文章编号：1004-4353(2023)03-0244-06

几类两混合非对称凸体的相对曲率积分不等式

梁清海，　张德燕
（淮北师范大学 数学科学学院，安徽 淮北 235000）

摘要：将 6 种不同的凸函数与非对称的 Green-Osher 不等式相结合，得到了两个凸体处于膨胀位置时的相对曲率积分型不等式，该结果推广了文献[5]中关于闭凸曲线型积分不等式的相关结果.

关键词：严格凸体；凸函数；Green-Osher 不等式；相对曲率；膨胀
中图分类号：O186.5　　　**文献标志码**：A

Curvature integral inequalities for several classes of two mixed asymmetric convex bodies

LIANG Qinghai，　ZHANG Deyan
(*School of Mathematical Sciences*, *Huaibei Normal University*, *Huaibei* 235000, *China*)

Abstract: By combining six different convex functions with the asymmetric Green-Osher inequality, the integral inequality of relative curvature when two convex bodies are in the position of expansion is obtained, and the result generalizes the integral inequality of closed convex curves in literature [5].

Keywords: strictly convex body; convex function; Green-Osher inequality; relative curvature; dilation

0　引言

1999 年，Green 和 Osher[1] 在假设 K 是平面上的一个严格凸体，E 是平面上的一个关于原点对称的严格凸体的情况下，证明了如下不等式(Green-Osher 不等式)：

$$\frac{1}{V(E)}\int_0^{2\pi}F(\rho(\theta))h_E(\theta)(h_E(\theta)+h''_E(\theta))\mathrm{d}\theta \geqslant F(-t_1)+F(-t_2).$$

其中：$\rho(\theta)$ 是 K 相对于 E 的相对曲率半径，$F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的一个严格凸函数，t_1 和 t_2 是 K 相对于 E 的 Steiner 多项式的两个根. 2016 年，Xi 等[2] 为了解决平面上的 Dar 猜想，给出了膨胀位置的定义：设 K 和 P 是两个平面凸体，如果原点 $o\in K\cap P$ 且 $r(K,P)\subset K\subset R(K,P)$，则称凸体 K 和 P 处于膨胀位置，其中 $r(K,P)$ 和 $R(K,P)$ 分别是 K 相对于 P 的相对内半径和相对外半径，即：

$$r(K,P)=\max\{t>0: x+tP\subset K, x\in \mathbf{R}^n\},$$

$$R(K,P)=\min\{t>0: x+tP\supset K, x\in \mathbf{R}^n\}.$$

2019 年，Yang[3] 利用文献[2]中定义的膨胀位置给出了非对称凸体的 Green-Osher 不等式成立的充分必要条件，并得到如下引理 1.

收稿日期：2023-06-14
基金项目：安徽省高校优秀青年人才支持计划重点项目(gxyqZD2020022)
第一作者：梁清海(1998—)，男(布依族)，硕士研究生，研究方向为凸体几何.
通信作者：张德燕(1980—)，女，博士，副教授，研究方向为微分几何与凸体几何.

引理 1[3]　设 K 和 P 是平面上的两个光滑的严格凸体，$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径，如果 K 和 P 处于膨胀位置，$F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的一个严格凸函数，则有：

$$\frac{1}{V(P)}\int_0^{2\pi}F(\rho_{K,P}(\theta))h_P(\theta)(h_P(\theta)+h_P''(\theta))\mathrm{d}\theta \geqslant F(-t_1)+F(-t_2).$$

其中：t_1 和 t_2 为 K 相对于 P 的 Steiner 多项式的两个根，等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

2022 年，Zeng 等[4] 在文献[3] 的工作基础上，利用非对称的 Green-Osher 不等式证明了平面凸体曲率熵的 log-Minkowski 不等式. 2023 年，张泽源等[5] 讨论了平面凸体 K 的曲率积分型不等式，并利用 Green-Osher 不等式得到了如下结果：

$$\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{\kappa}\right)\mathrm{d}\theta \geqslant 2\pi f\left(\frac{L}{2\pi}\right), \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{\kappa}\right)\mathrm{d}\theta \geqslant 4\pi^2(1-L)+\frac{\pi L}{A}\ln 2\pi. \tag{2}$$

