

文章编号: 1004-4353(2023)04-0288-10

一类具有恐惧效应的时滞广义 Holling III 型捕食者-食饵模型的动力学分析

王徽豪, 韦煜明

(广西师范大学 数学与统计学院, 广西 桂林 541006)

摘要: 研究了一类具有恐惧效应的时滞广义 Holling III 型捕食者-食饵模型的动力学行为. 首先, 通过计算模型平衡点的 Jacobian 矩阵研究了平衡点的稳定性, 并分析了时滞对正平衡点的稳定性影响; 其次, 在确定性模型中通过引入白噪声将系统转变为随机模型, 并通过构造 Lyapunov 函数研究了随机模型正解的性质; 再次, 在一些假设条件下, 利用伊藤公式建立了模型在平均意义下的持续生存和灭绝的充分性条件; 最后, 通过数值模拟验证了恐惧效应、时滞和随机因素对捕食者和食饵种群密度的影响.

关键词: 广义 Holling III 型捕食者-食饵模型; 恐惧效应; 平衡点; 时滞; 持久性; 灭绝性

中图分类号: O175

文献标志码: A

Dynamic analysis of a delayed predator-prey model with fear effect and generalized Holling type III functional response

WANG Xihao, WEI Yuming

(School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 541006, China)

Abstract: The dynamical behavior of a generalized delayed Holling type III predator-prey model with fear effects was investigated. Firstly, the stability of the equilibrium was studied by calculating the Jacobian matrix of the equilibria of the model, and the effect of delay on the stability of the positive equilibrium point was analyzed. Secondly, the system was transformed into a stochastic model by introducing white noise into the deterministic model, and the nature of the stochastic positive solution was studied by constructing the Lyapunov function. Thirdly, under some assumptions, the Itô formula was used to establish the model sufficiency conditions for extinction and persistence in the mean. Finally, the effects of fear effects, delay and stochastic factors on predator and prey population densities were verified by numerical simulations.

Keywords: generalized Holling type III predator-prey model; fear effect; equilibrium point; delay; persistence; extinction

0 引言

由于恐惧效应会改变食饵种群的行为方式、生理特征以及种群密度等^[1], 因此近年来一些学者对其进行了研究. 例如: 2016 年, Wang 等^[2]研究了恐惧效应对确定性捕食者-食饵模型的影响; 同年, 李梁

收稿日期: 2023-05-21

基金项目: 国家自然科学基金(11961074)

第一作者: 王徽豪(1998—), 男, 硕士研究生, 研究方向为生物数学.

通信作者: 韦煜明(1974—), 男, 博士, 教授, 研究方向为生物数学.

晨等^[3]提出了一类具有时滞Holling II型功能反应的捕食者-食饵模型,并研究了该模型共存平衡点的全局稳定性及其Hopf分支的存在性;2016年,秦爽^[4]研究了一类具有广义Holling III型功能性反应的确定性模型的动力学行为;2022年,Shao^[5]研究了一类在确定环境和随机环境中带有恐惧效应和时滞的捕食者-食饵模型,并探讨了确定性模型中平衡点的存在性和稳定性以及随机模型中全局正解的存在性;2022年,刘英姿等^[6]研究了一类具有恐惧效应的Leslie-Gower型功能反应的捕食者-食饵模型,并讨论了恐惧效应对食饵和捕食者种群密度的影响.基于上述研究,本文基于文献[5]中的捕食者-食饵模型,采用广义Holling III型功能反应函数建立了如下确定性模型:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{rx(t)}{1+fy(t-\tau)} - d_1x(t) - bx^2(t) - \frac{c_1x^2(t)y(t)}{1+\alpha x(t) + \beta x^2(t)}, \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{c_2x^2(t)y(t)}{1+\alpha x(t) + \beta x^2(t)} - d_2y(t) - hy^2(t). \end{cases} \quad (1)$$

由于确定性模型难以体现环境的波动性,因此本文还研究了与确定性模型(1)相对应的随机性模型.由于随机因素会影响种群的自然死亡率,因此本文通过扰动捕食者种群的自然死亡率($-d_1 \rightarrow -d_1 + \sigma_1 \frac{dB_1(t)}{dt}$)和食饵种群的自然死亡率($-d_2 \rightarrow -d_2 + \sigma_2 \frac{dB_2(t)}{dt}$)^[7]来构建随机模型:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{rx(t)}{1+fy(t-\tau)} - d_1x(t) - bx^2(t) - \frac{c_1x^2(t)y(t)}{1+\alpha x(t) + \beta x^2(t)} + \sigma_1x(t)dB_1(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{c_2x^2(t)y(t)}{1+\alpha x(t) + \beta x^2(t)} - d_2y(t) - hy^2(t) + \sigma_2y(t)dB_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度; r 表示食饵种群的内在增长率; τ 表示时滞; d_1 和 d_2 分别表示食饵和捕食者的死亡率; b 和 h 分别表示食饵和捕食者种群在种内的竞争系数; f 表示食饵的恐惧水平; c_2 表示转化率; $\frac{c_1x^2}{1+\alpha x + \beta x^2}$ 表示广义Holling III型功能反应; $B_i(t)$ ($i=1,2$)是定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 上的相互独立的标准布朗运动; $\sigma_i(t)$ ($i=1,2$)表示白噪声的强度.另外,式中所有的参数值均为非负.该模型的初值为 $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$.本文将探讨模型(1)的平衡点的存在性、稳定性和模型(2)的全局正解的存在性、有界性,以及两个物种在随机模型中的存活和消亡条件.在下文的讨论中,本文假设食饵的出生率总是大于它的死亡率,即 $r > d_1$.

1 确定性模型

下面分别讨论模型(1)平衡点的存在性和局部稳定性,以及其在共存平衡点处发生Hopf分支的条件.

