文章编号：1004-4353(2023)04-0283-05

二维耗散非线性薛定谔方程解的时间衰减估计

郭佳鑫， 李春花
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：研究了一类二维耗散非线性薛定谔方程初值问题解的时间衰减估计，其中非线性项为 $\lambda|v|^{p-1}v$，λ 为复常数，并且 λ 满足强耗散条件 $\lambda_2<0,\ |\lambda_2|\geqslant\frac{p-1}{2\sqrt{p}}|\lambda_1|$. 在初值大小不受限制的条件下，得到了上述二维耗散非线性薛定谔方程解的 L^q-时间衰减估计，其中 $q>2$.

关键词：非线性薛定谔方程；初值问题；强耗散；L^q-时间衰减估计
中图分类号：O175.29 **文献标志码**：A

Time decay estimates of solutions to dissipative nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions

GUO Jiaxin， LI Chunhua
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Time decay estimates of solutions to the initial value problem of nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions were studied, where the nonlinear term was $\lambda|v|^{p-1}v$, λ was a complex constant and λ satisfied the strong dissipative condition $\lambda_2<0,\ |\lambda_2|\geqslant\frac{p-1}{2\sqrt{p}}|\lambda_1|$. We obtained the L^q-time decay estimates of the solutions to the above nonlinear Schrödinger equations without assuming the size restriction on the initial data, where $q>2$.

Keywords: nonlinear Schrödinger equations; initial value problem; strong dissipation; L^q-time decay estimates

0 引言

本文考虑如下二维耗散非线性薛定谔方程的初值问题：

$$\begin{cases} i\partial_t v+\frac{1}{2}\Delta v=\lambda|v|^{p-1}v, \\ v(0,x)=\varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中：v 是未知的复值函数，$x\in\mathbf{R}^2$，$t\geqslant 0$，$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$，$\lambda_1\in\mathbf{R}$，$\lambda_2\in\mathbf{R}$，$1<p<2$. 若 $\lambda_2<0$，则称 $\lambda_2<0$ 为耗散条件；若 $\lambda_2<0,\ |\lambda_2|\geqslant\frac{p-1}{2\sqrt{p}}|\lambda_1|$，则称 $\lambda_2<0,\ |\lambda_2|\geqslant\frac{p-1}{2\sqrt{p}}|\lambda_1|$ 为强耗散条件.

目前，已有较多学者在耗散条件下对非线性薛定谔方程初值问题(1)解的 L^2-时间衰减估计和 L^∞-

收稿日期：2023-09-30
基金项目：吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH20220527KJ)
第一作者：郭佳鑫(1999—)，女，硕士研究生，研究方向为微分方程及其应用.
通信作者：李春花(1977—)，女(朝鲜族)，博士，副教授，研究方向为微分方程及其应用.

时间衰减估计进行了研究[1-10],其中部分研究是在强耗散条件下进行的.例如:文献[7]的作者研究了一维强耗散非线性薛定谔方程初值问题(1)解的长时间渐近行为;文献[8]的作者利用不同的方法研究了文献[7]中的初值问题解的时间衰减估计,并改进了文献[7]中初值问题解的 L^{∞}-时间衰减估计中的 p 值下界;文献[9]的作者在临界和亚临界条件下($p(n)<p\leqslant 1+\dfrac{2}{n}$)研究了 n 维非线性薛定谔方程初值问题(1)解的时间衰减估计;文献[10]的作者在亚临界条件下研究了一维强耗散非线性薛定谔方程的初值问题(1),并给出了其解的时间衰减估计和长时间渐近行为.基于上述研究,本文将对强耗散亚临界条件下的二维非线性薛定谔方程初值问题(1)解的 L^q-时间衰减进行估计.

1 预备知识

本文主要利用文献[9]中的求解强耗散非线性薛定谔方程解的时间衰减估计的方法来求解二维耗散非线性薛定谔方程初值问题(1)解的 L^q-时间衰减估计.本文在证明过程中主要涉及到以下符号、公式和空间:

1) Fourier 变换.定义 $\mathscr{F}: f\mapsto\hat{f}$ 为 $\hat{f}(\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x$, $\xi\in\mathbf{R}^2$;定义 Fourier 逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$: $f\mapsto f^{\vee}$ 为 $f^{\vee}(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi$, $x\in\mathbf{R}^2$.

