文章编号: 1004-4353(2023)03-0236-08

区间值犹豫模糊集群决策模型及其应用

朱国成[1], 胡伟[2], 徐健[1]

(1.广东创新科技职业学院 通识教育学院, 广东 东莞 523960;
2.广州科技贸易职业学院 经济管理学院, 广州 511442)

摘要: 为了更好地解决区间值犹豫模糊集(IVHFS)群决策问题,利用平面向量建立了一种可以从多个角度判定方案优劣的群决策模型. 首先,在 IVHFS 中定义了区间值隶属度的中位数、区间值隶属度的清晰度,并以此通过构造平面向量来刻画 IVHFS. 其次,通过利用平面向量簇刻画 IVHFS 建立了区间值犹豫模糊元(IVHFE)的外部固定函数模型和内部稳定函数模型,给出比较 2 个 IVHFE 大小的准则和计算二者距离的方法,并根据所有方案的外部固定函数值和内部稳定函数值分别计算了测评准则的外部权重和内部权重(依据外部权重与内部权重的相离程度值来确定测评准则的综合权重). 再次,通过利用参数调整方案的外部固定函数值与内部稳定函数值的比例计算了各个方案的综合决策值. 最后,利用数值算例验证了本文方法的可行性.

关键词: 区间值犹豫模糊集; 平面向量; 外部固定函数模型; 内部稳定函数模型; 综合权重; 区间值隶属度
中图分类号: O159 **文献标志码**: A

Interval-valued hesitant fuzzy set group decision making model and its application

ZHU Guocheng[1], HU Wei[2], XU Jian[1]

(1. *School of General Education*, *Guangdong Innovative Technical College*, *Dongguan* 523960, *China*;
2. *School of Business Administration*, *Guangzhou Vocational University of Technology and Business*, *Guangzhou* 511442, *China*)

Abstract: To solve the interval-value hesitant fuzzy set group decision making problem, a group decision model which can observe the scheme ordering results from multiple perspectives was established by using plane vector knowledge. Firstly, the median and clarity of interval-valued membership degree were defined in the interval-valued hesitant fuzzy set, and the interval-valued hesitant fuzzy set was described by forming a plane vector. Secondly, the external fixed function model, the internal stable function model, the size comparison criterion and the distance measure model of two interval-valued hesitant fuzzy elements were established by describing the interval-valued hesitant fuzzy sets with the plane vector clusters. The external weight and internal weight of the evaluation criteria were calculated respectively according to the external fixed function values and internal stability function values of all schemes (the comprehensive weight of the evaluation criteria was determined according to the degree of separation between the external weight and the internal weight). Thirdly, the ratio between the external fixed function value and the internal stable function value of the scheme was adjusted by parameter, and the comprehensive decision value of each scheme was calculated. Finally, a numerical example was used to verify the feasibility of the proposed method.

Keywords: interval-valued hesitant fuzzy set; plane vector; external fixed function model; internal stable function model; comprehensive weight; interval-valued membership degree

---

收稿日期: 2023-02-16
基金项目: 广东创新科技职业学院特色创新类重点项目(2023TSZD05);广东省普通高校特色创新类课题(2023KTSCX414)
作者简介: 朱国成(1986—),男,副教授,研究方向为模糊信息决策与最优化.

0　引言

区间值犹豫模糊集(interval-valued hesitant fuzzy set，IVHFS)[1]作为犹豫模糊集(hesitant fuzzy set，HFS)[2]的一种特殊形式，因其隶属度值可用区间数进行表示，且能够储存更多的决策信息，因此在群决策问题中受到广泛关注[3-4]. 目前，在解决IVHFS群决策问题时，通常是在区间犹豫模糊条件下应用IVHFS来求解，而将IVHFS的决策信息以平面向量的形式进行研究的文献还未见报道.

在获取方案的综合决策值时，计算测评准则的权重是不可缺少的重要环节. 目前，计算测评准则权重通常使用的方法有熵值法[5]、线性规划法[6]、离差最大化方法[7]等，但这些方法均是根据各方案在其各个测评准则上获得的得分差异值来分配测评准则权重的，而将各方案在其各个测评准则上的内部得分差异值作为计算测评准则权重的研究尚未见报道. 在解决群决策问题的过程中，由于评审专家组在各方案测评准则上的意见统一程度会对方案的排序结果产生较大影响，因此本文给出了一种考虑评审专家意见统一程度(在各方案的各个测评准则上)的排序方法，并通过数值算例验证了该方法的可行性和有效性.

1　基础知识

定义1[1]　设X为一个非空集合，并称$A=\{\langle x,\tilde{h}_{A(x)}\rangle \mid x\in X\}$为IVHFS，其中$\tilde{h}_{A(x)}$为区间值犹豫模糊元(IVHFE)，$\tilde{h}_{A(x)}=\{\tilde{\gamma}\mid\tilde{\gamma}=[\gamma^{\mathrm{L}},\gamma^{\mathrm{U}}]\subset[0,1]\}(\gamma^{\mathrm{L}}\leqslant\gamma^{\mathrm{U}})$，IVHFE $\tilde{h}_{A(x)}$为集合X中的元素x属于A的可能区间数的集合. 当$\gamma^{\mathrm{L}}=\gamma^{\mathrm{U}}$时，$\tilde{h}_{A(x)}$退化为犹豫模糊元.

定义2[8]　设$\tilde{v}_1(x)$为一个IVHFE，$\tilde{v}_1(x)=\{[r_1^{1\mathrm{L}},r_1^{1\mathrm{U}}],[r_1^{2\mathrm{L}},r_1^{2\mathrm{U}}],\cdots,[r_1^{k\mathrm{L}},r_1^{k\mathrm{U}}]\}$，则$\tilde{v}_1(x)$的得分函数的计算方法为：

$$s(\tilde{v}_1(x))=\sum\nolimits_{k'=1}^{k}\frac{r_1^{k'\mathrm{L}}+r_1^{k'\mathrm{U}}}{2k};\tag{1}$$

$\tilde{v}_1(x)$的精确函数的计算方法为：

$$\delta(\tilde{v}_1(x))=\left[\frac{1}{k}\sum\nolimits_{k'=1}^{k}\left(\frac{r_1^{k'\mathrm{L}}+r_1^{k'\mathrm{U}}}{2}-s(\tilde{v}_1(x))\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{2}$$

定义3[9]　对于任意2个IVHFE $\tilde{v}_1(x)$、$\tilde{v}_2(x)$：① 若$s(\tilde{v}_1(x))>s(\tilde{v}_2(x))$，则$\tilde{v}_1(x)>\tilde{v}_2(x)$；② 若$s(\tilde{v}_1(x))\sim s(\tilde{v}_2(x))$，则$\tilde{v}_1(x)\sim\tilde{v}_2(x)$.