1.1 模型(1)平衡点的存在性

根据模型(1)可得如下方程组:

$$\frac{rx}{1+fy} - d_1x - bx^2 - \frac{c_1x^2y}{1+\alpha x + \beta x^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{c_2x^2y}{1+\alpha x + \beta x^2} - d_2y - hy^2 = 0. \quad (4)$$

求解式(3)和式(4)得模型(1)共有3类平衡点:第1类为种群灭绝平衡点 $E_0(0,0)$;第2类为无捕食者平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0\right)$;第3类为共存平衡点 $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$,其中 \hat{x} 和 \hat{y} 是式(3)和式(4)的一组正解.由式(3)和式(4)还可知,模型(1)始终存在种群灭绝平衡点 $E_0(0,0)$ 和无捕食者平衡点 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0\right)$.

另外,由式(4)可知 $\hat{y} = \frac{1}{h} \left(\frac{c_2\hat{x}^2}{1+\alpha\hat{x} + \beta\hat{x}^2} - d_2 \right)$,因此将 \hat{y} 值代入式(3)可得如下方程:

$$a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7 = 0. \quad (5)$$

其中: \hat{x} 是式(5)的一个正解, $a_0 = bh\beta^2[\beta(h - fd_2) + fc_2]$, $a_1 = (h - fd_2)(d_1 h\beta^3 + 3bha\beta^2) + fc_2 h\beta \cdot (d_1\beta + 2ab) - rh^2\beta^3$, $a_2 = (f - d_2)(3d_1 h\alpha\beta^2 + 3bh\beta^2 + 3bha^2\beta + c_1\beta(c_2 - d_2\beta)) + fc_2(2d_1 h\alpha\beta + \alpha^2 + 2\beta + c_2(c_2 - d_2\beta)) - 3rh^2\alpha\beta^2$, $a_3 = (h - fd_2)(3d_1 h\beta^2 + 3d_1 h\alpha^2\beta + bha^3 + 6bha\beta + c_1 c_2\alpha - 2c_1 d_2\alpha\beta) + fc_2(\alpha^2 + 2\beta + 2bha - c_1 d_2\alpha) - 3rh^2\beta(\alpha^2 + \beta)$, $a_4 = (h - fd_2)(6d_1 h\alpha\beta + d_1 h\alpha^3 + 3bha^2 + 3bh\beta + c_1 c_2 - 2c_1 d_2\beta - c_1 d_2\alpha^2) + fc_2(2\alpha + bh - c_1 d_2) - rh^2\alpha(\alpha^2 + 6\beta)$, $a_5 = (h - fd_2)(3d_1 h\alpha^2 + 3d_1 h\beta + 3bha - 2c_1 d_2\alpha) + fc_2 d_1 h - 3rh^2(\alpha^2 + \beta)$, $a_6 = (h - fd_2)(3d_1 h\alpha + bh - c_1 d_2) - 3rh^2\alpha$, $a_7 = h - fd_2 + rh^2$.

若 $\frac{c_2 x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} - d_2 > 0$, 即 $(c_2 - d_2\beta)x^2 - d_2\alpha x - d_2 > 0$, 则有 $\hat{y} > 0$. 由此可知只需令 $c_2 - d_2\beta > 0$,

即可保证 $\hat{x} > \frac{d_2\alpha + \sqrt{(d_2\alpha)^2 + 4(c_2 - d_2\beta)d_2}}{2(c_2 - d_2\beta)}$. 由于七次方程一定存在实根, 故可令 $a_0 > 0, a_7 < 0$,

由此可得式(5)至少存在一个正根 \hat{x} .

1.2 平衡点处的稳定性分析

本文通过判断特征值的符号来分析模型(1)平衡点的局部稳定性. 模型(1)的特征方程^[8]为:

$$\det(\mathbf{J}_0 + e^{-\lambda\tau} \mathbf{J}_1 - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (6)$$

$$\text{其中: } \mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} \frac{r}{1+fy} - d_1 - 2bx - \frac{2c_1xy + c_1\alpha x^2 y}{(1+\alpha x + \beta x^2)^2} & -\frac{c_1 x^2}{1+\alpha x + \beta x^2} \\ \frac{c_2 xy(2+\alpha)}{(1+\alpha x + \beta x^2)^2} & \frac{c_2 x^2}{1+\alpha x + \beta x^2} - d_2 - 2hy \end{pmatrix}, \mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{f r x}{(1+fy)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面分 2 种情况讨论时滞对模型(1)平衡点处动力学行为的影响.

情形 1 无时滞模型的动力学行为.

定理 1 (a) $E_0(0,0)$ 是鞍点; (b) 若 $d_2 > \frac{c_2(r-d_1)^2}{b^2 + \alpha b(r-d_1) + \beta(r-d_1)^2}$, 则 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0\right)$ 是稳定结点; 若 $d_2 < \frac{c_2(r-d_1)^2}{b^2 + \alpha b(r-d_1) + \beta(r-d_1)^2}$, 则 $E_1\left(\frac{r-d_1}{b}, 0\right)$ 是鞍点; (c) 若 $a_{11} < 0$, 则 $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$ 是局部渐近稳定的.

证明 首先证明(a). 由于平衡点 E_0 的 Jacobian 矩阵为 $\begin{pmatrix} r-d_1 & 0 \\ 0 & -d_2 \end{pmatrix}$ (该矩阵的两个特征值分别为 $\lambda_1 = r - d_1 > 0$ 和 $\lambda_2 = -d_2 < 0$), 因此 E_0 是鞍点. (a) 得证.