其中：式(1) 等号成立当且仅当 K 为圆盘；式(2) 等号成立当且仅当 K 为周长为 1 的圆盘；L 和 A 分别为 K 的周长和面积；$\frac{1}{\kappa}$ 是 K 的边界曲线的曲率半径；f 为函数 e^x、$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$、$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ 时，式(1) 成立；f 为函数 $-\frac{\ln x}{x}$ 时，式(2) 成立. 受文献[4] 和文献[5] 的启发，本文将 6 种不同的凸函数与非对称的 Green-Osher 不等式相结合，得到了这些凸函数的相对曲率积分下界(这些下界仅与平面凸体的面积和混合面积有关). 特别的，当其中一个凸体为单位圆盘时，式(1) 和式(2) 成立，因此本文的研究结果是对式(1) 和式(2) 的一种推广.

1　预备知识

记 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维的欧几里得空间，称 $\mathbf{R}^n$ 中具有非空内部的紧凸集为凸体，记 K^n 为所有凸体的集合，K_0^n 为内部包含原点的所有凸体的集合. 有关凸体的相关理论可参见文献[6-8].

定义 1[6]　设 $K\in\mathrm{K}^n$，并定义其支撑函数 $h_K:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为：$h_K(x)=\max\{x\cdot y;y\in K\}$，$x\in\mathbf{R}^n$，其中 $x\cdot y$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的标准内积.

由定义 1 易知，凸体的支撑函数具有一阶齐次可加性，并且可以唯一确定凸体.

设 $K,P\in\mathrm{K}^n$，$\lambda\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda>0$，定义 K 与 λ 的 Minkowski 乘法为 $\lambda K=\{\lambda x;x\in K\}$，定义 K 与 P 的 Minkowski 加法为 $K+P=\{x+y;x\in K,y\in P\}$. 对于平面中的两个凸体 K 和 P，其 Minkowski 组合 $(K+tP)$ 的面积 $(V(K+tP))$ 可以用相对 Steiner 多项式来表示，即：

$$V(K+tP)=V(K)+2V(K,P)t+V(P)t^2.$$

其中：$V(K,P)$ 是 K 和 P 的 Minkowski 混合面积. 如果平面中的两个凸体 K 和 P 的支撑函数 h_K 和 h_P 是光滑的，则有 $V(K,P)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}h_K(\theta)(h_P(\theta)+h_P''(\theta))\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}h_P(\theta)(h_K(\theta)+h_K''(\theta))\mathrm{d}\theta$.

定义 K 相对于 P 的相对曲率 $\kappa_{K,P}$ 为 $\kappa_{K,P}=\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}$，定义 K 相对于 P 的相对曲率半径 $\rho_{K,P}$ 为 $\rho_{K,P}=\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}$，于是由 Minkowski 不等式 $(V(K,P)^2-V(K)V(P)\geqslant 0)$ 可知 $V(K+tP)=0$ 有 2 个负的实根. 本文用 t_1 和 t_2 来表示 K 相对于 P 的 Steiner 多项式的 2 个负实根，即：

$$t_1=-\frac{V(K,P)}{V(P)}+\frac{\delta}{V(P)},\ t_2=-\frac{V(K,P)}{V(P)}-\frac{\delta}{V(P)}. \tag{3}$$

其中：$\delta=\sqrt{V(K,P)^2-V(K)V(P)}$. 关于 Steiner 多项式根的相关理论可参见文献[9] 和[10].

引理 2[11]　设 K 为 $\mathbf{R}^2$ 中的凸体，记 $V(K)$ 为 K 的面积，$\mathrm{d}V_K$ 和 $\mathrm{d}s$ 分别为 K 和其边界曲线 ∂K 的

面积微元和弧长微元,则有:① $\mathrm{d}s=(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta$;② $\kappa=\dfrac{1}{h_K+h_K''}$;③ $V(K)=\dfrac{1}{2}\int_{S^1}h_K(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta$;④ $\mathrm{d}V_K=\dfrac{1}{2}h_K(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta$.