定义4　设$\tilde{v}_1(x)$、$\tilde{v}_2(x)$为2个IVHFE，则$\tilde{v}_1(x)$、$\tilde{v}_2(x)$之间的距离测度$d(\tilde{v}_1(x),\tilde{v}_2(x))$需要满足以下3个公理性条件：① 非负性，即$d(\tilde{v}_1(x),\tilde{v}_2(x))\geqslant 0$；② 可交换性，即$d(\tilde{v}_1(x),\tilde{v}_2(x))=d(\tilde{v}_2(x),\tilde{v}_1(x))$；③ 反身性，即$d(\tilde{v}_1(x),\tilde{v}_2(x))=0\Leftrightarrow\tilde{v}_1(x)=\tilde{v}_2(x)$.

2　IVHFS的新测度范式

为了能将IVHFS用向量簇进行表示，本文通过给出IVHFE的一个新的表达形式建立了一个新的IVHFE的测度模型.

定义5　IVHFE$\tilde{h}=\{\gamma_k=[\gamma_k^-,\gamma_k^+]\mid\gamma_k\subset[0,1];\gamma_k^-\leqslant\gamma_k^+;k=1,2,\cdots,\#\tilde{h}\}$，式中$\gamma_k$为区间值隶属度，$\#\tilde{h}$为区间值隶属度$\gamma_k$的个数.

由定义5可知，可将区间值隶属度γ_k的中位数计算方法定义为$\bar{\gamma}_k=\dfrac{\gamma_k^-+\gamma_k^+}{2}$，可将区间值隶属度$\gamma_k$的清晰度定义为$\gamma_k^{\mp}=\dfrac{\gamma_k^-}{\gamma_k^+}$. 由清晰度的定义可知：$\gamma_k^{\mp}$越小，$\gamma_k$的长度越长，即区间值隶属度$\gamma_k$越不清晰；当$\gamma_k^{\mp}=1$时，区间值隶属度$\gamma_k$退化为一个具体的隶属度值，且此时的隶属度$\gamma_k$最清晰.

为了解决区间值隶属度左端点为0时而导致的区间值隶属度的清晰度为0的问题,本文规定:① 若 $\gamma_k^-=\gamma_k^+=0$,则 $\gamma_k^{\mp}=0$;② 若 $\gamma_k^-=0$,则当 $\gamma_k^+\in(0,\frac{1}{2}]$ 时 $\gamma_k^{\mp}=\gamma_k^+$,当 $\gamma_k^+\in(\frac{1}{2},1]$ 时 $\gamma_k^{\mp}=1-\gamma_k^+$. 根据区间值隶属度 γ_k 的中位数与清晰度,本文用平面向量来表示 IVHFE $\tilde{h}$,详见定义6.

定义6 IVHFE $\tilde{h}$ 的向量表示形式为 $\tilde{\tilde{h}}=\{\boldsymbol{\gamma}_k=(\bar{\gamma}_k,\gamma_k^{\mp})\mid\bar{\gamma}_k\in[0,1];\gamma_k^{\mp}\in[0,1];k=1,2,\cdots,\#\tilde{\tilde{h}}\}$,式中 $\bar{\gamma}_k$ 为区间值隶属度 γ_k 的中位数,$\gamma_k^{\mp}$ 为区间值隶属度 γ_k 的清晰度,$\#\tilde{\tilde{h}}$ 为区间值隶属度 γ_k 的个数($\#\tilde{\tilde{h}}=\#\tilde{h}$).

由定义6可知,一个 IVHFE $\tilde{h}$ 只能转换为一个唯一的 $\tilde{\tilde{h}}$. 虽然 $\tilde{\tilde{h}}$ 的表现形式与 IVHFE $\tilde{h}$ 的表现形式不同,但为了方便理解,本文也采用 IVHFE 来表示 $\tilde{\tilde{h}}$,也用区间值犹豫模糊数(interval-valued hesitant fuzzynumber,IVHFN)来表示 $\tilde{\tilde{h}}$ 中的元素. 根据定义5和定义6,本文给出如下定义7— 定义9.

定义7 定义 IVHFE $\tilde{h}$ 的外部固定函数 $\varphi(\tilde{h})$ 的计算方法为:

$$\varphi(\tilde{h})=\frac{\sqrt{2}}{2\#\tilde{\tilde{h}}}\sum\nolimits_{k=1}^{\#\tilde{\tilde{h}}}\|\boldsymbol{\gamma}_k\|,\tag{3}$$

式中 $\|\boldsymbol{\gamma}_k\|$ 为向量 $\boldsymbol{\gamma}_k$ 的模,$\#\tilde{\tilde{h}}$ 为 IVHFE $\tilde{h}$ 中 IVHFN 的个数. 因1个 IVHFE $\tilde{h}$ 仅能转换为1个唯一的 $\tilde{\tilde{h}}$,所以有 $\#\tilde{\tilde{h}}=\#\tilde{h}$.

