

文章编号: 1004-4353(2023)03-0250-07

# Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony 方程的行波解

朱引, 刘小华

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025)

**摘要:** 利用修正的辅助方程法研究了 Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony (KP-BBM) 方程的行波解, 得到了该方程的双曲余切函数解和雅可比椭圆函数解, 并利用 Matlab 软件给出了所得解的性态行为.

**关键词:** KP-BBM 方程; 修正辅助方程法; 行波解; 双曲函数解; 雅可比椭圆函数解

**中图分类号:** O175.29

**文献标志码:** A

## Traveling wave solutions of the Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony equation

ZHU Yin, LIU Xiaohua

(School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

**Abstract:** The traveling wave solution of the Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony (KP-BBM) equation was studied by the modified auxiliary equation method. The Hyperbolic cotangent solution and the Jacobi elliptic function solution of the equation were obtained, and the sexual behavior of the obtained solution was given by using Matlab software.

**Keywords:** Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony equation; modified auxiliary equation method; traveling wave solutions; hyperbolic function solutions; Jacobi elliptic function solutions

### 0 引言

非线性偏微分方程广泛存在于多个领域中, 如流体动力学、量子力学、浅水波理论、生物技术、信号处理等<sup>[1]</sup>. 为此, 学者们建立了许多有效的方法来获得非线性偏微分方程的精确解, 如  $(G'/G)$  展开法<sup>[2-9]</sup>、Homtpy 微扰技术<sup>[10]</sup>、Lie 对称分析方法<sup>[11-12]</sup>、各种块状孤子<sup>[13-14]</sup>等.

Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony (KP-BBM) 方程为:

$$u_{xt} + u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxxt} + \gamma u_{yy} = 0, \quad (1)$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  分别是非线性项、色散项和耗散项的系数. 由于该方程可描述某些非线性色散系统中的双向小振幅和弱色散长波, 因此许多学者对其进行了研究. 例如: Song 等<sup>[15]</sup>利用动力学系统的分岔方法研究了方程(1)的分岔相图, 并给出了方程(1)在不同参数条件下的孤立波数量, 同时通过一些特殊的同

收稿日期: 2023-05-08

基金项目: 贵州省教育厅自然科学研究项目([2022]015号, QJJ2023012, QJJ2023061, QJJ2023062)

第一作者: 朱引(1998—), 女, 硕士研究生, 研究方向为微分方程的定性分析.

通信作者: 刘小华(1975—), 女, 博士, 教授, 研究方向为微分方程的定性分析.

宿轨道得到了方程(1)的8个精确的孤立波解; Tariq 等<sup>[16]</sup>借助辅助方程法得到了 KP-BBM 方程的三角函数解; Saha 等<sup>[17]</sup>利用截断的 Painlevé 展开法生成了一个自动 Bäcklund 变换,并由此确定了 KP-BBM 方程的一些新的亮孤子解; Manafian 等<sup>[18]</sup>构造了方程(1)的周期波解,并通过数值模拟解的图形得到了方程(1)的多波、呼吸波、周期性、交叉扭折波解. 基于上述研究,本文利用修正的辅助方程法研究 KP-BBM 方程的行波解,并利用 Matlab 软件给出了该方程的行波解在不同参数条件下的 3D 图和 2D 图.

## 1 修正辅助方程法

本文考虑如下非线性偏微分方程:

$$P(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{xy}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2)$$

其中  $P$  是多项式函数. 修正辅助方程法的步骤为:

第1步 令行波变换

$$u(x, y, t) = U(\zeta), \quad \zeta = x + y - Ct, \quad (3)$$

其中  $C$  为波速. 将式(3)代入到式(2)中可得到以下常微分方程:

$$P(U, U', U'', \dots) = 0, \quad (4)$$

其中  $U' = \frac{dU}{d\zeta}$ .

