

文章编号: 1004-4353(2023)03-0203-07

切换正时滞系统在可容许边依赖平均 驻留时间下的稳定性和镇定性

安夏伶, 刘婷婷, 路俊影
(西安工程大学 理学院, 西安 710048)

摘要: 讨论了一类切换正时滞系统的稳定性和镇定性. 首先, 通过构造多元共正李雅普诺夫泛函, 得到了切换正时滞系统在可容许边依赖平均驻留时间(AED-ADT)切换信号下的有限时间稳定的充分条件; 其次, 设计了一类状态反馈控制器, 并给出了闭环系统在 AED-ADT 切换信号下具有有限时间稳定的判据. 最后, 利用两个算例验证了所得结果的正确性.

关键词: 切换正时滞系统; 李雅普诺夫泛函; 可容许边依赖平均驻留时间; 有限时间稳定性; 镇定性
中图分类号: O231.1 **文献标志码:** A

Stability and stabilization for switched positive time-delay systems under an admissible edge-dependent average dwell time method

AN Xialing, LIU Tingting, LU Junying
(School of Sciences, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: The stability and stabilization of the switched positive systems with delays were discussed. Firstly, by constructing the multiple copositive Lyapunov functional, a sufficient condition for finite-time stability of switched positive systems with delays under admissible edge-dependent average dwell time (AED-ADT) switching signals was obtained. Secondly, a family of state feedback controllers are designed, and the finite time stability criterion of the closed loop system under AED-ADT was given. Finally, two numerical examples were used to verify the validity of the developed results.

Keywords: switched positive delayed systems; Lyapunov functional; admissible edge-dependent average dwell time; finite-time stability; stabilization

0 引言

切换正系统是一种典型的混杂系统, 在多个领域中有着广泛的应用, 如在编队飞行^[1]、网络拥堵控制^[2]、飞行器控制^[3]等. 时滞是控制系统中普遍存在的一种现象. 由于时滞可能会导致系统出现不稳定的现象, 因此研究带有时滞的切换正系统的稳定性具有重要意义. 研究表明, 即使系统的所有子系统都是稳定的, 但因切换信号不同也会导致整个系统出现不稳定的现象^[4]. 目前, 常见的切换信号有驻留时间(DT)^[5-6]、平均驻留时间(ADT)^[7-10]和模态依赖平均驻留时间(MDADT)^[11-12]等. 这 3 个切换信号均

收稿日期: 2023-05-18

基金项目: 陕西省科技厅自然科学基金基础研究计划项目(2021JQ-657)

第一作者: 安夏伶(1997—), 女, 硕士研究生, 研究方向为控制理论.

通信作者: 刘婷婷(1987—), 女, 博士, 讲师, 研究方向为控制理论.

要求系统的每个子系统的 DT 值、ADT 值、MDADT 值要大于一个常数,但 DT 切换信号未考虑子系统的补偿效应,ADT 切换信号未考虑子系统之间的差异性,MDADT 切换信号未考虑子系统是否可以切换到其他所有子系统.为此,Yang 等在 2018 年通过引入可容许切换边的概念,提出了可容许边依赖平均驻留时间(AED-ADT)切换信号^[13].由于该切换信号不仅具有更好的灵活性,而且还放宽了对受约束切换信号的限制;因此,AED-ADT 切换信号受到许多学者的关注.基于 Yang 等的研究,本文研究了一类切换正时滞系统(式(1))在 AED-ADT 切换信号下的有限时间稳定问题,并通过数值例子验证了所得结果的有效性.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{C}_{\sigma(t)} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t)$ 表示系统状态, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$; $\mathbf{u}(t)$ 表示控制输入, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$; $\tau \geq 0$ 表示常时滞; $\sigma(t)$ 表示切换信号, $\sigma(t): \mathbf{R} \rightarrow Q = \{1, 2, \dots, M\}$ 是分段常值函数, $M (M \in \mathbf{N}_+)$ 表示子系统的个数; $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 表示切换时刻, $\forall k \in \mathbf{N}$; $\sigma(t_k) = i$ 表示当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,第 i 个子系统被激活; $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{B}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{C}_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 表示已知的实数系统矩阵, $\forall i \in Q$.

1 符号的约定及相关定义和引理

符号约定: \mathbf{R} 与 $\mathbf{R}^n (\mathbf{R}_+^n)$ 分别表示实数集合与 n 维实向量(正实向量)集合, $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维实数矩阵集合, \mathbf{N} 表示非负整数集合, \mathbf{N}_+ 表示正整数集合. $\mathbf{1}_n$ 表示元素都为 1 的 n 维列向量, $\mathbf{1}_n^r$ 表示第 r 个元素为 1,其余元素都为 0 的列向量.设向量 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{v} > 0 (\geq 0)$ 表示 \mathbf{v} 的所有元素是正的(非负的).设矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{A} > 0 (\geq 0)$ 表示 \mathbf{A} 的所有元素都是正的(非负的).将矩阵 \mathbf{A} 的转置记为 \mathbf{A}^T .若矩阵 \mathbf{A} 的所有非对角元素都是非负实数,则称矩阵 \mathbf{A} 为 Metzler 矩阵.