定义8 在由 $\#\tilde{h}$ 个元素构成的 IVHFE $\tilde{h}$ 中,若 IVHFE $\tilde{h}$ 中的任意2个 IVHFN 可记为 $\gamma_k=[\gamma_k^-,\gamma_k^+]$, $\gamma_{k'}=[\gamma_{k'}^-,\gamma_{k'}^+]$ 的形式,则 IVHFE $\tilde{h}$ 的内部稳定函数 $\phi(\tilde{h})$ 的计算方法为:

$$\phi(\tilde{h})=\begin{cases}\dfrac{1}{2C_{\#\tilde{h}}^2}\sum\nolimits_{k'=1,k'\neq k}^{\#\tilde{h}}\sum\nolimits_{k=1}^{\#\tilde{h}}\dfrac{\boldsymbol{\gamma}_k\cdot\boldsymbol{\gamma}_{k'}}{\|\boldsymbol{\gamma}_k\|\cdot\|\boldsymbol{\gamma}_{k'}\|},\ \#\tilde{h}\geqslant 2;\\ 1,\ \#\tilde{h}=1.\end{cases}\tag{4}$$

式中:$C_{\#\tilde{h}}^2=\dfrac{\#\tilde{h}\,!}{2!\,(\#\tilde{h}-2)!}$ 为二项式系数,$\|\boldsymbol{\gamma}_k\|$ 和 $\|\boldsymbol{\gamma}_{k'}\|$ 分别为向量 $\boldsymbol{\gamma}_k$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{k'}$ 的模,$\boldsymbol{\gamma}_k=(\bar{\gamma}_k,\gamma_k^{\mp})$, $\boldsymbol{\gamma}_{k'}=(\bar{\gamma}_{k'},\gamma_{k'}^{\mp})$, $\bar{\gamma}_k=\frac{1}{2}(\gamma_k^-+\gamma_k^+)$, $\gamma_k^{\mp}=\frac{\gamma_k^-}{\gamma_k^+}$, $\bar{\gamma}_{k'}=\frac{1}{2}(\gamma_{k'}^-+\gamma_{k'}^+)$, $\gamma_{k'}^{\mp}=\frac{\gamma_{k'}^-}{\gamma_{k'}^+}$. 在定义8中,计算 IVHFE $\tilde{h}$ 的内部稳定函数值的方法为:先将 IVHFE $\tilde{h}$ 转换为 IVHFE $\tilde{\tilde{h}}$,然后再计算 IVHFE $\tilde{\tilde{h}}$ 中所有两两向量夹角余弦值的平均值 $\phi(\tilde{h})$(若向量 $\boldsymbol{\gamma}_k$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{k'}$ 之间的夹角用 $\langle\boldsymbol{\gamma}_k,\boldsymbol{\gamma}_{k'}\rangle$ 表示,则有 $\cos\langle\boldsymbol{\gamma}_k,\boldsymbol{\gamma}_{k'}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{\gamma}_k\cdot\boldsymbol{\gamma}_{k'}}{\|\boldsymbol{\gamma}_k\|\cdot\|\boldsymbol{\gamma}_{k'}\|}$). $\phi(\tilde{h})$ 值的大小能够反映 IVHFE $\tilde{\tilde{h}}$ 中的元素集中度. 一般情况下,$\phi(\tilde{h})$ 值越大,IVHFE $\tilde{\tilde{h}}$ 中的元素就越集中(IVHFE $\tilde{\tilde{h}}$ 中的共线元素除外,因为向量 $\boldsymbol{\gamma}_k$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{k'}$ 共线时 $\cos\langle\boldsymbol{\gamma}_k,\boldsymbol{\gamma}_{k'}\rangle=1$). 因1个 IVHFE $\tilde{h}$ 仅能转换为1个唯一的 $\tilde{\tilde{h}}$,因此可用 IVHFE $\tilde{\tilde{h}}$ 中的元素集中度来表示 IVHFE $\tilde{h}$ 中的元素集中程度.

定义9 对于任意2个 IVHFE($\tilde{h}_1=\{\gamma_{11}=[\gamma_{11}^-,\gamma_{11}^+],\gamma_{12}=[\gamma_{12}^-,\gamma_{12}^+],\cdots,\gamma_{1\#\tilde{h}_1}=[\gamma_{1\#\tilde{h}_1}^-,\gamma_{1\#\tilde{h}_1}^+]\}$, $\tilde{h}_2=\{\gamma_{21}=[\gamma_{21}^-,\gamma_{21}^+],\gamma_{22}=[\gamma_{22}^-,\gamma_{22}^+],\cdots,\gamma_{2\#\tilde{h}_2}=[\gamma_{1\#\tilde{h}_2}^-,\gamma_{1\#\tilde{h}_2}^+]\}$),可根据 IVHFE 的外部固定函数值和内部稳定函数值来判断 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的大小,其规则为:① 若 $\varphi(\tilde{h}_1)\succ\varphi(\tilde{h}_2)$,则 $\tilde{h}_1\succ\tilde{h}_2$. ② 若 $\varphi(\tilde{h}_1)\sim\varphi(\tilde{h}_2)$,则:$\phi(\tilde{h}_1)\succ\phi(\tilde{h}_2)$ 时,$\tilde{h}_1\succ\tilde{h}_2$;$\phi(\tilde{h}_1)\sim\phi(\tilde{h}_2)$ 时,$\tilde{h}_1\sim\tilde{h}_2$.

下面以数值算例来说明定义9的可行性.

例1 已知2个 IVHFE($\tilde{h}_1=\{[0.4,0.5],[0.6,0.8]\}$, $\tilde{h}_2=\{[0.4,0.7],[0.5,0.6]\}$),请比较 IVHFE

$\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的大小.

解　根据定义 3 的比较规则可得 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的得分函数值分别为 $s(\tilde{h}_1)=0.575$，$s(\tilde{h}_2)=0.55$，即 $\tilde{h}_1 \succ \tilde{h}_2$. 根据定义 9 的比较规则可得 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的外部固定函数值分别为 $\varphi(\tilde{h}_1)=0.6873$，$\varphi(\tilde{h}_2)=0.6334$，即 $\tilde{h}_1 \succ \tilde{h}_2$.

例 2　已知 2 个 IVHFE（$\tilde{h}_1=\{[0.3,0.5],[0.6,0.8]\}$，$\tilde{h}_2=\{[0.4,0.7],[0.5,0.6]\}$），请比较 IVHFE $\tilde{h}_1$ 与 $\tilde{h}_2$ 的大小.