第2步 假设方程(4)有如下形式的解:

$$U(\zeta) = \sum_{i=-n}^n \lambda_i \varphi^i(\zeta), \quad (5)$$

其中  $n$  是正整数,  $\lambda_i$  是待确定的任意常数,  $\varphi(\zeta)$  满足:

$$\varphi'^2(\zeta) = a + b\varphi^2(\zeta) + c\varphi^4(\zeta), \quad (6)$$

其中  $a, b, c$  是常数且不全为零. 方程(6)具有以下形式的解<sup>[19]</sup>: ① 当  $a=1, b=-(1+m^2), c=m^2$  时,  $\varphi(\zeta) = \operatorname{sn}(\zeta, m)$ , 其中  $m$  表示椭圆模量, 并且  $0 < m < 1$ . ② 当  $a=1-m^2, b=2m^2-1, c=-m^2$  时,  $\varphi(\zeta) = \operatorname{cn}(\zeta, m)$ , 其中  $m$  表示椭圆模量, 并且  $0 < m < 1$ . ③ 当  $a=m^2-1, b=2-m^2, c=-1$  时,  $\varphi(\zeta) = \operatorname{dn}(\zeta, m)$ , 其中  $m$  表示椭圆模量, 并且  $0 < m < 1$ . ④ 当  $a=m^2, b=-(1+m^2), c=1$  时,  $\varphi(\zeta) = \operatorname{ns}(\zeta, m)$ , 其中  $m$  表示椭圆模量, 并且  $0 < m < 1$ . ⑤ 当  $a=1-m^2, b=2-m^2, c=1$  时,  $\varphi(\zeta) = \operatorname{cs}(\zeta, m)$ , 其中  $m$  表示椭圆模量, 并且  $0 < m < 1$ . ⑥ 当  $a=1, b=2m^2-1, c=m^2(m^2-1)$  时,  $\varphi(\zeta) = \operatorname{sd}(\zeta, m)$ , 其中  $m$  表示椭圆模量, 并且  $0 < m < 1$ .

第3步 首先,根据齐次平衡原则计算式(5)中  $n$  的值;然后,将式(5)和式(6)代入到式(4)中求出关于  $\varphi^j(\zeta)$  的多项式,并令  $\varphi^j(\zeta)$  的系数为零,以此可得到关于  $C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_i (i=-2, -1, 0, 1, 2)$  的代数方程组;最后,求解所得的代数方程组即可得到方程(1)的解.

## 2 KP-BBM 方程的行波解

将式(3)代入方程(1)中可得:

$$(1 + \gamma - C)U'' + 2\alpha U'^2 + 2\alpha UU'' - C\beta U''' = 0. \quad (7)$$

对方程(7)进行积分(令积分常数为零)可得以下方程:

$$(1 + \gamma - C)U' + 2\alpha UU' - C\beta U'' = 0. \quad (8)$$

由平衡方程(8)中的最高阶非线性项  $UU'$  和最高阶导数项  $U''$  可得  $n=2$ . 由此可知式(5)可写为:

$$U(\zeta) = \lambda_0 + \lambda_1 \varphi^1(\zeta) + \lambda_{-1} \varphi^{-1}(\zeta) + \lambda_2 \varphi^2(\zeta) + \lambda_{-2} \varphi^{-2}(\zeta). \quad (9)$$

将式(9)和式(6)代入式(8)中可得到一个关于  $\varphi^j(\zeta)$  的多项式. 令每个关于  $\varphi^j(\zeta)$  的多项式的系数为零,则可得到如下关于  $C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_i (i=-2, -1, 0, 1, 2)$  的代数方程组:

$$\begin{cases} 4\alpha\lambda_2^2 - 24C\beta c\lambda_2 = 0, \\ 6\alpha\lambda_1\lambda_2 - 6C\beta c\lambda_1 = 0, \\ -4\alpha\lambda_{-2}^2 + 24C\beta a\lambda_{-2} = 0, \\ -6\alpha\lambda_{-1}\lambda_{-2} + 6C\beta a\lambda_{-1} = 0, \\ \lambda_1 + \gamma\lambda_1 - C\lambda_1 + 2\alpha\lambda_0\lambda_1 + 2\alpha\lambda_{-1}\lambda_2 - C\beta b\lambda_1 = 0, \\ -\lambda_{-1} - \gamma\lambda_{-1} + C\lambda_{-1} - 2\alpha\lambda_0\lambda_{-1} - 2\alpha\lambda_1\lambda_{-2} + C\beta b\lambda_{-1} = 0, \\ -2\lambda_{-2} - 2\gamma\lambda_{-2} + 2C\lambda_{-2} - 4\alpha\lambda_0\lambda_{-2} - 2\alpha\lambda_{-1}^2 + 8C\beta b\lambda_{-2} = 0, \\ 2\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2 - 2C\lambda_2 + 4\alpha\lambda_0\lambda_2 + 2\alpha\lambda_1^2 - 8C\beta b\lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