2) 定义方程(1)对应的自由问题所决定的解算子 $U(t)$ 为 $U(t)f=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta/2}f=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|\xi|^2/2}\hat{f})^{\vee}$.因为 $U(t)=\mathscr{M}D_t\mathscr{F}\mathscr{M}$[11],其中 $\mathscr{M}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2t}|x|^2}$,$(D_tf)(x)=\dfrac{1}{\mathrm{i}t}f(\dfrac{x}{t})$,所以可计算出 $U(-t)=\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}D_t^{-1}\mathscr{M}^{-1}$.

3) 定义算子 $|J|^{\gamma}(t)$ 为 $|J|^{\gamma}(t)=U(t)|x|^{\gamma}U(-t)$, $\gamma>0$.

4) 定义 $\mathbf{R}^2$ 上的勒贝格空间 $L^q(\mathbf{R}^2)$ 范数为 $\|\varphi\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}=\left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2}|\varphi(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$ $(1\leqslant q<\infty)$, $\|\varphi\|_{L^{\infty}(\mathbf{R}^2)}=\underset{x\in\mathbf{R}^2}{\mathrm{ess.\,sup}}|\varphi(x)|$.

5) 设 $m,s\geqslant 0$, $r\geqslant 1$,定义 $\mathbf{R}^2$ 上的加权索伯列夫空间 $\mathrm{H}_r^{m,s}(\mathbf{R}^2)$ 为:

$$\mathrm{H}_r^{m,s}(\mathbf{R}^2)=\{f\in S'(\mathbf{R}^2):\|f\|_{\mathrm{H}_r^{m,s}(\mathbf{R}^2)}=\|(I-\Delta)^{m/2}(1+|x|^2)^{s/2}f\|_{L^r(\mathbf{R}^2)}<\infty\},$$

其中 $S(\mathbf{R}^2)$ 为速降函数空间.

6) 定义 $\mathbf{R}^2$ 上的函数空间 $X_{1,T}(\mathbf{R}^2)$ 为:

$$X_{1,T}(\mathbf{R}^2)=\{y;U(-t)y\in C([0,T);\mathrm{H}^{0,1}(\mathbf{R}^2)\cap\mathrm{H}^{1,0}(\mathbf{R}^2)),\|y\|_{X_{1,T}(\mathbf{R}^2)}<\infty\},$$

其中 $\|y\|_{X_{1,T}(\mathbf{R}^2)}=\sup\limits_{0\leqslant t<T}\|U(-t)y(t)\|_{\mathrm{H}^{0,1}(\mathbf{R}^2)\cap\mathrm{H}^{1,0}(\mathbf{R}^2)}$, $T>0$.

为了书写方便,本文对一些符号做了简化,即令 $\|f\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}=\|f\|_{L^q}$, $q\geqslant 1$, $\mathrm{H}_2^{m,s}(\mathbf{R}^2)=\mathrm{H}^{m,s}$, $\mathrm{H}^{m,0}=\mathrm{H}^m$,同时用同一个 C 表示常数.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $n=2$, $p>1$,且强耗散条件($\lambda_2<0$, $|\lambda_2|\geqslant\dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}|\lambda_1|$)成立.若 $\varphi(x)\in\mathrm{H}^{0,1}\cap\mathrm{H}^1$,则初值问题(1)存在唯一的全局解 $v\in X_{1,\infty}$.当 $q>2$, $1.780\,8\approx\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}<p<2$ 时,初值问题(1)的解满足 $\|v(t)\|_{L^q}\leqslant C(1+t)^{\frac{2}{q}-1+(1-\frac{1}{p-1})\beta}$ 的时间衰减估计,其中 $t\geqslant 0$, $\dfrac{2-p}{p-1}\beta<\dfrac{1}{q}$, $0<\beta<1$.

为了证明定理 1,本文首先引入如下引理.