定义 1^[13] 给定切换信号 $\sigma(t)$, 设 $\forall T \geq t \geq 0, i \in Q, j \in Q$, $N_{ij}^{\sigma(t)}(T, t)$ 是第 j 个子系统切换到第 i 个子系统的切换总次数, $T_{ij}(T, t)$ 是第 j 个子系统切换到第 i 个子系统时第 i 个子系统运行的总时间.如果存在 $N_{ij}^0 \geq 0$ (振荡界) 和 $\tau_{ij}^a > 0$ 使得以下不等式

$$N_{ij}^{\sigma(t)}(T, t) \leq N_{ij}^0 + \frac{T_{ij}(T, t)}{\tau_{ij}^a} (\forall T \geq t \geq 0) \quad (2)$$

成立,则称 τ_{ij}^a 是切换信号 $\sigma(t)$ 的 AED-ADT.

令 $\mathbf{u}(t) = 0$, 此时系统(1)可变为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t - \tau), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

定义 2^[14] 给定正常数 c_1 和 $c_2 (c_1 < c_2)$ 以及 2 个向量 $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{\varepsilon} > 0)$ 和一个切换信号 $\sigma(t)$, 若 $\sup_{t \in [-\tau, 0]} \boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{\delta} \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{x}^T(t) \boldsymbol{\varepsilon} \leq c_2, \forall t \in [0, T]$ 成立, 其中 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是定义在区间 $[-\tau, 0]$ 上的一个初始向量值函数, 则称切换正时滞系统(3) 是有限时间稳定的.

引理 1^[15] 如果 $\forall i \in Q, \mathbf{A}_i$ 是 Metzler 矩阵且 $\mathbf{B}_i \geq 0$, 则系统(3) 是正的.

引理 2^[16] \mathbf{A}_i 是 Metzler 矩阵当且仅当存在一个常数 $\iota > 0$, 使得不等式 $\mathbf{A}_i + \iota \mathbf{I}_i \geq 0, \forall i \in Q$ 成立.

2 主要结果及其证明

首先给出切换正时滞系统(3) 在 AED-ADT 切换信号下具有有限时间稳定的充分条件.

定理 1 $\forall (i, j) \in Q \times Q$. 设 \mathbf{A}_j 是 Metzler 矩阵, $\mathbf{B}_j \geq 0$. 给定常数 $\lambda_j (0 < \lambda_j < 1), \lambda_i (0 < \lambda_i < 1)$ 和 2 个向量 $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{\varepsilon} > 0)$. 若存在正向量 \mathbf{v}_j 和 \mathbf{v}_i 以及正常数 η_1, η_2, η_3 使得不等式

$$\mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j \leq 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_j^T \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j \leq 0, \quad (5)$$

$$\eta_1 \boldsymbol{\varepsilon} < \mathbf{v}_j < \eta_2 \boldsymbol{\delta}, \mathbf{v}_j < \eta_3 \boldsymbol{\delta}, \quad (6)$$

$$c_1(\eta_2 + \tau \eta_3) < c_2 \eta_1 e^{-\lambda_j T} \quad (7)$$

成立,则当 AED-ADT 的切换信号 $\sigma(t)$ 满足

$$\tau_{ij}^a > \tau_{ij}^* = \frac{T \ln \mu_{ij}}{\ln c_2 \eta_1 - \lambda_i T - \ln c_1 - \ln(\eta_2 + \tau \eta_3)} \quad (8)$$

时,系统(3) 是正的,且其关于 $(c_1, c_2, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \tau, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的. 其中, μ_{ij} ($\mu_{ij} > 1$) 满足:

$$\mathbf{v}_j \leq \mu_{ij} \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \leq \mu_{ij} \mathbf{v}_i. \quad (9)$$

证明 设 $N_{ij}^0 = 0$, $T \geq t \geq 0$, 且设当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,第 j 个子系统被激活,即 $\sigma(t_k) = j$. 由于 \mathbf{A}_j 是 Metzler 矩阵,且 $\mathbf{B}_j \geq 0$, 因此由引理 1 可得系统(3) 是正的. 下面选取多元共正李雅普诺夫泛函(式(10)) 证明系统(3) 存在有限时间稳定性.