其次证明(b). 因 E_1 的 Jacobian 矩阵为 $\begin{pmatrix} d_1 - r & 0 \\ 0 & \frac{c_2(r-d_1)^2}{b^2 + \alpha b(r-d_1) + \beta(r-d_1)^2} - d_2 \end{pmatrix}$ (该矩阵的

两个特征值分别为 $\lambda_1 = d_1 - r < 0$ 和 $\lambda_2 = \frac{c_2(r-d_1)^2}{b^2 + \alpha b(r-d_1) + \beta(r-d_1)^2} - d_2$), 因此有: 当 $d_2 > \frac{c_2(r-d_1)^2}{b^2 + \alpha b(r-d_1) + \beta(r-d_1)^2}$ 时, E_1 是稳定结点; 当 $d_2 < \frac{c_2(r-d_1)^2}{b^2 + \alpha b(r-d_1) + \beta(r-d_1)^2}$ 时, E_1 是鞍点. (b) 得证.

最后证明(c). \hat{E} 的 Jacobian 矩阵为 $\begin{pmatrix} -\hat{x}\left(b + \frac{c_1\hat{y}(1-\beta\hat{x}^2)}{(1+\alpha\hat{x} + \beta\hat{x}^2)^2}\right) & -\frac{c_1\hat{x}^2}{1+\alpha\hat{x} + \beta\hat{x}^2} \\ \frac{c_2\hat{x}\hat{y}(2+\hat{x})}{(1+\alpha\hat{x} + \beta\hat{x}^2)^2} & -h\hat{y} \end{pmatrix}$, 其对应的特

征方程为 $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, 其中:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\hat{x} \left(b + \frac{c_1 \hat{y} (1 - \beta \hat{x}^2)}{(1 + \alpha \hat{x} + \beta \hat{x}^2)^2} \right), \quad a_{12} = -\frac{c_1 \hat{x}^2}{1 + \alpha \hat{x} + \beta \hat{x}^2} < 0, \\ a_{21} &= \frac{c_2 \hat{x} \hat{y} (2 + \hat{x})}{(1 + \alpha \hat{x} + \beta \hat{x}^2)^2} > 0, \quad a_{22} = -h \hat{y} < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知,若 $a_{11} < 0$, 则 $-(a_{11} + a_{22}) > 0$, 且 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. 由此再根据 Routh-Hurwitz 判据可知, $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$ 是局部渐进稳定的^[9]. (c) 得证.

情形2 带有时滞模型的动力学行为.

由式(6)可知,模型(1)在 $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$ 处的 Jacobian 矩阵的特征方程为:

$$\lambda^2 + R_1 \lambda + R_2 + S_1 e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (8)$$

其中: $R_1 = -a_{11} - a_{22}$, $R_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $S_1 = -a_{21}\omega_1$, $\omega_1 = -\frac{f r \hat{x}}{(1 + f \hat{y})^2}$, 其余参数取值与式(7)

相同. 由文献[10]可知,当 $\tau \neq 0$ 时,若式(8)的所有根的实部都为负值,则模型(1)的平衡点 $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$ 总是稳定的. 为了研究平衡点 $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$ 处的动力学行为,本文令 $\lambda = p_1 + ip_2$, 则式(8)可变为 $(p_1 + ip_2)^2 + R_1(p_1 + ip_2) + R_2 + S_1 e^{-p_1 \tau - ip_2 \tau} = 0$. 分离该式实部和虚部可得:

$$p_1^2 - p_2^2 + R_1 p_1 + R_2 + S_1 e^{-p_1 \tau} \cos(p_2 \tau) = 0, \quad (9)$$

$$2p_1 p_2 + R_1 p_2 - S_1 e^{-p_1 \tau} \sin(p_2 \tau) = 0. \quad (10)$$

为确定式(8)是否有纯虚根,再令 $p_1 = 0$. 由此式(9)和式(10)可变为:

$$S_1 \cos(p_2 \tau) = p_2^2 - R_2, \quad (11)$$

$$S_1 \sin(p_2 \tau) = R_1 p_2. \quad (12)$$

在式(11)和式(12)中消去 τ 可得 $p_2^4 + p_2^2(R_1^2 - 2R_2) + R_2^2 - S_1^2 = 0$. 再令 $p_2^2 = \delta$, 由此可得:

$$p(\delta) \equiv \delta^2 + (R_1^2 - 2R_2)\delta + R_2^2 - S_1^2 = 0. \quad (13)$$

由于式(13)是一个关于 δ 的开口向上的二次方程,因此可知如果 $P(0) < 0$, 即当 $R_2^2 < S_1^2$ 成立时,式(13)有且只有一个正根. 在此,本文令 $\delta = \delta^*$ 为式(13)的根.

为证明以参数 τ 为变量的模型(1)在共存平衡点 $\hat{E}(\hat{x}, \hat{y})$ 处存在 Hopf 分支,本文给出定理2.

定理2 当 $\tau \neq 0$ 时,若 $R_2^2 < S_1^2$, 则可得阈值 τ^* . 当 $0 < \tau < \tau^*$ 时,共存平衡点 \hat{E} 是局部渐进稳定的;当 $\tau > \tau^*$ 时,共存平衡点 \hat{E} 处因产生震荡而变得不稳定;当 $SV > UW$ 时,平衡点 \hat{E} 在 $\tau = \tau^*$ 处

会出现超临界 Hopf 分支,其中阈值 $\tau^* = \tau_+^{(0)}$, $\tau_+^{(j)} = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{\delta^* - R_2}{S_1}\right)}{\sqrt{\delta^*}} + \frac{2\pi j}{\sqrt{\delta^*}}$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$, $S = R_1 - S_1 \tau^* \cos(\sqrt{\delta^*} \tau^*)$, $V = S_1 \sqrt{\delta^*} \sin(\sqrt{\delta^*} \tau^*)$, $U = -2\sqrt{\delta^*} - S_1 \tau^* \sin(\sqrt{\delta^*} \tau^*)$, $W = S_1 \sqrt{\delta^*} \cos(\sqrt{\delta^*} \tau^*)$.