解代数方程组(10) 可得以下几组解:

第 1 组的解为:  $\lambda_{-2} = \frac{6C\beta c}{\alpha}$ ,  $\lambda_{-1} = 0$ ,  $\lambda_0 = \frac{4C\beta b - 1 - \gamma + C}{2\alpha}$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . 将上述解代入式(9)

中可得方程(1) 的解为:

$$U(\zeta) = \frac{4C\beta b - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta c}{\alpha} \varphi^{-2}(\zeta). \quad (11)$$

1) 当  $a = 1$ ,  $b = -(1 + m^2)$ ,  $c = m^2$  时, 由式(3) 可知式(11) 可以转化为:

$$u_1(x, y, t) = \frac{-4C\beta(1 + m^2) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta m^2}{\alpha} \frac{1}{sn^2(\zeta, m)}, \quad (12)$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ . 当  $m \rightarrow 1$  时, 式(12) 可以转化为:

$$u_2(x, y, t) = \frac{-8C\beta - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha} \coth^2(x + y - Ct).$$

2) 当  $a = 1 - m^2$ ,  $b = 2m^2 - 1$ ,  $c = -m^2$  时, 由式(3) 可知式(11) 可以转化为:

$$u_3(x, y, t) = \frac{4C\beta(2m^2 - 1) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{-6C\beta m^2}{\alpha} \frac{1}{cn^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ ,  $0 < m < 1$ .

3) 当  $a = m^2 - 1$ ,  $b = 2 - m^2$ ,  $c = -1$  时, 由式(3) 可知式(11) 可以转化为:

$$u_4(x, y, t) = \frac{4C\beta(2 - m^2) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{-6C\beta}{\alpha} \frac{1}{dn^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ ,  $0 < m < 1$ .

4) 当  $a = m^2$ ,  $b = -(1 + m^2)$ ,  $c = 1$  时, 由式(3) 可知式(11) 可以转化为:

$$u_5(x, y, t) = \frac{-4C\beta(1 + m^2) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha} \frac{1}{ns^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ ,  $0 < m < 1$ .

5) 当  $a = 1 - m^2$ ,  $b = 2 - m^2$ ,  $c = 1$  时, 由式(3) 可知式(11) 可以转化为:

$$u_6(x, y, t) = \frac{4C\beta(2 - m^2) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha} \frac{1}{cs^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ ,  $0 < m < 1$ .

6) 当  $a = 1$ ,  $b = 2m^2 - 1$ ,  $c = m^2(m^2 - 1)$  时, 由式(3) 可知式(11) 可以转化为:

$$u_7(x, y, t) = \frac{4C\beta(2m^2 - 1) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6m^2(m^2 - 1)C\beta}{\alpha} \frac{1}{sd^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ ,  $0 < m < 1$ .

第 2 组的解为:  $\lambda_{-2} = \frac{6C\beta a}{\alpha}$ ,  $\lambda_{-1} = 0$ ,  $\lambda_0 = \frac{1 + \gamma - C - 4C\beta b}{-2\alpha}$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{6C\beta c}{\alpha}$ . 将上述解代入

式(9) 中可得方程(1) 的解为:

$$U(\zeta) = \frac{1+\gamma-C-4C\beta b}{-2\alpha} + \frac{6C\beta c}{\alpha} \varphi^2(\zeta) + \frac{6C\beta a}{\alpha} \varphi^{-2}(\zeta). \quad (13)$$

1) 当  $a=1, b=-(1+m^2), c=m^2$  时, 由式(3) 可知式(13) 可以转化为:

$$u_8(x, y, t) = \frac{1+\gamma-C+4C\beta(1+m^2)}{-2\alpha} + \frac{6C\beta m^2}{\alpha} sn^2(\zeta, m) + \frac{6C\beta}{\alpha} \frac{1}{sn^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

2) 当  $a=1-m^2, b=2m^2-1, c=-m^2$  时, 由式(3) 可知式(13) 可以转化为:

$$u_9(x, y, t) = \frac{1+\gamma-C-4C\beta(2m^2-1)}{-2\alpha} + \frac{-6C\beta m^2}{\alpha} cn^2(\zeta, m) + \frac{6C\beta(1-m^2)}{\alpha} \frac{1}{cn^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

