_0^t X_1(s)\mathrm{d}s\right)/t-\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)+\left(\int_0^t\sigma_2\mathrm{d}B_2(\theta)\right)/t=$$

$$bk\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)/r-\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\geqslant\left(d_1+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)(\mathfrak{R}_0^h-1)>0 \text{ a.s.}.$$

由上式和定理 3 可知：$\mathfrak{R}_0^h$ 是感染食饵种群的阈值；当 $\mathfrak{R}_0^h<1$ 时，疾病将会灭绝；当 $\mathfrak{R}_0^h>1$ 时，疾病将会长期存在. 定理 4 证毕.

4　数值模拟

例 1　设系统(2)的初值 $X_1(0)=10$，$X_2(0)=6$，$Y(0)=4$，$r=0.3$，$k=9$，$b=0.03$，$m=1$，$\alpha=0.03$，$\beta=0.03$，$c=0.8$，$d_1=0.1$，$d_2=0.05$，$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0.2$. 将上述初值代入定理 2 的条件中进行计算可得 $\widetilde{\mathfrak{R}}_0^h=1.776>1$，$\sigma_2^2=0.04<0.2=2d_1$，$\sigma_3^2=0.04<0.1=2d_2$. 该结果满足定理 2 的条件，因此系统(2)存在唯一的遍历平稳分布. 将上述初值代入定理 4 的条件中进行计算可得 $r=0.3>\frac{0.04}{2}=\frac{\sigma_1^2}{2}$，$\alpha+\beta=0.06<0.175=2\sqrt{m}(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2})/c$，$\mathfrak{R}_0^h=2.1>1$. 由于该结果满足定理 4 的条件，因此可知易感食饵和感染食饵是持久的，而捕食者将会逐渐灭绝. 图 1 为在噪声强度为 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0.2$，初始值为 $X_1(0)=10$、$X_2(0)=6$、$Y(0)=4$ 时系统(2)的解 $X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y(t)$ 的路径仿真图. 由图 1 进一步可知，定理 2 和定理 4 是正确的.

例 2　设系统(2)的初值 $X_1(0)=10$，$X_2(0)=6$，$Y(0)=4$，$r=0.3$，$k=9$，$b=0.03$，$m=1$，$\alpha=0.03$，$\beta=0.03$，$c=0.8$，$d_1=0.1$，$d_2=0.05$，$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0.1$. 将上述初值代入定理 2 的条件中进行计算可得 $\widetilde{\mathfrak{R}}_0^h=3.1342>1$，$\sigma_2^2=0.01<0.2=2d_1$，$\sigma_3^2=0.01<0.1=2d_2$. 该结果满足定理 2 的条件，所以系统(2)存在唯一的遍历平稳分布. 将上述初值代入定理 4 的条件中进行计算可得 $r=0.3>\frac{0.01}{2}=\frac{\sigma_1^2}{2}$，$\alpha+\beta=0.06<0.1375=2\sqrt{m}(d_2+\frac{\sigma_3^2}{2})/c$，$\mathfrak{R}_0^h=2.5286>1$. 由于该结果满足定理 4 的条

件,因此可知易感食饵和感染食饵是持久的,而捕食者将会逐渐灭绝. 图 2 为系统(2)在噪声强度为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$,初始值为 $X_1(0) = 10$、$X_2(0) = 6$、$Y(0) = 4$ 时系统(2)的解 $X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y(t)$ 的路径仿真图. 从图 1 和图 2 可以看出,噪声强度越小,系统(2)的动力学性质越接近系统(1)的性质.