证明 当 $\tau \neq 0$ 时,由上述讨论可知,若 $R_2^2 < S_1^2$, 则式(13)有唯一正根 δ^* , 因此阈值 τ^* 存在. 再

由式(11)可得 $\tau_+^{(j)} = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{\delta^* - R_2}{S_1}\right)}{\sqrt{\delta^*}} + \frac{2\pi j}{\sqrt{\delta^*}}$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. 于是根据 Butler's 引理^[11]可知:当 $0 <$

$\tau < \tau^*$ 时,因所有特征值的实部始终小于零,所以平衡点 \hat{E} 是局部渐进稳定的;当 $\tau > \tau^*$ 时,因所有特征值的实部始终大于零,所以平衡点 \hat{E} 是不稳定的,其中 τ^* 是使式(8)存在零实部的根的最小阈值.

对式(9)和式(10)关于 τ 进行微分后,再将 $p_1 = 0$ 和 $\tau = \tau^*$ 代入式(9)和式(10)中可得:

$$S \left[\frac{d}{d\tau} [\operatorname{Re} \lambda(\tau)] \right]_{\tau=\tau^*} + U \left[\frac{d}{d\tau} [\operatorname{Im} \lambda(\tau)] \right]_{\tau=\tau^*} = V, \quad (14)$$

$$-U \left[\frac{d}{d\tau} [\operatorname{Re} \lambda(\tau)] \right]_{\tau=\tau^*} + S \left[\frac{d}{d\tau} [\operatorname{Im} \lambda(\tau)] \right]_{\tau=\tau^*} = W. \quad (15)$$

求解式(14)和式(15)可得 $\left[\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda(\tau) \right]_{\tau=\tau^*} = \left[\frac{SV - UW}{S^2 + U^2} \right]$. 由此可知, 当 $SV > UW$ 时, $\left[\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} \lambda(\tau) \right]_{\tau=\tau^*} > 0$ 成立, 平衡点 \hat{E} 在 $\tau = \tau^*$ 处会出现超临界 Hopf 分支^[10], 证毕.

2 随机模型

2.1 正解的存在唯一性

定理 3 对于任意给定的初值 $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$, 模型(2)存在唯一的全局正解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$.

证明 由于模型(2)的系数满足局部 Lipschitz 条件, 因此在 $[0, \tau_e)$ 上存在唯一局部解, 其中 τ_e 是爆破时间. 由随机分析学理论可知, 要证该解是全局的, 只需证明 $\tau_e = \infty$, a.s. 即可. 为此, 假设 $k_0 > 0$ 充分大, 使得 $x(0), y(0) \in \left[\frac{1}{k_0}, k_0 \right]$ 成立. 当 $k \geq k_0$ 时, 定义停时为 $\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : x(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \cup y(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \right\}$, 由此可知当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 是逐渐增加的. 记 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 于是由 τ_∞ 的定义可得 $\tau_\infty < \tau_e$, a.s.. 由此可知, 要证明 $\tau_e = \infty$, a.s., 只需证明 $\tau_\infty = \infty$, a.s. 即可. 本文采用反证法证明. 假设 $\tau_\infty \neq \infty$, 则由此可知存在 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P(\tau_\infty \leq T) \geq \varepsilon$ 成立. 由该结果可知, 存在整数 $k_1 \geq k_0$, 使得

$$P(\tau_k \leq T) \geq \varepsilon, \forall k \geq k_1. \quad (16)$$

本文根据稳定性理论定义一个 C^2 函数 $V: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, 即 $V(x, y) = x - 1 - \ln x + \frac{c_1}{c_2}(y - 1 - \ln y)$.

当 $s > 0$ 时, 由 $s - 1 - \ln s > 0$ 可知, 对于任意的解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$, 始终有 $V(x, y) \geq 0$. 根据 Itô 公式可知, 对于任意的 $k \geq k_0$ 和 $T > 0$, 当 $0 \leq t \leq \tau_k \wedge T$ 时有:

$$dV(x, y) = LV(x, y)dt + \sigma_1(x - 1)dB_1(t) + \frac{c_1}{c_2}\sigma_2(y - 1)dB_1(t). \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} LV(x, y) &= (x - 1) \left(\frac{r}{1 + fy(t - \tau)} - d_1 - bx + \frac{c_1 xy}{1 + \alpha x + \beta x^2} \right) + \frac{\sigma_1^2}{2} + \\ &\frac{c_1}{c_2} \left[(y - 1) \left(\frac{c_2 x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} - d_2 - hy \right) + \frac{\sigma_2^2}{2} \right] \leq -bx^2 + rx - d_1 x + d_1 + bx + \\ &\frac{c_1 xy}{1 + \alpha x + \beta x^2} + \frac{c_1}{c_2} (-d_2 y - hy^2 + d_2 + hy) + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{c_1 xy}{2c_2} \leq -bx^2 + (r + b - d_1)x - \\ &\frac{c_1}{c_2} hy^2 + \left(\frac{c_1}{\alpha} - \frac{c_1}{c_2} d_2 + \frac{c_1}{c_2} h \right) y + d_1 + \frac{c_1}{c_2} d_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{c_1 \sigma_2^2}{2c_2} \leq \max_{x \in \mathbf{R}_+} \{-bx^2 + (r + b - d_1)x\} + \\ &\max_{x \in \mathbf{R}_+} \left\{ -\frac{c_1}{c_2} hy^2 + \left(\frac{c_1}{\alpha} - \frac{c_1}{c_2} d_2 + \frac{c_1}{c_2} h \right) y \right\} + d_1 + \frac{c_1}{c_2} d_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{c_1 \sigma_2^2}{2c_2} := \tilde{K}, \end{aligned}$$