3) 当  $a=m^2-1, b=2-m^2, c=-1$  时, 由式(3) 可知式(13) 可以转化为:

$$u_{10}(x, y, t) = \frac{1+\gamma-C-4C\beta(2-m^2)}{-2\alpha} + \frac{-6C\beta}{\alpha} dn^2(\zeta, m) + \frac{6C\beta(m^2-1)}{\alpha} \frac{1}{dn^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

4) 当  $a=m^2, b=-(1+m^2), c=1$  时, 由式(3) 可知式(13) 可以转化为:

$$u_{11}(x, y, t) = \frac{1+\gamma-C+4C\beta(1+m^2)}{-2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha} ns^2(\zeta, m) + \frac{6C\beta m^2}{\alpha} \frac{1}{ns^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

5) 当  $a=1-m^2, b=2-m^2, c=1$  时, 由式(3) 可知式(13) 可以转化为:

$$u_{12}(x, y, t) = \frac{1+\gamma-C-4C\beta(2-m^2)}{-2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha} cs^2(\zeta, m) + \frac{6C\beta(1-m^2)}{\alpha} \frac{1}{cs^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct$ , 并且  $0 < m < 1$ .

6) 当  $a=1, b=2m^2-1, c=m^2(m^2-1)$  时, 由式(3) 可知式(13) 可以转化为:

$$u_{13}(x, y, t) = \frac{1+\gamma-C-4C\beta(2m^2-1)}{-2\alpha} + \frac{6m^2(m^2-1)C\beta}{\alpha} sd^2(\zeta, m) + \frac{6C\beta}{\alpha} \frac{1}{sd^2(\zeta, m)},$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

第3组的解为:  $\lambda_{-2}=0, \lambda_{-1}=0, \lambda_0=\frac{4C\beta b-1-\gamma+C}{2\alpha}, \lambda_1=0, \lambda_2=\frac{6C\beta c}{\alpha}$ . 将上述解代入到式

(9) 中可得方程(1) 的解为:

$$U(\zeta) = \frac{4C\beta b-1-\gamma+C}{2\alpha} + \frac{6C\beta c}{\alpha} \varphi^2(\zeta). \quad (14)$$

1) 当  $a=1, b=-(1+m^2), c=m^2$  时, 由式(3) 可知式(14) 可以转化为:

$$u_{14}(x, y, t) = \frac{-4C\beta(1+m^2)-1-\gamma+C}{2\alpha} + \frac{6C\beta m^2}{\alpha} sn^2(\zeta, m),$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

2) 当  $a=1-m^2, b=2m^2-1, c=-m^2$  时, 由式(3) 可知式(14) 可以转化为:

$$u_{15}(x, y, t) = \frac{4C\beta(2m^2-1)-1-\gamma+C}{2\alpha} + \frac{-6C\beta m^2}{\alpha} cn^2(\zeta, m),$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

3) 当  $a=m^2-1, b=2-m^2, c=-1$  时, 由式(3) 可知式(14) 可以转化为:

$$u_{16}(x, y, t) = \frac{4C\beta(2-m^2)-1-\gamma+C}{2\alpha} + \frac{-6C\beta}{\alpha} dn^2(\zeta, m),$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

4) 当  $a = m^2, b = -(1 + m^2), c = 1$  时, 由式(3) 可知式(14) 可以转化为:

$$u_{17}(x, y, t) = \frac{-4C\beta(1 + m^2) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha}ns^2(\zeta, m),$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

5) 当  $a = 1 - m^2, b = 2 - m^2, c = 1$  时, 由式(3) 可知式(14) 可以转化为:

$$u_{18}(x, y, t) = \frac{4C\beta(2 - m^2) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6C\beta}{\alpha}cs^2(\zeta, m),$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

6) 当  $a = 1, b = 2m^2 - 1, c = m^2(m^2 - 1)$  时, 由式(3) 可知式(14) 可以转化为:

$$u_{19}(x, y, t) = \frac{4C\beta(2m^2 - 1) - 1 - \gamma + C}{2\alpha} + \frac{6m^2(m^2 - 1)C\beta}{\alpha}sd^2(\zeta, m),$$

其中  $\zeta = x + y - Ct, 0 < m < 1$ .