解　根据定义 3 的比较规则可得 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的得分函数值为 $s(\tilde{h}_1)=s(\tilde{h}_2)=0.55$. 此时需要进一步计算二者的精确函数值来判断其大小. 因 $\delta(\tilde{h}_1)=0.15$，$\delta(\tilde{h}_2)=0$，所以 $\tilde{h}_1 \prec \tilde{h}_2$. 根据定义 9 的比较规则可得 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的外部固定函数值分别为 $\varphi(\tilde{h}_1)=0.6177$ 和 $\varphi(\tilde{h}_2)=0.6334$，$\tilde{h}_1 \prec \tilde{h}_2$.

由例 1 和例 2 可知，利用定义 9 判断 2 个 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的排序是可行的. 另外，当 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的得分函数值相等时，文献[9] 中的方法需要进一步比较二者的精确函数值才能排序，而本文方法利用 IVHFE 的外部固定函数值即可直接排序.

定义 10　任意 2 个 IVHFE（$\tilde{h}_1=\{\gamma_{11}=[\gamma_{11}^-,\gamma_{11}^+],\gamma_{12}=[\gamma_{12}^-,\gamma_{12}^+],\cdots,\gamma_{1\#\tilde{h}_1}=[\gamma_{1\#\tilde{h}_1}^-,\gamma_{1\#\tilde{h}_1}^+]\}$，$\tilde{h}_2=\{\gamma_{21}=[\gamma_{21}^-,\gamma_{21}^+],\gamma_{22}=[\gamma_{22}^-,\gamma_{22}^+],\cdots,\gamma_{2\#\tilde{h}_2}=[\gamma_{1\#\tilde{h}_2}^-,\gamma_{1\#\tilde{h}_2}^+]\}$）均满足以下条件：

1) 在 $\tilde{h}_1$ 中，$\bar{\gamma}_{1k}>\bar{\gamma}_{1(k+1)}$. 若 $\bar{\gamma}_{1k}=\bar{\gamma}_{1(k+1)}$，则 $\gamma_{1k}^{\mp}>\gamma_{1(k+1)}^{\mp}$. $\bar{\gamma}_{1k}=\dfrac{1}{2}(\gamma_{1k}^-+\gamma_{1k}^+)$，$\gamma_{1k}^{\mp}=\dfrac{\gamma_{1k}^-}{\gamma_{1k}^+}$，$k\in\{1,2,\cdots,\#\tilde{h}_1\}$，$\#\tilde{h}_1$ 为 IVHFE $\tilde{h}_1$ 中元素的个数.

2) 在 $\tilde{h}_2$ 中，$\bar{\gamma}_{2k'}>\bar{\gamma}_{2(k'+1)}$. 若 $\bar{\gamma}_{2k'}=\bar{\gamma}_{2(k'+1)}$，则 $\gamma_{2k'}^{\mp}>\gamma_{2(k'+1)}^{\mp}$. $\bar{\gamma}_{2k'}=\dfrac{1}{2}(\gamma_{2k'}^-+\gamma_{2k'}^+)$，$\gamma_{2k'}^{\mp}=\dfrac{\gamma_{2k'}^-}{\gamma_{2k'}^+}$，$k'\in\{1,2,\cdots,\#\tilde{h}_2\}$，$\#\tilde{h}_2$ 为 IVHFE $\tilde{h}_2$ 中元素的个数.

在测度 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 的距离时，若 $\#\tilde{h}_1\neq\#\tilde{h}_2$，则此时需要先将二者中的元素均化为 1 个，然后再计算二者之间的距离. 由于化简前后的 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 有较大差别，因此本文将化简为 1 个元素以后的 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 分别用符号 $\bar{h}_1$ 与 $\bar{h}_2$ 表示，即 $\bar{h}_1=\{[\gamma_1^-,\gamma_1^+]\}$，$\bar{h}_2=\{[\gamma_2^-,\gamma_2^+]\}$，其中 $\gamma_1^-=\dfrac{\sum_{k=1}^{\#\tilde{h}_1}\gamma_{1k}^-}{\#\tilde{h}_1}$，$\gamma_1^+=\dfrac{\sum_{k=1}^{\#\tilde{h}_1}\gamma_{1k}^+}{\#\tilde{h}_1}$，$\gamma_2^-=\dfrac{\sum_{k'=1}^{\#\tilde{h}_2}\gamma_{2k'}^-}{\#\tilde{h}_2}$，$\gamma_2^+=\dfrac{\sum_{k'=1}^{\#\tilde{h}_2}\gamma_{2k'}^-}{\#\tilde{h}_2}$.

定义 11　在定义 10 的基础上，定义 IVHFE $\tilde{h}_1$ 与 IVHFE $\tilde{h}_2$ 之间的距离测度公式为：

$$d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\#\tilde{h}_1}\sum_{k=1}^{\#\tilde{h}_2}\|\boldsymbol{\gamma}_{1k}-\boldsymbol{\gamma}_{2k}\|}{2\#\tilde{h}_1}, & \#\tilde{h}_1=\#\tilde{h}_2;\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\|}{2}, & \#\tilde{h}_1\neq\#\tilde{h}_2.\end{cases}\tag{5}$$