其中 \tilde{K} 为正常数, $\tau_k \wedge T = \min\{\tau_k, T\}$. 对式(17)两边同时积分后取其数学期望可得 $EV(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T)) \leq V(x(0), y(0)) + \tilde{K}(\tau_k \wedge T) \leq V(x(0), y(0)) + \tilde{K}T$. 令 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}, \forall k \geq k_1$. 于是由式(16)可知, $P(\Omega_k) \geq \varepsilon$. 此外, 注意到对于 $\omega \in \Omega_k$, 由于 $x(\tau_k, \omega), y(\tau_k, \omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$, 因此可得:

$$V(x(0), y(0)) + \tilde{K}T \geq E[I_{\Omega_k(\omega)} V(x(\tau_k), y(\tau_k))] \geq \varepsilon \left[(k - 1 - \ln k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right) \right], \quad (18)$$

其中 $I_{\Omega_k(\omega)}$ 是 $\Omega_k(\omega)$ 的示性函数. 令 $k \rightarrow \infty$, 由此可得 $\varepsilon \left[(k-1-\ln k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right) \right] \rightarrow \infty$. 于是再由式(18)可得 $\infty > V(x(0), y(0)) + \tilde{K}T = \infty$, 此时产生了矛盾, 因此 $\tau_\infty = \infty$, a.s.. 证毕.

2.2 解的有界性

定理4 对于任意给定的初值 $(x(0), y(0))$, 模型(2)的解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$ 满足:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) < \infty, \text{ a.s. }, \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) < \infty, \text{ a.s. }.$$

证明 由模型(2)的第1个方程可知:

$$\begin{aligned} dx = & \left(\frac{rx(t)}{1+f_y(t-\tau)} - d_1x - bx^2 - \frac{c_1x^2y}{1+\alpha x + \beta x^2} \right) dt + \sigma_1x(t)dB_1(t) \leq \\ & x(r-d_1-bx)dt + \sigma_1x dB_1(t). \end{aligned}$$

根据上式可构造方程 $dp(t) = p(r-d_1-bp)dt + \sigma_1p dB_1(t)$, 由此再由文献[12]和微分方程随机比较定理^[13]可知 $x(t)$ 有上界.

由模型(2)的第2个方程可知:

$$dy = \left(\frac{c_2x^2y}{1+\alpha x + \beta x^2} - d_2y - hy^2 \right) dt + \sigma_2y(t)dB_2(t) \leq y \left(\frac{c_2}{\beta} - hy - d_2 \right) dt + \sigma_2y(t)dB_2(t). \quad (19)$$

为了证明 y 的有界性, 本文根据式(19)构造如下辅助模型(20):

$$\begin{cases} dQ(t) = Q \left(\frac{c_2}{\beta} - hQ - d_2 \right) dt + \sigma_2Q dB_2(t), \\ Q(0) = y(0). \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)的第1个方程可得:

$$\begin{aligned} dQ & \leq Q \left(\frac{c_2}{\beta} - \frac{hQ}{1+Q} - d_2 \right) dt + \sigma_2Q dB_2(t) = Q \left(\frac{c_2}{\beta} - \frac{h(1+Q)-h}{1+Q} - d_2 \right) dt + \sigma_2Q dB_2(t) = \\ & Q \left(\frac{c_2}{\beta} - d_2 - h + \frac{h}{1+Q} \right) dt + \sigma_2Q dB_2(t). \end{aligned} \quad (21)$$

令 $G = \frac{c_2}{\beta} - d_2 - h < 0$, 由此式(21)可变为:

$$dQ \leq Q \left(G + \frac{h}{1+Q} \right) dt + \sigma_2Q dB_2(t) \leq (QG + h)dt + \sigma_2Q dB_2(t). \quad (22)$$

根据式(22)可构造如下辅助模型:

$$\begin{cases} dY(t) = (GY + h)dt + \sigma_2Y dB_2(t), \\ Y(t) = y(0). \end{cases} \quad (23)$$

对模型(23)进行求解^[14]可得: $Y(t) = -\frac{h}{G} + \left[Y(0) + \frac{h}{G} \right] e^{Gt} + M(t)$, 其中 $M(t) = \int_0^t e^{G(t-s)} \sigma_2Y(s)dB_2(s)$

是一个带有初值 $M(0)=0$ 的连续局部鞅. 再由随机比较定理可得 $Q(t) \leq Y(t)$, a.s.. 为了证明 $Y(t)$ 的

有界性, 定义 $Y(t) = Y(0) + A(t) + U(t) + M(t)$, 其中 $A(t) = -\frac{h}{G} [1 - e^{Gt}]$, $U(t) = Y(0)[1 - e^{Gt}]$.

由文献[14]可知, 当 $t \geq 0$ 时, $A(t)$ 和 $U(t)$ 是带有初值 $A(0)=U(0)=0$ 的连续适应增过程. 于是再由非负半鞅收敛定理^[15]可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) < \infty$, a.s.. 由以上结果和随机比较定理可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) < \infty$, a.s., 证毕.

2.3 平均持久性和灭绝性

为了便于下文表述, 首先引入以下记号:

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds, \quad R_1 = \frac{2r}{\sigma_1^2 + 2d_1}, \quad R_2 = \frac{2c_2}{\sigma_2^2 + 2d_2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+\alpha x + \beta x^2} \pi(x) dx.$$

定义 1 ① 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, a.s., 则称种群 $f(t)$ 灭绝; ② 如果 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle f(t) \rangle > 0$, a.s., 则称种群 $f(t)$ 是强平均持久的.