引理 1[9]　设 $v \in X_{1,\infty}$ 是初值问题(1) 的全局解，则 v 满足如下的估计：$\|\nabla v(t)\|_{L^2} \leqslant \|\nabla \varphi\|_{L^2}$，$\||J|v(t)\|_{L^2} \leqslant \||x|\varphi\|_{L^2}$，$\|v(t)\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_{L^2}$.

引理 2[11]　设 q、r、j、m 满足 $1 \leqslant q$，$r \leqslant \infty$，$0 \leqslant j < m$. 如果 $f \in \mathrm{H}_r^{m,0}(\mathbf{R}^n) \cap L^q(\mathbf{R}^n)$，则有：

$$\|(-\Delta)^{j/2} f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant C\|(-\Delta)^{m/2} f\|^a_{L^r(\mathbf{R}^n)} \|f\|^{1-a}_{L^q(\mathbf{R}^n)}, \tag{2}$$

其中 $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}) + \frac{1-a}{q}$，$a \in [\frac{j}{m}, 1]$，$C$ 是仅和 q、r、j、m、n、a 有关的常数. 如果 $m - j - \frac{n}{r}$ 是非负整数，则上述估计仅对 $a \in [\frac{j}{m}, 1)$ 成立.

定理 1 的证明　由文献[9]中定理 1 可知，初值问题(1) 存在唯一全局解 $v \in X_{1,\infty}$. 下面证明解 v 的时间衰减估计. 对式(1) 两端作用 $U(-t)$ 可得：

$$U(-t)(\mathrm{i}\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v) = U(-t)(\lambda|v|^{p-1}v). \tag{3}$$

对式(3) 左端的 $U(-t)(\mathrm{i}\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v)$ 进行计算可得 $U(-t)(\mathrm{i}\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v) = \mathrm{i}\partial_t(U(-t)v)$. 对式(3) 右端的 $U(-t)(\lambda|v|^{p-1}v)$ 进行计算可得 $U(-t)(\lambda|v|^{p-1}v) = \lambda U(-t)(|v|^{p-1}v)$. 对上式右端应用 $U(-t) = \mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}D_t^{-1}\mathscr{M}^{-1}$ 可得 $U(-t)(|v|^{p-1}v) = \mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}D_t^{-1}\mathscr{M}^{-1}(|v|^{p-1}v)$. 令 $u(t) = U(-t)v(t)$，即 $v(t) = U(t)u(t)$，由此可得 $\mathrm{i}\partial_t u = \lambda\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}D_t^{-1}\mathscr{M}^{-1}(|U(t)u|^{p-1}U(t)u)$. 在上式右端应用 $U(t) = \mathscr{M}D_t\mathscr{F}\mathscr{M}$ 可得 $\mathrm{i}\partial_t u = \lambda\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}D_t^{-1}\mathscr{M}^{-1}(|\mathscr{M}D_t\mathscr{F}\mathscr{M}u|^{p-1}\mathscr{M}D_t\mathscr{F}\mathscr{M}u)$，即 $\mathrm{i}\partial_t u = \lambda\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}D_t^{-1} \cdot (|D_t\mathscr{F}\mathscr{M}u|^{p-1}D_t\mathscr{F}\mathscr{M}u)$. 于是再由 $(D_t\varphi)(x) = \frac{1}{\mathrm{i}t}\varphi(\frac{x}{t})$ 可得 $\mathrm{i}\partial_t u = \lambda t^{-(p-1)}\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}u|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}u)$.

将上式作用 $\mathscr{F}$ 后，将 $u(t) = U(-t)v(t)$ 代入其中可得：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\partial_t(\mathscr{F}U(-t)v) = \lambda t^{-(p-1)}\mathscr{F}\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v) = \\
&\quad \lambda t^{-(p-1)}[|\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v + \mathscr{F}\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v) - \\
&\quad |\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v] = \lambda t^{-(p-1)}|\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v + \lambda R(t),
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $R(t) = t^{-(p-1)}[\mathscr{F}\mathscr{M}^{-1}\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v) - |\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v]$.

引理 3　设 $v \in X_{1,\infty}$ 是初值问题(1) 的全局解，则对于 $t \geqslant 1$，有估计 $\|R(t)\|_{L^q} \leqslant Ct^{-(p-1)-s_2/2}\||x|\varphi\|^p_{L^2}$ 成立，其中 $q = \frac{2}{s_2}$，$0 < s_2 \leqslant 1$.