在式(5) 中：$\|\boldsymbol{\gamma}_{1k}-\boldsymbol{\gamma}_{2k}\|$ 为向量 $\boldsymbol{\gamma}_{1k}-\boldsymbol{\gamma}_{2k}$ 的模，$\|\boldsymbol{\gamma}_{1k}-\boldsymbol{\gamma}_{2k}\|=\sqrt{(\bar{\gamma}_{1k}-\bar{\gamma}_{2k})^2+(\gamma_{1k}^{\mp}-\gamma_{2k}^{\mp})}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}(\gamma_{1k}^-+\gamma_{1k}^+)-\dfrac{1}{2}(\gamma_{2k}^-+\gamma_{2k}^+)\right)^2+\left(\dfrac{\gamma_{1k}^-}{\gamma_{1k}^+}-\dfrac{\gamma_{2k}^-}{\gamma_{2k}^+}\right)^2}$，其中 $\boldsymbol{\gamma}_{1k}=(\bar{\gamma}_{1k},\gamma_{1k}^{\mp})$，$\bar{\gamma}_{1k}=\dfrac{1}{2}(\gamma_{1k}^-+\gamma_{1k}^+)$，$\gamma_{1k}^{\mp}=\dfrac{\gamma_{1k}^-}{\gamma_{1k}^+}$，$\boldsymbol{\gamma}_{2k}=(\bar{\gamma}_{2k},\gamma_{2k}^{\mp})$，$\bar{\gamma}_{2k}=\dfrac{1}{2}(\gamma_{2k}^-+\gamma_{2k}^+)$，$\gamma_{2k}^{\mp}=\dfrac{\gamma_{2k}^-}{\gamma_{2k}^+}$. $\|\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\|$ 为向量 $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$ 的模，$\|\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\|=\sqrt{(\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_2)^2+(\gamma_1^{\mp}-\gamma_2^{\mp})^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}(\gamma_1^-+\gamma_1^+)-\dfrac{1}{2}(\gamma_2^-+\gamma_2^+)\right)^2-\left(\dfrac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}-\dfrac{\gamma_2^-}{\gamma_2^+}\right)^2}$，其中 $\boldsymbol{\gamma}_1=(\bar{\gamma}_1,\gamma_1^{\mp})$，

$\bar{\gamma}_1=\dfrac{1}{2}(\gamma_1^-+\gamma_1^+)$, $\gamma_1^{\mp}=\dfrac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=(\bar{\gamma}_2,\gamma_2^{\mp})$, $\bar{\gamma}_2=\dfrac{1}{2}(\gamma_2^-+\gamma_2^+)$, $\gamma_2^{\mp}=\dfrac{\gamma_2^-}{\gamma_2^+}$.

下面证明定义 11 满足定义 4 中的 3 个公理性条件.

1) 首先证当 $\#\tilde{h}_1\neq\#\tilde{h}_2$ 时 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)$ 满足定义 4 中的 3 个公理性条件. ① 由距离测度公式 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=\dfrac{\sqrt{2}\,\|\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\|}{2}$ 可知, $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)\geqslant 0$ 和 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=d(\tilde{h}_2,\tilde{h}_1)$ 显然成立. ② 当 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0$ 时,只需证明 $\tilde{h}_1=\{[\gamma_1^-,\gamma_1^+]\}=\tilde{h}_2=\{[\gamma_2^-,\gamma_2^+]\}$ 成立即可. 由于当 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0$ 时有 $\|\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2\|=0$,因此有 $\bar{\gamma}_1=\bar{\gamma}_2$, $\gamma_1^{\mp}=\gamma_2^{\mp}$. 又因为 $\bar{\gamma}_1=\dfrac{\gamma_1^-+\gamma_1^+}{2}$, $\bar{\gamma}_2=\dfrac{\gamma_2^-+\gamma_2^+}{2}$, $\gamma_1^{\mp}=\dfrac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}$, $\gamma_2^{\mp}=\dfrac{\gamma_2^-}{\gamma_2^+}$,所以有 $\gamma_1^-=\dfrac{2\bar{\gamma}_1\cdot\gamma_1^{\mp}}{\gamma_1^{\mp}+1}$, $\gamma_1^+=\dfrac{2\bar{\gamma}_1}{\gamma_1^{\mp}+1}$, $\gamma_2^-=\dfrac{2\bar{\gamma}_2\cdot\gamma_2^{\mp}}{\gamma_2^{\mp}+1}$, $\gamma_2^+=\dfrac{2\bar{\gamma}_2}{\gamma_2^{\mp}+1}$. 由上述可得 $\gamma_1^-=\gamma_2^-$, $\gamma_1^+=\gamma_2^+$,即 $\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$. 当$\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$ 时有 $\gamma_1^-=\gamma_2^-$, $\gamma_1^+=\gamma_2^+$,由此显然可得 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0$,即 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0\Leftrightarrow\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$ 成立.

2) 当 $\#\tilde{h}_1=\#\tilde{h}_2$ 时: ① 由距离测度公式 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=\dfrac{\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\#\tilde{h}_1}\sum_{k=1}^{\#\tilde{h}_2}\|\boldsymbol{\gamma}_{1k}-\boldsymbol{\gamma}_{2k}\|}{2\#\tilde{h}_1}$ 可知, $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)\geqslant 0$ 和 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=d(\tilde{h}_2,\tilde{h}_1)$ 显然成立. ② 当 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0$ 时,对于任意的 $k\in\{1,2,\cdots,\#\tilde{h}_1\}$ 必有 $\bar{\gamma}_{1k}=\bar{\gamma}_{2k}$ 和 $\gamma_{1k}^{\mp}=\gamma_{2k}^{\mp}$ 成立. 又因为 $\bar{\gamma}_{1k}=\dfrac{1}{2}(\gamma_{1k}^-+\gamma_{1k}^+)$, $\bar{\gamma}_{2k}=\dfrac{1}{2}(\gamma_{2k}^-+\gamma_{2k}^+)$, $\gamma_{1k}^{\mp}=\dfrac{\gamma_{1k}^-}{\gamma_{1k}^+}$, $\gamma_{2k}^{\mp}=\dfrac{\gamma_{2k}^-}{\gamma_{2k}^+}$,所以有 $\gamma_{1k}^-=\dfrac{2\bar{\gamma}_{1k}\cdot\gamma_{1k}^{\mp}}{\gamma_{1k}^{\mp}+1}$, $\gamma_{1k}^+=\dfrac{2\bar{\gamma}_{1k}}{\gamma_{1k}^{\mp}+1}$, $\gamma_{2k}^-=\dfrac{2\bar{\gamma}_{2k}\cdot\gamma_{2k}^{\mp}}{\gamma_{2k}^{\mp}+1}$, $\gamma_{2k}^+=\dfrac{2\bar{\gamma}_{2k}}{\gamma_{2k}^{\mp}+1}$,故 $\gamma_{1k}^-=\gamma_{2k}^-$, $\gamma_{1k}^+=\gamma_{2k}^+$. 根据 k 的任意性,可得 $\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$. 因当 $\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$ 时有 $\gamma_{1k}^-=\gamma_{2k}^-$, $\gamma_{1k}^+=\gamma_{2k}^+$,所以 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0$,故 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0\Leftrightarrow\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$ 成立.