引理 1^[16] 假设 $M(t) \in C([0, +\infty], \mathbf{R}_+)$, 则:

(i) 如果存在正常数 T 和 μ_0 , 使得当 $t \geq T$ 时有 $\ln M(t) \leq \mu t - \mu_0 \int_0^t M(s) ds + \sum_{i=1}^2 \sigma_i B_i(t)$, 其中 $\sigma_i (i=1, 2)$ 为常数, 则有:

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t M(s) ds \leq \mu / \mu_0, \text{ a.s. }, \text{ if } \mu \geq 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} M(s) ds = 0, \text{ a.s. }, \text{ if } \mu < 0. \end{cases}$$

(ii) 如果存在正常数 T, μ 和 μ_0 , 使得当 $t \geq T$ 时有 $\ln M(t) \geq \mu t - \mu_0 \int_0^t M(s) ds + \sum_{i=1}^2 \sigma_i B_i(t)$, 则有 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t M(s) ds \geq \frac{\mu}{\mu_0}$, a.s..

引理 2^[17] 对于模型(24): ① 若 $R_1 < 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$, a.s.. ② 若 $R_1 > 1$, 则模型(24) 存在唯一遍历的平稳分布 $\pi(H) = \frac{\kappa_2^{\kappa_1}}{\Gamma(\kappa_1)} H^{\kappa_1-1} e^{-\kappa_2 H}$, 其中 $\kappa_1 = \frac{2(r-d_1)}{\sigma_1^2} - 1$, $\kappa_2 = \frac{2b}{\sigma_1^2}$, $\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t} dt$.

$$\begin{cases} dH(t) = H(t)(r - bH(t) - d_1)dt + \sigma_1 H(t)dB_1(t), \\ H(0) = x(0). \end{cases} \quad (24)$$

推论 1 当 $R_1 < 1$ 时, 由随机比较定理可知, 食饵趋于种群灭亡, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

定理 5 若 $R_2 < 1$, 则捕食者种群趋于灭绝, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

证明 对模型(2) 的第 2 个方程应用 Itô 公式可得:

$$\begin{aligned} d \ln y &= \left[-d_2 - hy + \frac{c_2 x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} - \frac{\sigma_2^2}{2} \right] dt + \sigma_2 dB_2(t) \leq \\ &\left[\frac{c_2 H^2}{1 + \alpha H + \beta H^2} - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right] dt + \sigma_2 dB_2(t). \end{aligned} \quad (25)$$

对式(25) 两边进行积分可得:

$$\frac{\ln y(t) - \ln y(0)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{c_2 H^2}{1 + \alpha H + \beta H^2} dt - \left(d_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t}. \quad (26)$$

再由强大数定律^[18] 可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} = 0$, a.s., 于是对式(26) 两边取极限可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{t} \leq c_2 \int_0^\infty \frac{x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} \pi(x) dx - \left(d_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) = \frac{\sigma_2^2 + 2d_2}{2} (R_2 - 1).$$

当 $R_2 < 1$ 时, 由于 $\frac{\sigma_2^2 + 2d_2}{2} (R_2 - 1) < 0$ 成立, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{t} < 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, 证毕.

定理 6 若 $R_2 > 1$, 则捕食者种群是强平均持久的, 即 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle y(t) \rangle \geq \tilde{N} (R_2 - 1) > 0$, 其中 $\tilde{N} = \frac{2\alpha^2 d_2 b + \sigma_2^2 \alpha^2 b}{2(\alpha^2 h_2 b + c_1 c_2)}$.

证明 对模型(2) 和模型(24) 的第 1 个方程分别应用 Itô 公式后再对其两边同时进行积分可得:

$$\begin{aligned} \frac{\ln x(t) - \ln x(0)}{t} &\geq \left(-d_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} - \frac{b}{t} \int_0^t x(s) ds - \frac{c_1}{t} \int_0^t \frac{x(s)y(s)}{1 + \alpha x(s) + \beta x^2(s)} ds, \\ \frac{\ln H(t) - \ln H(0)}{t} &\geq -d_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{b}{t} \int_0^t H(s) ds + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t}. \end{aligned}$$

用上面的第1个式子减去第2个式子可得 $0 \geq \frac{\ln x(t) - \ln H(t)}{t} \geq -\frac{b}{t} \int_0^t (x(s) - H(s)) ds - \frac{1}{t} \cdot$

$\int_0^t \frac{c_1 x(s)y(s)}{1 + \alpha x(s) + \beta x^2(s)} ds \geq -\frac{b}{t} \int_0^t (x(s) - H(s)) ds - \frac{c_1}{\alpha t} \int_0^t y(s) ds$, 由该结果进而可得:

$$\frac{1}{t} \int_0^t (x(s) - H(s)) ds \geq -\frac{c_1}{\alpha b t} \int_0^t y(s) ds. \quad (27)$$

对模型(2)的第2个方程应用Itô公式可得:

$$\begin{aligned} d \ln y = & \left(\frac{c_2 x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} - hy - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) = \\ & \left(\frac{c_2 H^2}{1 + \alpha H + \beta H^2} - \frac{H - x}{1 + \alpha H + \beta H^2} \cdot \frac{c_2 (x + H + \alpha x H)}{1 + \alpha H + \beta H^2} - hy - \frac{\sigma_2^2}{2} - d_2 \right) dt + \sigma_2 dB_2(t) \geq \\ & \left(\frac{c_2 H^2}{1 + \alpha H + \beta H^2} - hy - \frac{\sigma_2^2}{2} - d_2 - \frac{c_2}{\alpha} (H - x) \right) dt + \sigma_2 dB_2(t). \end{aligned} \quad (28)$$

对式(28)两边进行积分后再将式(27)代入其中可得:

$$\begin{aligned} \frac{\ln y(t)}{t} & \geq \frac{c_2}{t} \int_0^t \frac{H^2(s)}{1 + \alpha H(s) + \beta H^2(s)} ds - \frac{h}{t} \int_0^t y(s) ds - \frac{c_2}{\alpha} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t (H(s) - x(s)) ds - d_2 - \\ & \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{\ln y(0)}{t} \geq \frac{c_2}{t} \int_0^t \frac{H^2(s)}{1 + \alpha H(s) + \beta H^2(s)} ds - \frac{h}{t} \int_0^t y(s) ds - \\ & \frac{c_1 c_2}{\alpha^2 b} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{\ln y(0)}{t} \geq \frac{c_2}{t} \int_0^t \frac{H^2(s)}{1 + \alpha H(s) + \beta H^2(s)} ds - \\ & \left(h + \frac{c_1 c_2}{\alpha^2 b} \right) \langle y(s) \rangle - d_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} + \frac{\ln y(0)}{t}. \end{aligned}$$

由上式和引理1可得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle y(t) \rangle \geq \frac{2\alpha^2 d_2 b + \sigma_2^2 \alpha^2 b}{2(\alpha^2 h_2 b + c_1 c_2)} (R_2 - 1) > 0$, 证毕.