$$V_j(t) \triangleq V_j(t, x(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{v}_j + \int_{t-\tau}^t e^{\lambda_j(t-s-\tau)} \mathbf{x}^T(s) \mathbf{v}_j ds. \quad (10)$$

由式(10) 可知 $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 且 $V_j(t)$ 沿着系统(3) 的状态轨迹为:

$$\dot{V}_j(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + \mathbf{x}^T(t-\tau) \mathbf{B}_j^T \mathbf{v}_j + \lambda_j \int_{t-\tau}^t e^{\lambda_j(t-s-\tau)} \mathbf{x}^T(s) \mathbf{v}_j ds + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{v}_j - \mathbf{x}^T(t-\tau) \mathbf{v}_j.$$

由上式可得 $\dot{V}_j(t) - \lambda_j V_j(t) = \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j) + \mathbf{x}^T(t-\tau) (\mathbf{B}_j^T \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j)$. 再结合式(4) 和式(5) 可得:

$$\dot{V}_j(t) \leq \lambda_j V_j(t). \quad (11)$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,对式(11) 的左右两端同时进行积分可得:

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq e^{\lambda_{\sigma(t)}(t-t_k)} V_{\sigma(t_k)}(t_k). \quad (12)$$

当 $\sigma(t_k) = j$, $\sigma(t_k^-) = i$ 时,由式(9) 可得:

$$V_j(t_k) \leq \mu_{ij} V_i(t_k^-). \quad (13)$$

由于 $\forall T \geq t \geq 0$, 因此在 $[0, \infty]$ 中一定存在正整数 k , 使得 $T \in [t_k, t_{k+1})$. 由此可得:

$$\begin{aligned} V_{\sigma(T)}(T) &\leq e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} V_{\sigma(t_k)}(t_k) \leq \mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_k^-)} e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} V_{\sigma(t_k^-)}(t_k^-) \leq \\ &\mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k-1})} e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} e^{\lambda_{\sigma(t_{k-1})}(t_k-t_{k-1})} V_{\sigma(t_{k-1})}(t_{k-1}) \leq \\ &\mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k-1})} \mu_{\sigma(t_{k-1})\sigma(t_{k-1}^-)} e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} e^{\lambda_{\sigma(t_{k-1})}(t_k-t_{k-1})} V_{\sigma(t_{k-1}^-)}(t_{k-1}^-) \leq \\ &\mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k-1})} \mu_{\sigma(t_{k-1})\sigma(t_{k-2})} e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} e^{\lambda_{\sigma(t_{k-1})}(t_k-t_{k-1})} e^{\lambda_{\sigma(t_{k-2})}(t_{k-1}-t_{k-2})} V_{\sigma(t_{k-2})}(t_{k-2}) \leq \\ &\vdots \\ &\mu_{\sigma(t_k)\sigma(t_{k-1})} \mu_{\sigma(t_{k-1})\sigma(t_{k-2})} \cdots \mu_{\sigma(t_1)\sigma(t_0)} e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} e^{\lambda_{\sigma(t_{k-1})}(t_k-t_{k-1})} \cdots e^{\lambda_{\sigma(t_0)}(t_1-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(0) = \\ &\prod_{s=0}^{k-1} \mu_{\sigma(t_{s+1})\sigma(t_s)} e^{\lambda_{\sigma(T)}(T-t_k)} e^{\sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{\sigma(t_s)}(t_{s+1}-t_s)} V_{\sigma(t_0)}(0) = \prod_{(i,j) \in Q \times Q} \mu_{ij}^{N_{ij}^{\sigma(t)}(T,0)} e^{\sum_{(i,j) \in Q \times Q} \lambda_{ij} T_{ij}(T,0)} V_{\sigma(t_0)}(0). \end{aligned} \quad (14)$$

由式(14)、AED-ADT 的定义(式(2)) 和 $N_{ij}^0 = 0$ 可得:

$$\begin{aligned} V_{\sigma(T)}(T) &\leq \prod_{(i,j) \in Q \times Q} \mu_{ij}^{\left(\frac{T_{ij}(T,0)}{\tau_{ij}^a} + N_{ij}^0\right)} e^{\sum_{(i,j) \in Q \times Q} \lambda_{ij} T_{ij}(T,0)} V_{\sigma(t_0)}(0) = \\ &e^{\sum_{(i,j) \in Q \times Q} \frac{T_{ij}(T,0)}{\tau_{ij}^a} \ln \mu_{ij}} e^{\sum_{(i,j) \in Q \times Q} \lambda_{ij} T_{ij}(T,0)} V_{\sigma(t_0)}(0) = e^{\sum_{(i,j) \in Q \times Q} \left[\frac{T_{ij}(T,0)}{\tau_{ij}^a} \ln \mu_{ij} + \lambda_{ij} T_{ij}(T,0) \right]} V_{\sigma(t_0)}(0) = \end{aligned}$$

$$e^{\sum_{(i,j) \in Q \times Q} \left(\frac{\ln \mu_{ij}}{\tau_{ij}^a} + \lambda_i \right) T_{ij}(T,0)} V_{\sigma(0)}(0) \leq e^{\max_{(i,j) \in Q \times Q} \left(\frac{\ln \mu_{ij}}{\tau_{ij}^a} + \lambda_i \right) T} V_{\sigma(0)}(0). \quad (15)$$