结合 1) 和 2) 可知,定义 11 满足定义 4 中的 3 个公理性条件.

例 3 计算 IVHFE $\tilde{h}_1=\{[0.4,0.8],[0.3,0.5]\}$ 与 $\tilde{h}_2=\{[0.6,0.8],[0.4,0.5]\}$ 的距离 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)$.

解 因为 $\#\tilde{h}_1=\#\tilde{h}_2=2$,所以根据定义 6 可将 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 用平面向量分别表示为 $\tilde{\tilde{h}}_1$、$\tilde{\tilde{h}}_2$, $\tilde{\tilde{h}}_1=\{\boldsymbol{\gamma}_{11}=(0.6,0.5),\boldsymbol{\gamma}_{12}=(0.4,0.6)\}$, $\tilde{\tilde{h}}_2=\{\boldsymbol{\gamma}_{21}=(0.70,0.75),\boldsymbol{\gamma}_{22}=(0.45,0.8)\}$. 由此再根据式(5)可得 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0.7033$.

例 4 计算 IVHFE $\tilde{h}_1=\{[0.45,0.75],[0.35,0.55]\}$ 与 $\tilde{h}_2=\{[0.2,0.4],[0.45,0.65],[0.55,0.75]\}$ 的距离 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)$.

解 因为 $\#\tilde{h}_1\neq\#\tilde{h}_2$,所以先将 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 中的元素均化为 1 个(化简后的 IVHFE $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$ 分别用 $\bar{h}_1$、$\bar{h}_2$ 表示). 由此根据定义 10 可得 $\bar{h}_1=\{[0.4,0.65]\}$, $\bar{h}_2=\{[0.4,0.60]\}$. 再根据定义 6 将 $\bar{h}_1$ 和 $\bar{h}_2$ 用平面向量分别表示为 $\tilde{\tilde{h}}_1$ 和 $\tilde{\tilde{h}}_2$,于是有 $\tilde{\tilde{h}}_1=\{\boldsymbol{\gamma}_1=(0.525,0.6154)\}$, $\tilde{\tilde{h}}_2=\{\boldsymbol{\gamma}_2=(0.50,0.6667)\}$,由此再根据式(5) 得 $d(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)=0.7058$.

3 IVHFS 决策模型的建立

为了应用 IVHFS 解决群决策问题,本文给出如下 IVHFS 多属性群决策问题的定义.

定义 12 设在多属性群决策问题中,评审专家组集合用 $Z=(z_1,\cdots,z_t,\cdots,z_T)$ 表示(对评审专家没有偏好),备选方案集合用 $A=(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_I)$ 表示,测评准则集合用 $G=(g_1,\cdots,g_j,\cdots,g_J)$ 表示,测评准则的外部权重和内部权重以及综合权重分别用 ω_j^1、ω_j^2、ω_j 表示且均未知,第 t 位专家在第 j 个测

评准则上给予第 i 个方案的评价信息用区间值隶属度 γ_{tij} 表示（$\gamma_{tij}\subset[0,1]$）. 汇总所有评价专家给出的评价信息 γ_{tij} 后即可得第 i 个方案在第 j 个测评准则上的评价数据：IVHFE $\tilde{h}_{ij}$，$\tilde{h}_{ij}=\{\gamma_{ijk}=[\gamma_{ijk}^{-},\gamma_{ijk}^{+}]\mid\gamma_{ijk}\subset[0,1],\gamma_{ijk}^{-}\leqslant\gamma_{ijk}^{+},k\in\{1,2,\cdots,\#\tilde{h}_{ij}\}\}$，其中 $\#\tilde{h}_{ij}$ 表示 IVHFN $\tilde{h}_{ijk}$ 的个数，$\tilde{h}_{ijk}=[\gamma_{ijk}^{-},\gamma_{ijk}^{+}]$ 表示 IVHFN.

本文根据定义 12 建立决策模型，同时默认测评准则类型为效益型.

3.1　测评准则权重的计算

根据所有方案在其各个测评准则上的得分差异计算所得的测评准则权重（外部权重），用符号 ω_j^1（$j\in\{1,2,\cdots,J\}$）表示；根据评审专家组在各个测评准则上对所有方案给出的评分差异计算所得的测评准则权重（内部权重），用符号 ω_j^2（$j\in\{1,2,\cdots,J\}$）表示；测评准则的综合权重用符号 ω_j（$j\in\{1,2,\cdots,J\}$）表示. 计算测评准则综合权重的过程为：

首先，根据式(3)和式(4)计算出每个方案在各个测评准则上的外部固定函数值 $\varphi(\tilde{h}_{ij})$ 和内部稳定函数值 $\phi(\tilde{h}_{ij})$. 其次，分别计算每个测评准则下的熵值 S_j^1 和 S_j^2，计算公式为 $S_j^1=-\dfrac{1}{\ln I}\sum_{i=1}^{I}\varphi(\tilde{h}_{ij})\cdot\ln\varphi(\tilde{h}_{ij})$，$S_j^2=-\dfrac{1}{\ln I}\sum_{i=1}^{I}\phi(\tilde{h}_{ij})\ln\phi(\tilde{h}_{ij})$. 再次，计算每个测评准则的两种权重 ω_j^1 和 ω_j^2，计算公式为 $\omega_j^1=\dfrac{|1-S_j^1|}{\sum_{j'=1}^{J}|1-S_{j'}^1|}$，$\omega_j^2=\dfrac{|1-S_j^2|}{\sum_{j''=1}^{J}|1-S_{j''}^2|}$. 最后，确定各测评准则的综合权重 ω_j，计算公式为 $\omega_j=\dfrac{|\omega_j^1-\omega_j^2|}{\sum_{j'''=1}^{J}|\omega_{j'''}^1-\omega_{j'''}^2|}$（$j\in\{1,2,\cdots,J\}$）.