3 数值模拟

3.1 恐惧效应对模型(1)平衡状态的影响

本文参考文献[5],选取3个恐惧参数 f (0、5和10)来分析恐惧因素对模型(1)的影响,并将其他参数分别设置为: $r=2$, $c_1=0.6$, $d_1=0.5$, $b=0.08$, $\tau=0$, $\alpha=0.01$, $\beta=0.01$, $c_2=0.4$, $d_2=0.1$, $h=0.3$.图1为 f 分别取0、5和10时其对模型(1)平衡状态影响的仿真图.由图1可以看出,平衡点处的 \hat{x} 和 \hat{y} 随 f 值的增加而减少.这表明,较高的恐惧可减少捕食者和食饵种群的密度.

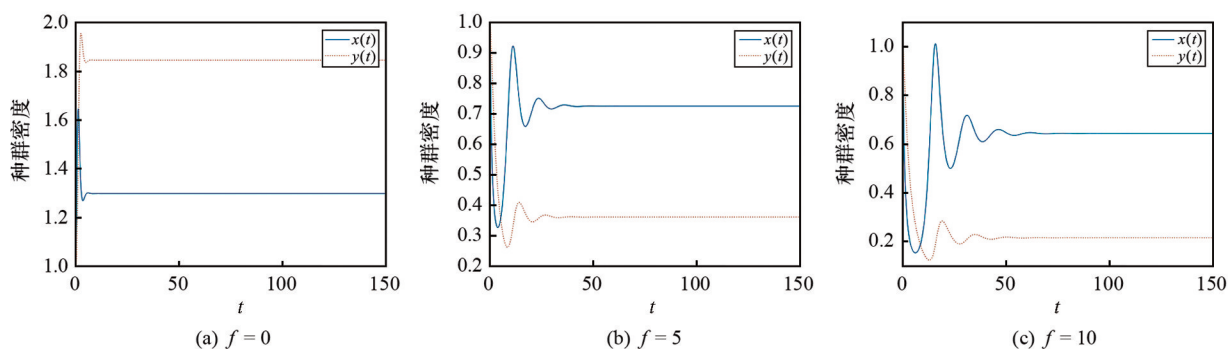


图1 不同恐惧参数 f 对模型(1)平衡状态影响的仿真图

3.2 时滞对模型(1)平衡状态的影响

本文参考文献[5],选取3个时滞参数 τ (1、5和10)来分析时滞对模型(1)的影响(固定 $f=1$,其他

各参数取值与 3.1 中相同). 图 2 为 τ 分别取 1, 5 和 10 时其对模型(1) 平衡状态的影响的仿真图. 由图 2 可以看出, 不同时滞的取值不会影响模型(1) 的种群密度和平衡点的稳定性.

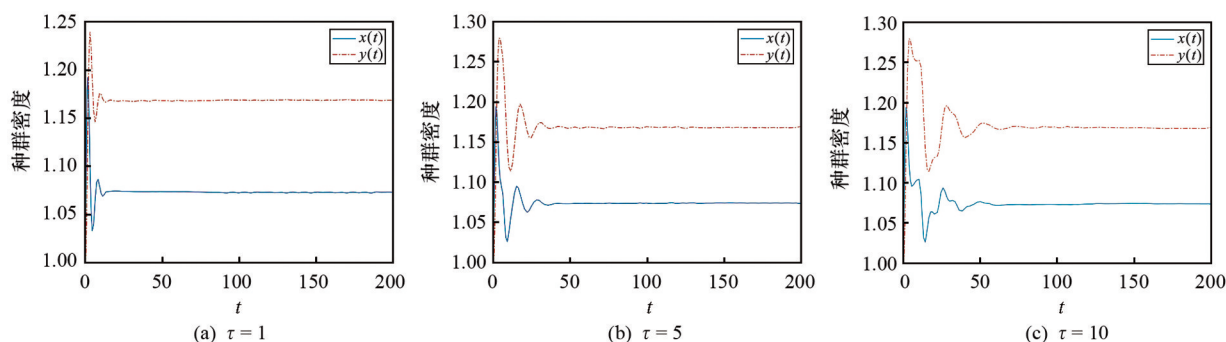


图 2 不同时滞参数 τ 对模型(1) 平衡状态影响的仿真图

3.3 随机因素对模型(2) 平衡状态的影响

本文利用 Milstein 方法^[19] 研究随机因素对模型(2) 平衡状态的影响, 参数取值参考文献[20] 选取: $r = 2.2$, $c_1 = 0.6$, $f = 1$, $\tau = 0$, $d_1 = 0.5$, $b = 0.08$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$, $c_2 = 0.1$, $d_2 = 1$, $h = 0.3$.

1) 当 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.5$ 时, 依据上述参数进行计算可得: $R_1 = \frac{2r}{\sigma_1^2 + 2d_1} = 1.035 > 1$, $R_2 = \frac{2c_2}{\sigma_2^2 + 2d_2} \cdot$

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} \pi(x) dx = 0.774 < 1$. 由上述计算可知 R_1 和 R_2 的值满足定理 5 的条件, 因此此时 $x(t)$ 是持续存在的, $y(t)$ 是趋于灭绝的. 由图 3(a) 进一步可知该结果是正确的.