证明　对 $R(t)$ 进行计算后 $R(t)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}
R(t) = t^{-(p-1)}[&(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v) - |\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v + \\
&\mathscr{F}(\mathscr{M}^{-1} - 1)\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v)].
\end{aligned}$$

由引理 1 和引理 2 可得 $R(t)$ 中 $(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v) - |\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v$ 的 L^q 范数满足如下估计：

$$\begin{aligned}
&\|(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v) - |\mathscr{F}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}U(-t)v\|_{L^q} \leqslant \\
&\quad C(\|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v\|^{p-1}_{L^\infty} + \|\mathscr{F}U(-t)v\|^{p-1}_{L^\infty})\|\mathscr{F}(\mathscr{M}-1)U(-t)v\|_{L^q} \leqslant \\
&\quad C\||J|v\|^{p-1}_{L^2}\||\nabla|^{s_1}\mathscr{F}(\mathscr{M}-1)U(-t)v\|_{L^2} \leqslant Ct^{-s_2/2}\||J|v\|^{p-1}_{L^2}\||x|^{s_1+s_2}U(-t)v\|_{L^2} \leqslant \\
&\quad Ct^{-s_2/2}\||J|v\|^p_{L^2} \leqslant Ct^{-s_2/2}\||x|\varphi\|^p_{L^2},
\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $0 \leqslant s_1 < 1$，$s_1 + s_2 = 1$，$q = \frac{2}{s_2}$. 用同样的方法可得 $R(t)$ 中 $\mathscr{F}(\mathscr{M}^{-1} - 1)\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1} \cdot \mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v)$ 的 L^q 范数满足如下估计：

$$\|\mathscr{F}(\mathscr{M}^{-1} - 1)\mathscr{F}^{-1}(|\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v|^{p-1}\mathscr{F}\mathscr{M}U(-t)v)\|_{L^q} \leqslant$$

$$C\| |\nabla|^{s_1}\mathcal{F}(\mathcal{M}^{-1}-1)\mathcal{F}^{-1}(|\mathcal{F}\mathcal{M}U(-t)v|^{p-1}\mathcal{F}\mathcal{M}U(-t)v)\|_{L^2}\leqslant$$
$$Ct^{-s_2/2}\| |\nabla|^{s_1+s_2}|\mathcal{F}\mathcal{M}U(-t)v|^{p-1}\mathcal{F}\mathcal{M}U(-t)v\|_{L^2}\leqslant \tag{6}$$
$$Ct^{-s_2/2}\|\mathcal{F}\mathcal{M}U(-t)v\|_{L^\infty}^{p-1}\| |\nabla|\mathcal{F}\mathcal{M}U(-t)v\|_{L^2}\leqslant Ct^{-s_2/2}\| |J|v\|_{L^2}^p\leqslant Ct^{-s_2/2}\| |x|\varphi\|_{L^2}^p,$$

其中 $0\leqslant s_1<1$, $s_1+s_2=1$, $q=\dfrac{2}{s_2}$. 将式(5)和(6)代入到 $R(t)$ 中可得 $\|R(t)\|_{L^q}\leqslant Ct^{-(p-1)-s_2/2}\cdot\| |x|\varphi\|_{L^2}^p$, 由此可知引理3得证.

由式(4)可得 $\dfrac{1}{2}\partial_t|\mathcal{F}U(-t)v|^2=(\operatorname{Im}\lambda)t^{-(p-1)}|\mathcal{F}U(-t)v|^{p+1}+\operatorname{Im}(\lambda R(t)\overline{\mathcal{F}U(-t)v})$, 因此有:

$$\partial_t|\mathcal{F}U(-t)v|-(\operatorname{Im}\lambda)t^{-(p-1)}|\mathcal{F}U(-t)v|^p\leqslant CR(t). \tag{7}$$

由于方程 $(\operatorname{Im}\lambda)^{-1}t^{p-1}H^{-p}\mathrm{d}H-\mathrm{d}t=0$, 因此求解此方程可得:

$$H(t,\xi)=\frac{|\hat{\varphi}(\xi)|L}{(|\hat{\varphi}(\xi)|^{p-1}t^{2-p}+L^{p-1})^{1/(p-1)}}, \tag{8}$$