### 3 解的性态分析

图 1 是方程(1) 的解  $u_2(x, y, t)$  在  $-5 \leq x, y \leq 5$  区间内的 3D 图(a) 和 2D 图(b). 其中: 3D 图的参数为  $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 4, C = 1, t = 1$ ; 2D 图中  $y = 2$ . 由图 1 可以看出, 解  $u_2(x, y, t)$  有一个尖峰, 并且图中的曲线无限接近  $x$  轴, 所以图 1 是方程(1) 的一个双曲余切函数解.

图 2—图 6 是方程(1) 的解  $u_3(x, y, t), u_4(x, y, t), u_6(x, y, t), u_8(x, y, t), u_{14}(x, y, t)$  在  $-5 \leq x, y \leq 5$  区间内的 3D 图(a) 和 2D 图(b). 其中: 3D 图的参数分别为  $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 4, C = 1, t = 1, m = 0.4$ ; 2D 图中  $y = 2$ . 由图 2(a)—图 6(a) 可以看出, 解  $u_3(x, y, t), u_4(x, y, t), u_6(x, y, t), u_8(x, y, t), u_{14}(x, y, t)$  有多个峰波, 并且高度不同; 由图 2(b)—图 6(b) 可以看出, 解  $u_3(x, y, t), u_4(x, y, t), u_6(x, y, t), u_8(x, y, t), u_{14}(x, y, t)$  是一组连续波组: 所以, 图 2—图 6 是方程(1) 的周期波解.

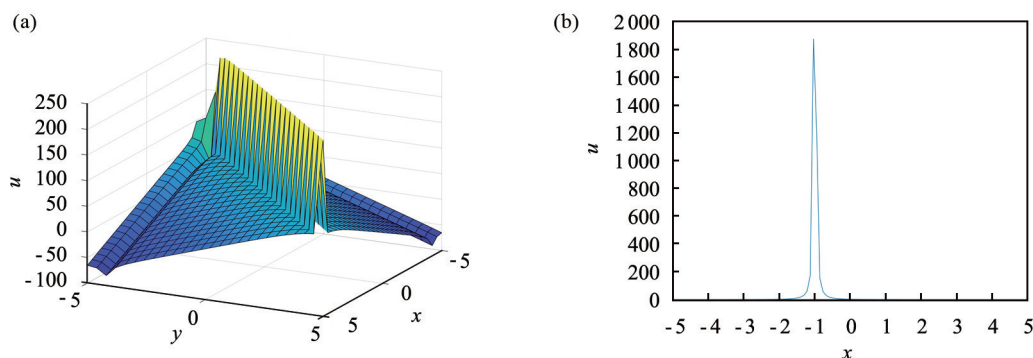


图 1 解  $u_2(x, y, t)$  的 3D 图(a) 和 2D 图(b)