由上述计算测评准则综合权重的过程可知，本文方法不仅考虑了所有方案在所有测评准则上的得分差异情况，还兼顾了各个方案在所有测评准则上因决策专家评分不同而产生的差异；因此，本文提出的计算测评准则综合权重的方法较为合理，可用于对测评准则进行赋权.

3.2　决策过程

步骤 1　利用式(3)和式(4)分别计算各方案在所有测评准则上的外部固定函数值 $\varphi(\tilde{h}_{ij})$ 和内部稳定函数值 $\phi(\tilde{h}_{ij})$（$i=1,2,\cdots,I;j=1,2,\cdots,J$）.

步骤 2　计算测评准则的外部权重 ω_j^1、内部权重 ω_j^2 和综合权重 ω_j（$j\in\{1,2,\cdots,J\}$）.

步骤 3　计算各方案的综合决策值 $F(a_i)$：

$$F(a_i)=\prod_{j=1}^{J}(\alpha\varphi(\tilde{h}_{ij})+\beta\phi(\tilde{h}_{ij}))^{\omega_j},\ i=1,2,\cdots,I. \tag{6}$$

式中，参数 $\alpha,\beta\in[0,1]$，$\alpha+\beta=1$. 决策者通过对参数 α 和 β 进行调整就可以依据测评准则上的外部固定函数值与内部稳定函数值的不同比例来计算方案的综合决策值.

步骤 4　对所得的各方案的综合决策值 $F(a_i)$ 进行排序，其中最大 $F(a_i)$ 值所对应的方案 a_i 为最优.

步骤 5　结束.

4　决策案例

某校科技处收到 5 个教学改革项目申请书，按照学校教学科研工作安排，需在其中择优选取 2 个项目作为立项项目. 科技处邀请 3 位评审专家（对 3 位评审专家无偏好）对 5 个项目申请书进行评审. 测评准则包括可行性（g_1）、理论研究系统性（g_2）和创新性（g_3）. 将 5 个项目申请书标记为 a_i（$i=1,2,3,4,5$）. 3 个测评准则的外部权重（ω_j^1）、内部权重（ω_j^2）和综合权重（ω_j）（$j=1,2,3$）均未知. 3 位评审专家给出的原始评审数据见表 1.

表 1 3 位评审专家对 5 个项目申请书给出的评审信息

申请书	g_1	g_2	g_3
a_1	{[0.62,0.72],[0.65,0.78]}	{[0.74,0.88],[0.68,0.84],[0.62,0.78]}	{[0.82,0.94]}
a_2	{[0.84,0.96]}	{[0.68,0.76],[0.72,0.82]}	{[0.72,0.78],[0.66,0.76],[0.64,0.72]}
a_3	{[0.71,0.79],[0.67,0.75]}	{[0.86,0.96]}	{[0.71,0.77],[0.73,0.79],[0.65,0.71]}
a_4	{[0.61,0.67],[0.63,0.71],[0.65,0.75]}	{[0.68,0.76]}	{[0.88,0.98]}
a_5	{[0.71,0.77],[0.73,0.79]}	{[0.64,0.76],[0.68,0.78]}	{[0.78,0.82]}

依据本文方法对以上 5 个项目申请书的评审结果进行排序需先将表 1 中的原始评审信息转换为用平面向量表示的 IVHFS 决策信息(见表 2),然后再建立群决策模型进行排序.

表 2 以平面向量表示的评审数据

申请书	g_1	g_2	g_3
a_1	{(0.67,0.8611),(0.72,0.8228)}	{(0.81,0.9136),(0.76,0.8095),(0.70,0.7949)}	{(0.88,0.8723)}
a_2	{(0.90,0.8750)}	{(0.72,0.8947),(0.77,0.8780)}	{(0.75,0.9231),(0.71,0.8684),(0.68,0.8889)}
a_3	{(0.75,0.8987),(0.71,0.8933)}	{(0.91,0.8958)}	{(0.74,0.9221),(0.76,0.9241),(0.68,0.9155)}
a_4	{(0.64,0.9104),(0.67,0.8873),(0.70,0.8667)}	{(0.72,0.8947)}	{(0.93,0.8980)}
a_5	{(0.74,0.9221),(0.76,0.9241)}	{(0.70,0.8421),(0.73,0.8718)}	{(0.80,0.9512)}

依据表 2 中的评审数据,本文建立的群决策模型的决策步骤如下:

步骤 1 利用式(3)和式(4)分别计算 5 个项目申请书在 3 个测评准则上的外部固定函数值 $\varphi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$ 和内部稳定函数值 $\phi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$ $(i=1,2,3,4,5;\ j=1,2,3)$. 经计算,分别为:

$\varphi(\tilde{h}_{11}(p_{11}))=0.7723$, $\varphi(\tilde{h}_{12}(p_{12}))=0.7992$, $\varphi(\tilde{h}_{13}(p_{13}))=0.8762$, $\varphi(\tilde{h}_{21}(p_{21}))=0.8876$, $\varphi(\tilde{h}_{22}(p_{22}))=0.8189$, $\varphi(\tilde{h}_{23}(p_{23}))=0.8085$, $\varphi(\tilde{h}_{31}(p_{31}))=0.8173$, $\varphi(\tilde{h}_{32}(p_{32}))=0.9029$, $\varphi(\tilde{h}_{33}(p_{33}))=0.8295$, $\varphi(\tilde{h}_{41}(p_{41}))=0.7869$, $\varphi(\tilde{h}_{42}(p_{42}))=0.8119$, $\varphi(\tilde{h}_{43}(p_{43}))=0.9141$, $\varphi(\tilde{h}_{51}(p_{51}))=0.8410$, $\varphi(\tilde{h}_{52}(p_{52}))=0.7892$, $\varphi(\tilde{h}_{53}(p_{53}))=0.8082$;