其中 $L=\left(\dfrac{2-p}{|\operatorname{Im}\lambda|(p-1)}\right)^{1/(p-1)}$. 在式(7)左、右两端同时乘以 H^{-p} 可得:

$$\partial_t(H^{-p}|\mathcal{F}U(-t)v|)\leqslant|\operatorname{Im}\lambda|t^{-(p-1)}(pH^{-1}|\mathcal{F}U(-t)v|-(H^{-1}|\mathcal{F}U(-t)v|)^p)+CH^{-p}R(t). \tag{9}$$

于是再由 Young 不等式 $|A||B|\leqslant\dfrac{1}{p}|A|^p+\dfrac{1}{p'}|B|^{p'}(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1)$ 可得:

$$pH^{-1}|\mathcal{F}U(-t)v|=(p^{1/p}H^{-1}|\mathcal{F}U(-t)v|)p^{1-1/p}\leqslant(H^{-1}|\mathcal{F}U(-t)v|)^p+(\frac{p-1}{p})p.$$

将上式应用到式(9)中可得 $\mathrm{d}(H^{-p}|\mathcal{F}U(-t)v|)\leqslant(\dfrac{p-1}{p})p|\operatorname{Im}\lambda|t^{-(p-1)}\mathrm{d}t+CH^{-p}|R(t)|\mathrm{d}t$. 对上式从1到 t 进行积分后再将式(8)代入其中可得:

$$H^{-p}(t,\xi)|\mathcal{F}U(-t)v(t,\xi)|\leqslant H^{-p}(1,\xi)|\mathcal{F}U(-t)v(1,\xi)|+Ct^{2-p}+C\int_1^t s^{\frac{(2-p)p}{p-1}}|R(s,\xi)|\mathrm{d}s.$$

由上式可得 $|\mathcal{F}U(-t)v(t,\xi)|\leqslant CH^p(t,\xi)(t^{2-p}+\int_1^t s^{\frac{(2-p)}{p-1}}|R(s,\xi)|\mathrm{d}s)$. 由于

$$H^p(t,\xi)\leqslant Ct^{-(2-p)}|\hat{\varphi}(\xi)|/(\left|\frac{\hat{\varphi}(\xi)}{L}\right|^{p-1}t^{2-p}+1)^{1/(p-1)},$$

因此可得:

$$|\mathcal{F}U(-t)v(t,\xi)|\leqslant Ct^{-(2-p)}t^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta}|\hat{\varphi}(\xi)|^{1-\beta}(t^{2-p}+\int_1^t\tau^{\frac{(2-p)p}{p-1}}|R(\tau,\xi)|\mathrm{d}\tau)\leqslant$$
$$C|\hat{\varphi}(\xi)|^{1-\beta}(t^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta}+t^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta-(2-p)}\int_1^t\tau^{\frac{(2-p)p}{p-1}}|R(\tau,\xi)|\mathrm{d}\tau),$$

其中 $0<\beta<1$. 对上式取 L^q 范数并应用引理3可得:

$$\|\mathcal{F}U(-t)v(t)\|_{L^q}\leqslant C\| |\hat{\varphi}(\xi)|^{1-\beta}\|_{L^q}(t^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta}+t^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta-(2-p)}\int_1^t\tau^{\frac{(2-p)p}{p-1}}\|R(\tau)\|_{L^q}\mathrm{d}\tau)\leqslant$$
$$Ct^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta}+Ct^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta-(2-p)}\int_1^t\tau^{\frac{(2-p)p}{p-1}-(p-1)-\frac{s_2}{2}}\mathrm{d}\tau\leqslant Ct^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta}(1+t^{\frac{2-p}{p-1}-(p-1)-\frac{s_2}{2}+1}).$$