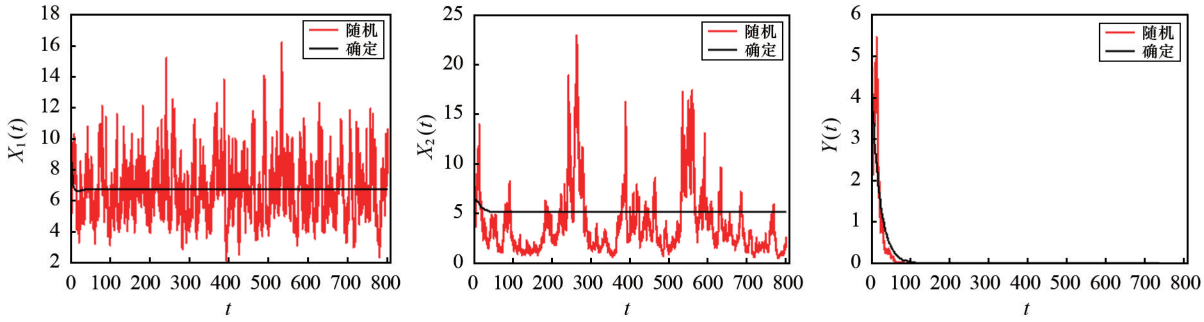

图 1 在噪声强度为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.2$,初始值为 $X_1(0) = 10$、$X_2(0) = 6$、$Y(0) = 4$ 时系统(2)的解 $X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y(t)$ 的路径图

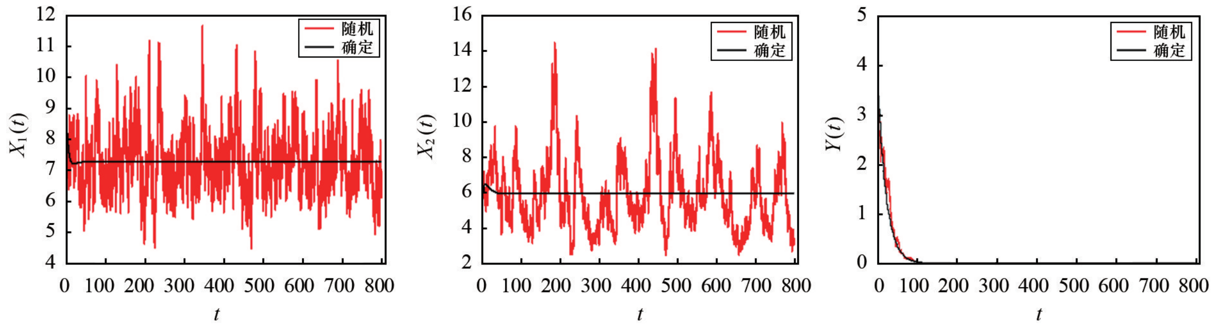

图 2 在噪声强度为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$,初始值为 $X_1(0) = 10$、$X_2(0) = 6$、$Y(0) = 4$ 时系统(2)的解 $X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y(t)$ 的路径图

例 3 设系统(2)的初值 $X_1(0) = 10$,$X_2(0) = 6$,$Y(0) = 4$,$r = 0.3$,$k = 9$,$b = 0.01$,$m = 1$,$\alpha = 0.03$,$\beta = 0.03$,$c = 0.8$,$d_1 = 0.1$,$d_2 = 0.05$,$\sigma_1 = 0.1$,$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.2$. 将上述初值代入定理 3 的条件中进行计算可得 $\alpha + \beta = 0.06 < 0.175 = 2\sqrt{m}\left(d_2 + \dfrac{\sigma_3^2}{2}\right)/c$,$r = 0.2 > \dfrac{0.01}{2} = \dfrac{\sigma_1^2}{2}$,$\mathfrak{R}_0^h = 0.731\,25 < 1$. 由于该结果满足定理 3 的条件,因此可知易感食饵是持久的,而感染食饵和捕食者将会逐渐灭绝. 图 3 为系统(2)在噪声强度为 $\sigma_1 = 0.1$、$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.2$,初始值为 $X_1(0) = 10$、$X_2(0) = 6$、$Y(0) = 4$ 时系统(2)的解 $X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y(t)$ 的路径仿真图. 由图 3 进一步可知,定理 3 是正确的.