$\phi(\tilde{h}_{11}(p_{11}))=0.9984$, $\phi(\tilde{h}_{12}(p_{12}))=0.9996$, $\phi(\tilde{h}_{13}(p_{13}))=1.0000$, $\phi(\tilde{h}_{21}(p_{21}))=1.0000$, $\phi(\tilde{h}_{22}(p_{22}))=0.9991$, $\phi(\tilde{h}_{23}(p_{23}))=0.9997$, $\phi(\tilde{h}_{31}(p_{31}))=0.9997$, $\phi(\tilde{h}_{32}(p_{32}))=1.0000$, $\phi(\tilde{h}_{33}(p_{33}))=0.9993$, $\phi(\tilde{h}_{41}(p_{41}))=0.9989$, $\phi(\tilde{h}_{42}(p_{42}))=1.0000$, $\phi(\tilde{h}_{43}(p_{43}))=1.0000$, $\phi(\tilde{h}_{51}(p_{51}))=0.9999$, $\phi(\tilde{h}_{52}(p_{52}))=0.9999$, $\phi(\tilde{h}_{53}(p_{53}))=1.0000$.

步骤 2 依据 3.1 中的方法计算测评准则的外部权重(ω_j^1)、内部权重(ω_j^2)和综合权重(ω_j)($j=1,2,3$). 经计算,分别为:$\omega_1^1=0.3176$, $\omega_2^1=0.3227$, $\omega_3^1=0.3597$; $\omega_1^2=0.3331$, $\omega_2^2=0.3334$, $\omega_3^2=0.3335$; $\omega_1=0.2958$, $\omega_2=0.2042$, $\omega_3=0.5000$.

由步骤 2 计算出的测评准则权重可知,3 个测评准则的综合权重值存在较大差异,而 3 个测评准则的外部权重值的差异和内部权重值的差异相对较小. 这说明,在决策过程中以测评准则的综合权重赋权能够起到提高排序效果的作用.

步骤 3 利用式(6)计算 5 个项目申请书的综合决策值 $F(a_i)$, 5 个项目申请书的排序结果见表 3.

表 3　参数取不同值时的排序结果

参数取值	5 个项目申请书综合得分值	排序结果
$\alpha=1, \beta=0$	$F(a_1)=0.8284, F(a_2)=0.8333, F(a_3)=0.8404, F(a_4)=0.8536, F(a_5)=0.8138$	$a_4>a_3>a_2>a_1>a_5$
$\alpha=\frac{2}{3}, \beta=\frac{1}{3}$	$F(a_1)=0.8857, F(a_2)=0.8889, F(a_3)=0.8935, F(a_4)=0.9027, F(a_5)=0.8758$	$a_4>a_3>a_2>a_1>a_5$
$\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}$	$F(a_1)=0.9143, F(a_2)=0.9166, F(a_3)=0.9200, F(a_4)=0.9271, F(a_5)=0.8902$	$a_4>a_3>a_2>a_1>a_5$
$\alpha=\frac{1}{3}, \beta=\frac{2}{3}$	$F(a_1)=0.9428, F(a_2)=0.9445, F(a_3)=0.9466, F(a_4)=0.9515, F(a_5)=0.9379$	$a_4>a_3>a_2>a_1>a_5$
$\alpha=0, \beta=1$	$F(a_1)=0.9994, F(a_2)=0.9996, F(a_3)=0.9995, F(a_4)=0.9997, F(a_5)=1.0000$	$a_5>a_4>a_2>a_3>a_1$

由表 3 的排序结果可知：在决策模型中，当项目申请书的外部固定函数值的比例从 1 减小到 1/3 时，5 个项目申请书的排序结果均无变化($a_4>a_3>a_2>a_1>a_5$)；而当项目申请书的外部固定函数值的比例从 1/3 降为 0 时，5 个项目申请书的排序结果均发生了明显变化．这表明引起 5 个项目申请书排序结果发生变化的外部固定函数值的比例介于 0 与 1/3 之间．由于项目申请书的内部稳定函数值仅能反映评审专家组对项目申请书的意见统一程度，而不能说明该项目申请书的可行性，因此不宜将项目申请书的内部稳定函数值作为评审因素．综述可知，将第 3 个与第 4 个项目作为立项项目较为合理．

5　结论

本文利用平面向量建立了一种可以从多个角度来计算方案综合属性值的群决策模型．研究表明，将方案的外部固定函数值与内部稳定函数值进行融合后，再通过利用熵值法确定测评准则权重可最大化地利用方案的测评信息，进而可使计算出的测评准则权重更具有合理性．在计算方案综合决策值的过程中，利用参数来调整方案的外部固定函数值与内部稳定函数值的比例，可更加准确地处理方案的测评信息和提高各测评方案的综合决策值的区分度，使得决策的结果更加科学．实例分析表明，在测评分数差别不大的情形下，本文提出的模型具有更好的排序效果．本文在研究中将决策模型中所有评审专家的权重设为了相等，因此在未来的工作中，我们将探讨在决策模型中具有不同权重的评审专家对方案排序结果的影响．

参考文献：

[1]　CHEN N, XU Z S, XIA M M. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37: 528-540.

[2]　TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[3]　朱国成，庄锡钊，庄乐．区间值犹豫模糊环境下的多属性群决策理论应用研究[J]．广州大学学报(自然科学版)，2020，19(3)：32-42．

[4]　朱国成．基于计算决策专家综合权重的 IVHFMAGDM 方法[J]．广东石油化工学院学报，2022，32(3)：50-54．

[5]　张国峥．基于后悔理论的区间犹豫模糊应急方案选择[J]．统计与决策，2021，37(17)：173-177．

[6]　张沛，王旭，杨璐，等．基于区间线性规划和可逼近理想解排序法的园区型综合能源系统投资决策[J]．现代电力，2021，38(3)：297-308．

[7]　高玉祥，董晓峰，程建军．基于云模型和改进 TOPSIS 的风沙地区线路方案优选方法研究[J]．铁道科学与工程学报，2023，20(2)：526-536．

[8]　张文宇，刘小宁，董青，等．基于区间犹豫模糊信息距离测度的双向投影决策方法[J]．统计与决策，2021，37(22)：185-188．

[9]　ZHANG X L, XU Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61: 48-58.