定义 2[12] 设 $K,P\in\mathrm{K}_0^n$,ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面 S^{n-1} 上的 Borel 集,则称 $V_{K,P}(\omega)=\dfrac{1}{n}\cdot\int_\omega h_P(u)\mathrm{d}S_K(u)$ 是 K 和 P 的混合锥体积测度.由该式可知 $\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}V_{K,P}$ 正好是第1个混合体积 $V_1(K,P)$,即 $V_1(K,P)=\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}V_{K,P}$,且在平面上有 $V_1(K,P)=V_1(P,K)$.

注 1 在本文中用 $V(K,P)$ 代替 $V_1(K,P)$,记 B 为 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两个光滑的严格凸体,$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径.如果 K 和 P 处于膨胀位置,$F(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个严格凸函数,则有 $\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa_{K,P}}}\mathrm{d}V_P\geqslant V(P)\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}$,等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

证明 令 $F(x)=\mathrm{e}^x$,于是利用引理1和式(3)可得 $\dfrac{2}{V(P)}\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_P\geqslant \mathrm{e}^{-t_1}+\mathrm{e}^{-t_2}=\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}(\mathrm{e}^{\frac{-\delta}{V(P)}}+\mathrm{e}^{\frac{\delta}{V(P)}})$.对该式运用均值不等式可得 $\dfrac{2}{V(P)}\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_P\geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}$,即 $\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa_{K,P}}}\mathrm{d}V_P\geqslant V(P)\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}$.再由引理1可知,定理1中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

在定理1中取 $P=B$ 可得到以下推论1和推论2成立.

推论 1 设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体,记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积,则有 $2\pi\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{\pi}}}-\int_{\partial K}\kappa\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}s\leqslant 0$,等号成立当且仅当 K 为圆盘.

证明 由 $\dfrac{2}{V(P)}\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_P\geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}$ 可知 $-\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_P\leqslant -V(P)\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}$.再由 $V(K,P)^2-V(K)V(P)\geqslant 0$ 可知 $V(K,P)\geqslant\sqrt{V(K)V(P)}$,所以有

$$-\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_P\leqslant -V(P)\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{V(P)}}}.\tag{4}$$

下面考虑

$$-\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_P=-\frac{1}{2}\int_{S^1}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}h_P(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta=-\int_{S^1}\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_{K,P}.\tag{5}$$

由式(4)和式(5)可得:

$$V(P)\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{V(P)}}}-\int_{S^1}\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_{K,P}\leqslant 0.\tag{6}$$

在式(6)中取 $P=B$,于是再由 $\kappa=\dfrac{1}{h_K+h_K''}$ 可得:$V(P)\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{V(P)}}}-\int_{S^1}\dfrac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\mathrm{d}V_{K,P}\leqslant 0$,$V(P)\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{V(P)}}}-\int_{S^1}\kappa\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}V_{K,B}\leqslant 0$,$2\pi\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{\pi}}}-\int_{\partial K}\kappa\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}s\leqslant 0$.由此再由定理1知,推论1中式子的等号成立当且仅当 K 和 P 位似,故 K 是一个圆盘.

推论 2　设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体，记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积，则有 $\int_{\partial K}\kappa\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{\pi}}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\right)\mathrm{d}s\leqslant 0$，等号成立当且仅当 K 为圆盘.

证明　将 $\mathrm{d}s=(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta$，$\kappa=\dfrac{1}{h_K+h_K''}$ 和 $\int_{S^1}\mathrm{d}\theta=2\pi$ 代入推论 1 中的公式可得：

$$2\pi\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{\pi}}}-\int_{\partial K}\kappa\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}s=\int_{S^1}\frac{1}{h_K+h_K''}(h_K+h_K'')\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{\pi}}}\mathrm{d}\theta-\int_{\partial K}\kappa\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}s=\int_{\partial K}\kappa\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{V(K)}{\pi}}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa}}\right)\mathrm{d}s\leqslant 0.$$

定理 2　设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两个光滑的严格凸体，$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径. 如果 K 和 P 处于膨胀位置，$F(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的严格凸函数，则有：

$$\int_{S^1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa_{K,P}}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\kappa_{K,P}}}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant V(P)\left(\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}-\mathrm{e}^{-\frac{V(K,P)}{V(P)}}\right),\tag{7}$$

等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

证明　令 $F(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，于是利用引理 1 和式(3) 得：

$$\frac{2}{V(P)}\int_{S^1}\left(\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}-\mathrm{e}^{-\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{V(P)}}+\mathrm{e}^{\frac{\delta}{V(P)}}\right)-\mathrm{e}^{-\frac{V(K,P)}{V(P)}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\delta}{V(P)}}+\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{V(P)}}\right).$$

对上式运用均值不等式可得 $\dfrac{2}{V(P)}\int_{S^1}\left(\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}-\mathrm{e}^{-\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant 2\left(\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}-\mathrm{e}^{-\frac{V(K,P)}{V(P)}}\right)$，由此可得式(7)成立. 于是再根据引理 1 可知，定理 2 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似. 证毕.