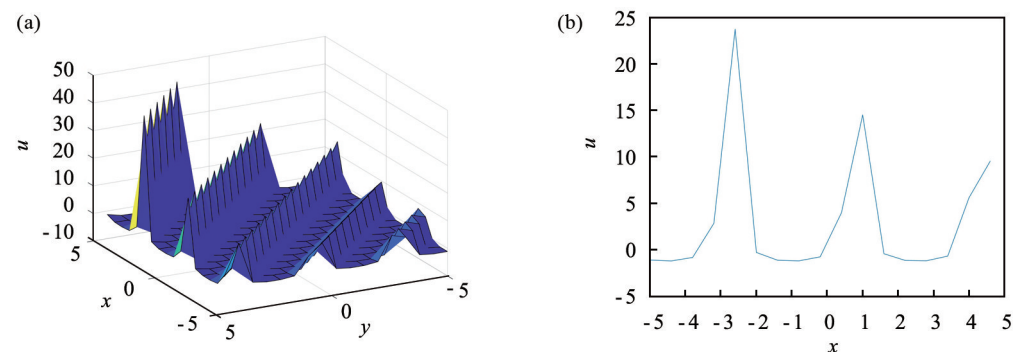
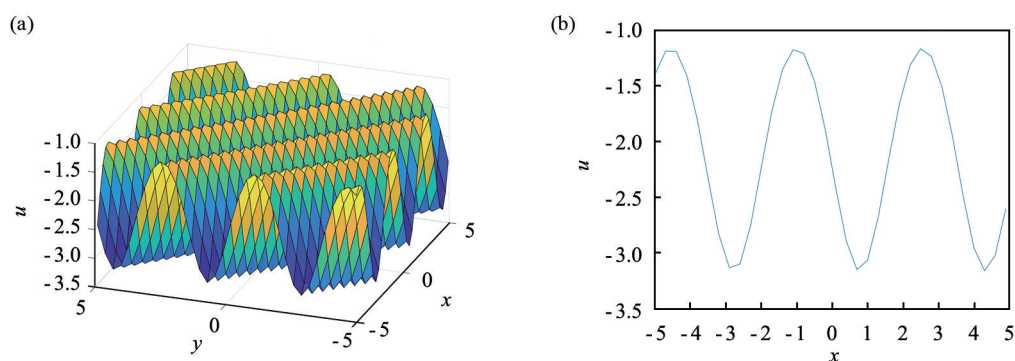
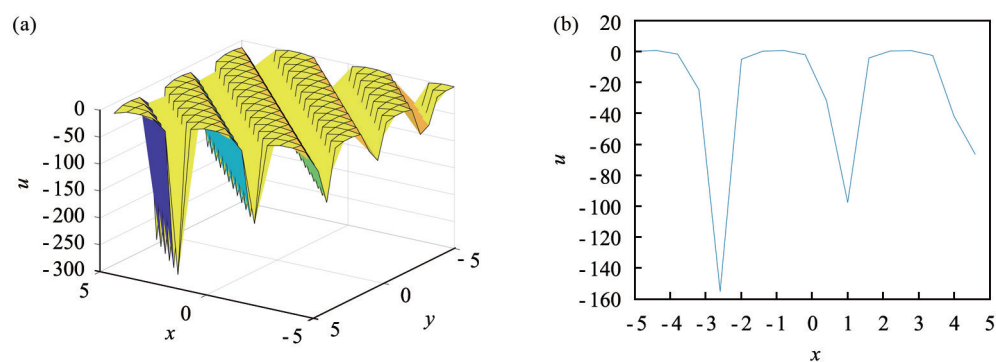
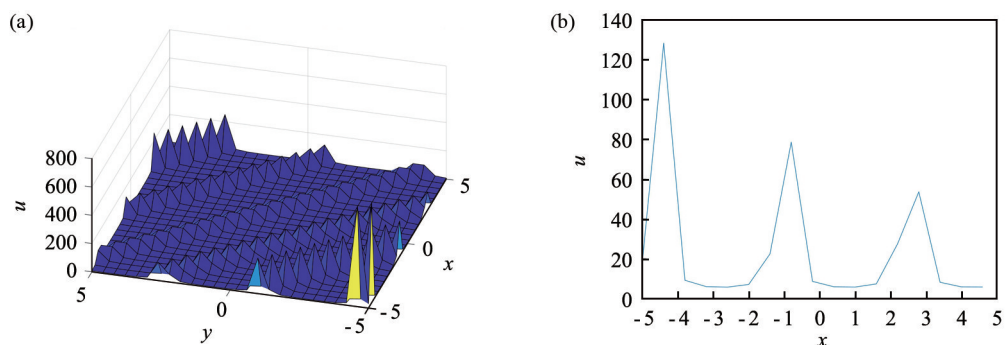
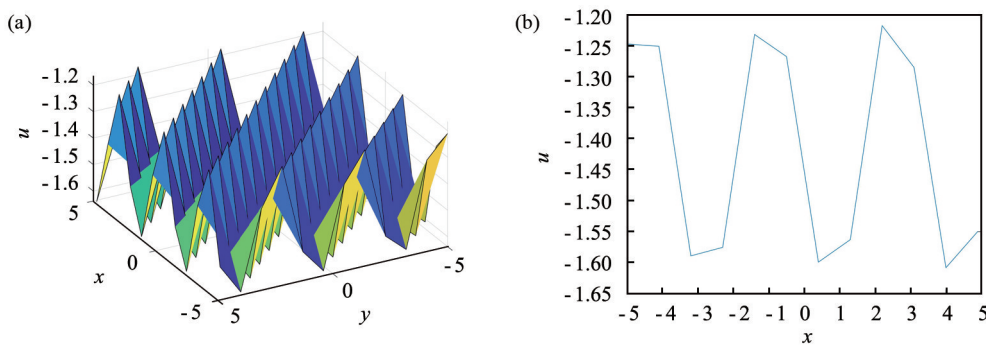


图 2 解  $u_3(x, y, t)$  的 3D 图(a) 和 2D 图(b)

图3 解  $u_4(x, y, t)$  的3D图(a)和2D图(b)图4 解  $u_6(x, y, t)$  的3D图(a)和2D图(b)图5 解  $u_8(x, y, t)$  的3D图(a)和2D图(b)图6 解  $u_{14}(x, y, t)$  的3D图(a)和2D图(b)

## 参考文献:

- [1] MANAFIAN J, ILHAN O A, ALIZADEH A. Periodic wave solutions and stability analysis for the KP-BBM equation with abundant novel interaction solutions[J]. Physica Scripta, 2020, 95(6):065203.