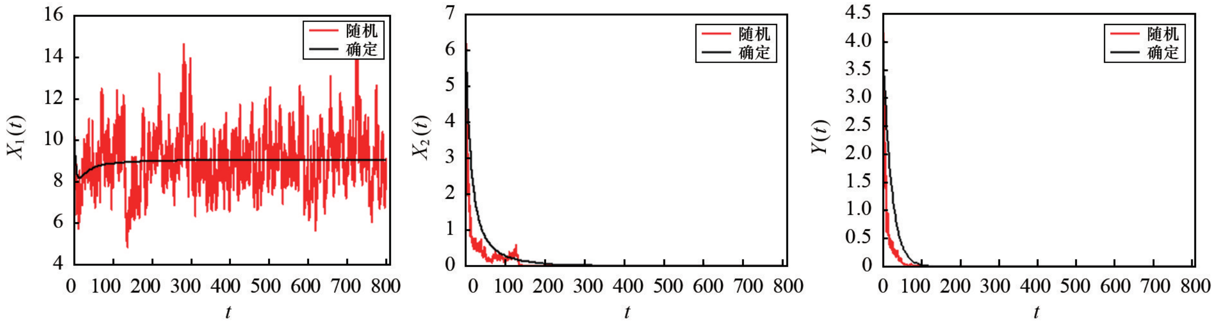

图 3 在噪声强度为 $\sigma_1 = 0.1$、$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.2$,初始值为 $X_1(0) = 10$、$X_2(0) = 6$、$Y(0) = 4$ 时系统(2)的解 $X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y(t)$ 的路径图

5　结论

对本文给出的一类带有饱和发生率和随机比率依赖的 Holling Ⅲ 型功能反应函数的染病食饵-捕食者模型进行研究表明，该模型具有以下动力学性质：① 存在唯一的全局正解；② 若 $\widetilde{\mathfrak{R}}_0^h > 1$，$\sigma_2^2 < 2d_1$ 和 $\sigma_3^2 < 2d_2$，则系统存在唯一的遍历平稳分布；③ 该模型中的染病食饵种群具有阈值($\mathfrak{R}_0^h$)，即当 $r > \frac{\sigma_1^2}{2}$，$\alpha + \beta < 2\sqrt{m}(d_2 + \frac{\sigma_3^2}{2})/c$ 和 $\mathfrak{R}_0^h < 1$ 时，染病食饵和捕食者是灭绝的，易感食饵是持久的；当 $r > \frac{\sigma_1^2}{2}$，$\alpha + \beta < 2\sqrt{m}(d_2 + \frac{\sigma_3^2}{2})/c$ 和 $\mathfrak{R}_0^h > 1$ 时，易感食饵和感染食饵是持久的，捕食者是灭绝的. 该结果可为预测种群的变化规律和研究染病食饵-捕食者种群模型的动力学性质提供良好参考. 今后我们将探讨具有非线性发生率($bX_1g(X_2)$)和高阶随机扰动等更为一般的随机系统，以更准确地描述染病食饵-捕食者系统的动力学性质.

参考文献：

[1] 姜全德. 时标上具有捕获率和投放率的 Holling Ⅲ型捕食系统的周期解[J]. 云南大学学报(自然科学版)，2021，43(5)：841-842.

[2] 张子振，张伟诗. 一类具有恐惧效应的 Holling-Ⅲ类时滞捕食系统[J]. 江苏师范大学学报(自然科学版)，2022，40(2)：42-43.

[3] 赖尾英，张敬华. 具有 HollingⅢ功能性反应的捕食系统的全局稳定性[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2021，38(3)：283-285.

[4] MA J Y，REN H M. On the dynamics of a stochastic ratio-dependent predator-prey system with infection for the prey[J]. Open Journal of Applied Sciences，2021，11(4)：440-457.

[5] XU C H，YU Y G，REN G J，et al. Extinction and permanence analysis of stochastic predator-prey model with disease， ratio-dependent type functional response and nonlinear incidence rate[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics，2021，16：1-15.

[6] YANG Q，ZHANG X H，JIANG D Q，et al. Analysis of a stochastic predator-prey model with weak Allee effect and Holling-(n+1) functional response[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2022，111：2-5.

[7] ZHANG X H，YANG Q. Dynamical behavior of a stochastic predator-prey model with general functional response and nonlinear jump-diffusion[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B，2022，27(6)：3155-3175.

[8] YANG J T. Persistence and periodic measure of a stochastic predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response[J]. International Journal of Biomathematics，2023，16(6)：1-3.

[9] HAN B T，JIANG D Q，ZHOU B Q，et al. Stationary distribution and probability density function of a stochastic SIRSI epidemic model with saturation incidence rate and logistic growth[J]. Chaos Solitons & Fractals，2020，142(5)：1-5.

[10] KHASMINKII R. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. Berlin：Springer，2012.

[11] LIU M，WANG K. Survival analysis of a stochastic cooperation system in a polluted environment[J]. Journal of Biological Systems，2011，19(2)：183-204.