定理 3　设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两个光滑的严格凸体，$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径. 如果 K 和 P 处于膨胀位置，$F(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个严格凸函数，则有：

$$\int_{S^1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\kappa_{K,P}}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{\kappa_{K,P}}}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant V(P)\left(\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}+\mathrm{e}^{-\frac{V(K,P)}{V(P)}}\right),\tag{8}$$

等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

证明　令 $F(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，于是利用引理 1 和式(3) 可得：

$$\frac{2}{V(P)}\int_{S^1}\left(\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}+\mathrm{e}^{-\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\right)\mathrm{d}V_P=\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{V(P)}}+\mathrm{e}^{\frac{\delta}{V(P)}}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{V(K,P)}{V(P)}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\delta}{V(P)}}+\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{V(P)}}\right).$$

对上式运用均值不等式可得 $\dfrac{2}{V(P)}\int_{S^1}\left(\mathrm{e}^{\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}+\mathrm{e}^{-\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant 2\left(\mathrm{e}^{\frac{V(K,P)}{V(P)}}+\mathrm{e}^{-\frac{V(K,P)}{V(P)}}\right)$，由此可得式(8)成立. 于是再根据引理 1 可知，定理 3 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似. 证毕.

定理 4　设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两个光滑的严格凸体，$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径. 如果 K 和 P 处于膨胀位置，$F(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个严格凸函数，则有：

$$\int_{S^1}\kappa_{K,P}\ln\kappa_{K,P}\mathrm{d}V_P\geqslant V(P)^2(1-V(K,P))+\frac{V(P)V(K,P)}{V(K)}\ln V(P),\tag{9}$$

等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

证明　令 $F(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$，于是利用引理 1 和式(3) 可得：

$$\begin{aligned}&\frac{2}{V(P)}\int_{S^1}\left(-\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}\ln\left(\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}\right)\right)\mathrm{d}V_P\geqslant-\frac{\ln(-t_1)}{-t_1}-\frac{\ln(-t_2)}{-t_2}=\\&-\left(\frac{V(P)}{V(K,P)-\delta}\ln\left(\frac{V(K,P)-\delta}{V(P)}\right)+\frac{V(P)}{V(K,P)+\delta}\ln\left(\frac{V(K,P)+\delta}{V(P)}\right)\right)=\\&-V(P)\left[\frac{\ln(V(K,P)-\delta)}{V(K,P)-\delta}+\frac{\ln(V(K,P)+\delta)}{V(K,P)+\delta}-\frac{\ln V(P)}{V(K,P)-\delta}-\frac{\ln V(P)}{V(K,P)+\delta}\right]=\\&V(P)\left[-\frac{\ln(V(K,P)-\delta)}{V(K,P)-\delta}-\frac{\ln(V(K,P)+\delta)}{V(K,P)+\delta}+\frac{2V(K,P)}{V(K)V(P)}\ln V(P)\right]\geqslant\end{aligned}$$

$$V(P)\left[-(V(K,P)-\delta)+1-(V(K,P)+\delta)+1+\frac{2V(K,P)}{V(K)V(P)}\ln V(P)\right]=$$

$$2V(P)(1-V(K,P))+\frac{2V(K,P)}{V(K)}\ln V(P).$$

由上式可得 $\frac{2}{V(P)}\int_{S^1}\left(-\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}\ln\left(\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}\right)\right)\mathrm{d}V_P\geqslant 2V(P)(1-V(K,P))+\frac{2V(K,P)}{V(K)}\ln V(P)$,由此可得式(9)成立.对该式应用 $-\frac{\ln x}{x}\geqslant -x+1$ 进行放缩后再根据引理 1 可知,定理 4 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似.证毕.