- [2] WANG M, LI X, ZHANG J. The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(4): 417-423.
- [3] AKBAR M A, ALI N H M, ZAYED E M E. Abundant exact traveling wave solutions of generalized bretherton equation via improved  $(G'/G)$ -expansion method[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2012, 57(2): 173.
- [4] AKBAR M A, HJ N, ALI M, et al. Some new exact traveling wave solutions to the  $(3+1)$ -dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. *World Appl Sci J*, 2012, 16(11): 1551-1558.
- [5] SAHOO S, RAY S S. New travelling wave and anti-kink wave solutions of space-time fractional  $(3+1)$ -dimensional Jimbo-Miwa equation[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2020, 67: 79-85.
- [6] ZAYED E M E, GEPREEL K A. The  $(G'/G)$ -expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2009, 50(1): 013502.
- [7] AKBAR M A, ALI N H M. The alternative  $(G'/G)$ -expansion method and its applications to nonlinear partial differential equations[J]. *Int J Phys Sci*, 2011, 6(35): 7910-7920.
- [8] MOHYUD-DIN S T. The alternative  $(G'/G)$ -expansion method with generalized Riccati equation: application to fifth order  $(1+1)$ -dimensional Caudrey-Dodd-Gibbon equation[J]. *Int J Phys Sci*, 2012, 75: 743.
- [9] ALAM M N, LI X. Exact traveling wave solutions to higher order nonlinear equations [J]. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2019, 4(3): 276-288.
- [10] DEHGHAN M, MANAFIAN J. The solution of the variable coefficients fourth-order parabolic partial differential equations by the homotopy perturbation method[J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2009, 64(7/8): 420-430.
- [11] KUMAR S, KUMAR D, WAZWAZ A M. Group invariant solutions of  $(3+1)$ -dimensional generalized B-type Kadomtsev Petviashvili equation using optimal system of Lie subalgebra [J]. *Physica Scripta*, 2019, 94(6): 065204.
- [12] KUMAR S, KUMAR D, KHARBANDA H. Lie symmetry analysis, abundant exact solutions and dynamics of multisolitons to the  $(2+1)$ -dimensional KP-BBM equation[J]. *Pramana*, 2021, 95(1): 33.
- [13] MOHYUD-DIN S T, IRSHAD A, AHMED N, et al. Exact solutions of  $(3+1)$ -dimensional generalized KP equation arising in physics[J]. *Results in Physics*, 2017, 7: 3901-3909.
- [14] MANAFIAN J, MOHAMMADI I B, ABAPOUR M. Breather wave, periodic, and cross-kink solutions to the generalized Bogoyavlensky-Konopelchenko equation[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, 43(4): 1753-1774.
- [15] SONG M, YANG C, ZHANG B. Exact solitary wave solutions of the Kadomtsov-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217(4): 1334-1339.
- [16] TARIQ K U H, SEADAWY A R. Soliton solutions of  $(3+1)$ -dimensional Kortewegde Vries Benjamin-Bona-Mahony, Kadomtsev-Petviashvili Benjamin-Bona-Mahony and modified Kortewegde Vries-Zakharov-Kuznetsov equations and their applications in water waves[J]. *Journal of King Saud University-Science*, 2019, 31(1): 8-13.
- [17] SAHA R S, SINGH S. New bright soliton solutions for Kadomtsev-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony equations and bidirectional propagation of water wave surface[J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2022, 33(5): 2250069.
- [18] MANAFIAN J, ILHAN O A, ALIZADEH A. Periodic wave solutions and stability analysis for the KP-BBM equation with abundant novel interaction solutions[J]. *Physica Scripta*, 2020, 95(6): 065203.
- [19] ALI A. Travelling waves solutions of the KP equation in weakly dispersive media[J]. *Open Physics*, 2022, 20(1): 715-723.