再由引理2可得 $\| |\hat{\varphi}(\xi)|^{1-\beta}\|_{L^q}=\|\hat{\varphi}(\xi)\|_{L^{q(1-\beta)}}^{1-\beta}\leqslant C\|\hat{\varphi}(\xi)\|_{H^s}^{1-\beta}\leqslant C\|\hat{\varphi}(\xi)\|_{H^1}^{1-\beta}\leqslant C$, $q>2$, $0<\beta<1$, $0<s<1$. 经过计算可得当 $t\to+\infty$ 时, $t^{\frac{2-p}{p-1}-(p-1)-\frac{s_2}{2}+1}\to 0$ 成立, 其中 p 满足 $1.7808\approx\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}<p<2$, 故有 $\|\mathcal{F}U(-t)v(t)\|_{L^q}\leqslant Ct^{\frac{-(2-p)}{p-1}\beta}=Ct^{(1-\frac{1}{p-1})\beta}$.

另外，由$U(t)=\mathscr{M}D_t\mathscr{F}\mathscr{M}$可得$\|v(t)\|_{L^q}\leqslant\|\mathscr{M}D_t\mathscr{F}U(-t)v(t)\|_{L^q}+\|\mathscr{M}D_t\mathscr{F}(\mathscr{M}-1)U(-t)v(t)\|_{L^q}$. 对上式右侧的第 2 项进行计算可得$\|\mathscr{M}D_t\mathscr{F}U(-t)v(t)\|_{L^q}=t^{\frac{2}{q}-1}\|\mathscr{F}U(-t)v(t)\|_{L^q}$. 于是再应用引理 3 的证明方法可得$\|\mathscr{M}D_t\mathscr{F}(\mathscr{M}-1)U(-t)v(t)\|_{L^q}=t^{\frac{2}{q}-1}\|\mathscr{F}(\mathscr{M}-1)U(-t)v(t)\|_{L^q}\leqslant Ct^{\frac{2}{q}-1-\frac{1}{q}}\||x|\varphi\|_{L^2}$，$q=\frac{2}{s_2}$，$0<s_2<1$. 基于该结果可进一步得$\|v(t)\|_{L^q}\leqslant Ct^{\frac{2}{q}-1}(t^{(1-\frac{1}{p-1})\beta}+t^{-\frac{1}{q}}\||x|\varphi\|_{L^2})\leqslant Ct^{\frac{2}{q}-1+(1-\frac{1}{p-1})\beta}$，其中$\frac{2-p}{p-1}\beta<\frac{1}{q}$，$1.780\,8\approx\frac{3+\sqrt{17}}{4}<p<2$，$0<\beta<1$. 定理 1 证毕.

参考文献：

[1] KITA N, SHIMOMURA A. Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with a subcritical dissipative nonlinearity[J]. Journal of Differential Equations, 2007, 242(1): 192-210.

[2] OGAWA T, SATO T. L^2-decay rate for the critical nonlinear Schrödinger equation with a small smooth data[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2020, 27: 18.

[3] SATO T. L^2-decay estimate for the dissipative nonlinear Schrödinger equation in the Gevrey class[J]. Archiv der Mathematik, 2020, 115(5): 575-588.

[4] KITA N, SATO T. Optimal L^2-decay of solutions to a nonlinear Schrödinger equation with sub-critical dissipative nonlinearity[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2022, 29: 41.

[5] KITA N, SATO T. Optimal L^2-decay of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation in higher space dimensions[J]. Journal of Differential Equations, 2023, 354: 49-66.

[6] KATAYAMA S, LI C H, SUNAGAWA H. A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D[J]. Differential Integral Equations, 2014, 27(3/4): 301-312.

[7] KITA N, SHIMOMURA A. Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 2009, 61(1): 39-64.

[8] JIN G Z, JIN Y F, LI C H. The initial value problem for nonlinear Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity in one space dimension[J]. Journal of Evolution Equations, 2016, 16(4): 983-995.

[9] HAYASHI N, LI C H, NAUMKIN P I. Time decay for nonlinear dissipative Schrödinger equations in optical fields [J]. Advances in Mathematical Physics, 2016, 2016: 3702738.

[10] LIU X, ZHANG T. Modified scattering for the one-dimensional Schrödinger equation with a subcritical dissipative nonlinearity[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2023. https://doi.org/10.1007/s10884-023-10272-4.

[11] HAYASHI N, NAUMKIN P I. Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations[J]. American Journal of Mathematics, 1998, 120(2): 369-389.