2) 当 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.07$ 时, 依据上述参数进行计算可得: $R_1 = \frac{2r}{\sigma_1^2 + 2d_1} = 1.767 > 1$, $R_2 = \frac{2c_2}{\sigma_2^2 + 2d_2} \cdot$

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + \alpha x + \beta x^2} \pi(x) dx = 9.83 > 1$. 由上述计算可知 R_1 和 R_2 的值满足定理 6 的条件, 因此此时 $x(t)$ 、 $y(t)$ 均是持续存在的. 由图 3(b) 进一步可知该结果是正确的.

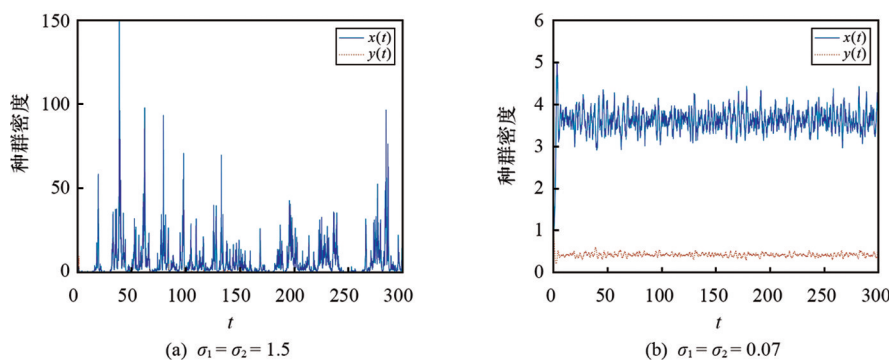


图 3 不同随机因素对捕食者和食饵种群密度影响的仿真图

4 结论

本文对确定性模型(1)和随机模型(2)的动力学行为进行研究表明: 恐惧效应不会对模型(1)的稳定性产生影响, 但会改变食饵和捕食者的种群密度, 表现为较高的恐惧效应会降低食饵和捕食者的种群密度; 时滞不会对模型(1)的稳定性和种群密度产生明显影响; 随机因素对模型(2)的稳定性和种群密度都会产生影响, 表现为较大的噪声会降低食饵和捕食者的种群密度. 本文研究结果可为调控种群密度和维持种群间的平衡提供良好参考. 在今后的研究中, 我们将对模型(2)是否存在平稳分布和具有遍历性进行探讨.

参考文献:

- [1] ZANETTE L Y, WHITE A F, ALLEN M C. Perceived predation risk reduces the number of offspring songbirds produce per year[J]. *Science*, 2011, 334(6061):1398-1401.
- [2] WANG X Y, ZANETTE L, ZOU X F. Modelling the fear effect in predator-prey interactions[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2016, 73(5):1179-1204.
- [3] 李梁晨,徐瑞. 一类具有时滞和 Holling II 型功能反应的捕食模型的全局稳定性和分支(英文)[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2016, 33(3):328-337.
- [4] 秦爽. 具有广义 Holling III 型功能性反应的共位群内捕食系统的动力学行为[D]. 哈尔滨:黑龙江大学, 2016.
- [5] SHAO Y F. Global stability of a delayed predator-prey system with fear and Holling-type II functional response in deterministic and stochastic environments[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, 200:65-77.
- [6] 刘英姿,李忠,何梦昕. 具有恐惧效应和食饵避难所的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型的动力学分析[J]. *延边大学学报(自然科学版)*, 2022, 48(2):112-117.
- [7] LIU Q, ZU L, JIANG D Q. Dynamics of stochastic predator-prey models with Holling II functional response[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 37:62-76.
- [8] PATI N C, GHOSH B. Delayed carrying capacity induced subcritical and supercritical Hopf bifurcations in a predator-prey system[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, 195:171-196.
- [9] 方侃,曾怀杰,陈晓英. 具有捕食者 Allee 效应的 Leslie-Gower 模型的动力学分析[J]. *延边大学学报(自然科学版)*, 2022, 48(1):25-29.
- [10] MONDAL S, SAMANTA G, de la SEN M. A comparison study of predator-prey model in deterministic and stochastic environments with the impacts of fear and habitat complexity[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2022, 84(10):115.
- [11] FREEDMAN H I, RAO V S H. The trade-off between mutual interference and time lags in predator-prey systems[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1983, 45(6):991-1004.
- [12] JIANG D Q, SHI N Z. A note on nonautonomous logistic equation with random perturbation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 303(1):164-172.
- [13] 钟颖,韦煜明. 污染环境具有混合功能反应和 Markov 切换的食饵-捕食模型[J]. *广西师范大学学报(自然科学版)*, 2023, 41(4):135-148.
- [14] ZHAO S N, YUAN S L, WANG H. Threshold behavior in a stochastic algal growth model with stoichiometric constraints and seasonal variation[J]. *Journal of Differential Equations*, 2020, 268(9):5113-5139.
- [15] MAO X R. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- [16] WANG S, HU G X, WEI T D, et al. Stability in distribution of a stochastic predator-prey system with s-type distributed time delays[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, 505:919-930.
- [17] QI H K, MENG X Z. Threshold behavior of a stochastic predator-prey system with prey refuge and fear effect[J]. *Applied Mathematics Letter*, 2021, 113:106846.
- [18] DA PRATO G, ZABCZYK J. *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996:229.
- [19] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Review*, 2001, 43:525-546.
- [20] ZHANG Y K, MENG X Z. Dynamic study of a stochastic Holling III predator-prey system with a prey refuge[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2022, 55(3):73-78.