定理 5 设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两个光滑的严格凸体,$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径.如果 K 和 P 处于膨胀位置,$F(x)$ 是定义在区间$(0,+\infty)$上的一个严格凸函数,则有 $\int_{S^1}\kappa_{K,P}\mathrm{d}V_P\geqslant\frac{V(K,P)V(P)}{V(K)}$,等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

证明 令 $F(x)=\frac{1}{x}$,于是利用引理 1 和式(3)可得 $\int_{S^1}\frac{h_P+h_P''}{h_K+h_K''}\mathrm{d}V_P\geqslant\frac{V(K,P)V(P)}{V(K)}$,即 $\int_{S^1}\kappa_{K,P}\mathrm{d}V_P\geqslant\frac{V(K,P)V(P)}{V(K)}$.于是再根据引理 1 可知,定理 5 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位.证毕.

在定理 5 中取 $P=B$ 可得到以下推论 3 成立.

推论 3 设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体,记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积,则有 $2\pi\sqrt{\frac{\pi}{V(K)}}-\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\leqslant 0$,等号成立当且仅当 K 为圆盘.

由定理 5 可知,推论 3 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似,故 K 是一个圆盘.将 $\mathrm{d}s=(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta$,$\kappa=\frac{1}{h_K+h_K''}$ 和 $\int_{S^1}\mathrm{d}\theta=2\pi$ 代入推论 3 中的公式可得如下推论 4.

推论 4 设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体,记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积,则有 $\int_{\partial K}\left(\kappa\sqrt{\frac{\pi}{V(K)}}-\kappa^2\right)\mathrm{d}s\leqslant 0$,等号成立当且仅当 K 为圆盘.

定理 6 设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两个光滑的严格凸体,$\rho_{K,P}(\theta)$ 是 K 相对于 P 的相对曲率半径.如果 K 和 P 处于膨胀位置,$F(x)$ 是定义在区间$(0,+\infty)$上的一个严格凸函数,则有:

$$\int_{S^1}\left(\frac{1}{\kappa_{K,P}}+\ln\kappa_{K,P}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant V(K,P)-2V(P)\ln\frac{V(K)}{V(P)},$$

等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

证明 令 $F(x)=x-\ln x$,于是利用引理 1 和式(3)可得:

$$\int_{S^1}\left(\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}-\ln\frac{h_K+h_K''}{h_P+h_P''}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant V(K,P)-2V(P)\ln\frac{V(K)}{V(P)},$$

$$\int_{S^1}\left(\frac{1}{\kappa_{K,P}}+\ln\kappa_{K,P}\right)\mathrm{d}V_P\geqslant V(K,P)-2V(P)\ln\frac{V(K)}{V(P)}.$$

由上式再根据引理 1 可知,定理 6 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似.证毕.

在定理 6 中取 $P=B$ 可得到以下推论 5.

推论 5 设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 为光滑的严格凸体,记 κ 和 $V(K)$ 分别为 K 的边界曲线的曲率和面积,则有 $4\pi\ln\frac{V(K)}{\pi}-2\sqrt{\pi V(K)}+\int_{\partial K}(1+\kappa\ln\kappa)\mathrm{d}s\geqslant 0$,等号成立当且仅当 K 为圆盘.

由定理 6 可知,推论 5 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似,故 K 是一个圆盘.将 $\mathrm{d}s=(h_K+h_K'')\mathrm{d}\theta$,

$\kappa=\dfrac{1}{h_K+h_K''}$ 和 $\int_{S^1}\mathrm{d}\theta=2\pi$ 代入推论 5 中的公式可得如下推论 6.

推论 6　设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体，记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积，则有 $\int_{\partial K}\left(2\kappa\ln\dfrac{V(K)}{\pi}+\kappa\ln\kappa-\kappa\sqrt{\dfrac{V(K)}{\pi}}+1\right)\mathrm{d}s\geqslant 0$，等号成立当且仅当 K 为圆盘.

在引理 1 中若取函数 $F(x)$ 分别为 x^β 和 $-x^\gamma$，并取 $\beta>1$ 和 $0<\gamma<1$，则由此可得如下引理 3.

引理 3[9]　设 K 和 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的两光滑严格凸体，$\kappa_{K,P}$ 是 K 相对于 P 的相对曲率. 若 K 和 P 处于膨胀位置，$\beta>1$，$0<\gamma<1$，则有 $\int_{S^1}\left(\dfrac{1}{\kappa_{K,P}}\right)^\beta\mathrm{d}V_P\geqslant V(K,P)^\beta V(P)^{1-\beta}$，$\int_{S^1}\left(\dfrac{1}{\kappa_{K,P}}\right)^\gamma\mathrm{d}V_P\leqslant V(K,P)^\gamma V(P)^{1-\gamma}$，且式中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似.

在引理 3 中取 $P=B$ 可得如下推论 7(运用推论 1 的证明方法).

推论 7　设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体，记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积，则有 $\int_{\partial K}\kappa^{1-\beta}\mathrm{d}s-2\pi\left(\dfrac{V(K)}{\pi}\right)^{\frac{\beta}{2}}\geqslant 0$，$\int_{\partial K}\kappa^{1-\gamma}\mathrm{d}s-2\pi\left(\dfrac{V(K)}{\pi}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\leqslant 0$，其中 $\beta>1$，$0<\gamma<1$.

由引理 3 可知，推论 7 中的等号成立当且仅当 K 和 P 位似，故 K 是一个圆盘. 在推论 7 中运用推论 2 的证明方法可得如下推论 8.

推论 8　设 $K\in\mathrm{K}_0^2$ 是光滑的严格凸体，记 κ 和 $V(K)$ 分别是 K 的边界曲线的曲率和面积，则有 $\int_{\partial K}\left(\kappa^{1-\beta}-\kappa\left(\dfrac{V(K)}{\pi}\right)^{\frac{\beta}{2}}\right)\mathrm{d}s\geqslant 0$，$\int_{\partial K}\left(\kappa^{1-\gamma}-\kappa\left(\dfrac{V(K)}{\pi}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right)\mathrm{d}s\leqslant 0$，其中 $\beta>1$，$0<\gamma<1$，等号成立当且仅当 K 为圆盘.

参考文献：

[1] GREEN M, OSHER S. Steiner polynomials, Wulff flows, and some new isoperimetric inequalities for convex plane curves[J]. Asian Journal of Mathematics, 1999, 3(3): 659-676.

[2] XI D M, LENG G S. Dar's conjecture and the log-Brunn-Minkowski inequality[J]. Journal of Differential Geometry, 2016, 103(1): 145-189.

[3] YANG Y L. Nonsymmetric extension of the Green-Osher inequality[J]. Geometriae Dedicata, 2019, 203(1): 155-161.

[4] ZENG C N, DONG X, WANG Y, et al. The log-Minkowski inequality of curvature entropy for non-symmetric convex bodies[J]. arXiv preprint arXiv: 2211.14484, 2022.

[5] 张泽源，赵会文. 几类闭凸曲线的曲率积分不等式[J]. Pure Mathematics, 2023, 13(4): 1056-1061.

[6] SCHNEIDER R. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory[M]. London: Cambridge University Press, 2014.

[7] BÖRÖCZKY K J, LUTWAK E, YANG D, et al. The dual Minkowski problem for symmetric convex bodies[J]. Advances in Mathematics, 2019, 356: 106805.

[8] GREGOR W, KOLDOBSKY A. Inequalities for the derivatives of the Radon transform on convex bodies[J]. Israel Journal of Mathematics, 2021, 246(1): 261-280.

[9] HENK M, CIFRE M A H. Notes on the roots of Steiner polynomials[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2008, 24(2): 631-644.

[10] JETTER M. Bounds on the roots of the Steiner polynomial[J]. Adv Geom, 2011, 11(2): 313-317.

[11] 董旭，王亚玲，周玉奇，等. 两混合凸体的相对曲率积分不等式[J/OL]. 数学学报(中文版): 1-12[2023-03-09]. http://42.194.184.28/kcms/detail/11.2038.o1.20230509.0907.002.html.

[12] HU J Q, XIONG G. A new affine invariant geometric functional for polytopes and its associated affine isoperimetric inequalities[J]. International Mathematics Research Notices, 2019, 2021(12): 8977-8995.