再由式(6)可得:

$$V_{\sigma(T)}(T) \geq \eta_1 \mathbf{x}^T(T) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (16)$$

$$V_{\sigma(0)}(0) \leq \eta_2 \mathbf{x}^T(0) \boldsymbol{\delta} + \eta_3 \int_{-\tau}^0 e^{-\lambda_j(s+\tau)} \mathbf{x}^T(s) \boldsymbol{\delta} ds. \quad (17)$$

由上式进一步可得:

$$\mathbf{x}^T(T) \boldsymbol{\varepsilon} \leq \frac{1}{\eta_1} V_{\sigma(T)}(T) \leq \frac{c_1}{\eta_1} e^{\max_{(i,j) \in Q \times Q} \left(\frac{\ln \mu_{ij}}{\tau_{ij}^a} + \lambda_i \right) T} e^{\ln(\eta_2 + \eta_3 \tau)}. \quad (18)$$

于是再由式(8)可知, $\mathbf{x}^T(T) \boldsymbol{\varepsilon} \leq c_2$. 因此, 在 AED-ADT 切换信号(式(8))下, 系统(3)关于 $(c_1, c_2, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \tau, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的.

为讨论系统(1)的镇定性, 本文设计了一类状态反馈控制器 $\mathbf{u}(t)$ ($\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t)$), 该控制器可使闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{A}}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t - \tau), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (19)$$

是有限时间稳定的, 其中 $\hat{\mathbf{A}}_{\sigma(t)} = \mathbf{A}_{\sigma(t)} + \mathbf{C}_{\sigma(t)} \mathbf{K}_{\sigma(t)}$.

定理 2 设 $\forall (i, j) \in Q \times Q$, 矩阵 $\mathbf{B}_j \geq 0, \mathbf{C}_j \geq 0$. 给定常数 $\alpha_j > 0, 0 < \lambda_j < 1$ 和 $0 < \lambda_i < 1, \forall j \in Q$, 如果存在一组正向量 $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j, \boldsymbol{\gamma}_j$ 使得不等式

$$\mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\gamma}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j \leq 0, \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j (\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j \mathbf{A}_j + \mathbf{C}_j \tilde{\mathbf{v}}_j \boldsymbol{\gamma}_j^T + \alpha_j \tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j \mathbf{I}_n) \geq 0 \quad (21)$$

和式(5)–(9)成立, 则存在一类状态反馈控制器:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_j \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j} \tilde{\mathbf{v}}_j \boldsymbol{\gamma}_j^T \mathbf{x}(t), \quad \forall j \in Q, \quad (22)$$

使得闭环系统(19)在 AED-ADT 切换信号(式(8))下是正的, 且系统是有限时间稳定的. 其中, $\tilde{\mathbf{v}}_j \in \mathbf{R}^m$ 是一个给定的非零向量, 其满足 $\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j \neq 0$.

证明 设 $N_{ij}^0 = 0, T \geq t \geq 0$, 且设当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 第 j 个子系统被激活, 即 $\sigma(t_k) = j$. 由于 $\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j \neq 0$, 所以在式(21)两端同除以 $(\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j)^2$ 可得: $\mathbf{A}_j + \mathbf{C}_j \frac{1}{\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j} \tilde{\mathbf{v}}_j \boldsymbol{\gamma}_j^T + \frac{\alpha_j}{\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j} \mathbf{I}_n \geq 0$. 由此再根据式(22)和引理 2 可知, 矩阵 $\mathbf{A}_j + \mathbf{C}_j \mathbf{K}_j$ 是 Metzler 矩阵. 又因为 $\mathbf{B}_j \geq 0, \forall j \in Q$, 所以由引理 1 可知闭环系统(19)是正的. 证毕.

下面证明闭环系统(19)具有有限时间稳定性. 因 $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 因此有:

$$\mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + \mathbf{K}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_j \boldsymbol{\gamma}_j^T}{\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j} \right)^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j =$$

$$\mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}_j \tilde{\mathbf{v}}_j^T}{\tilde{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j} \right) \mathbf{C}_j^T \mathbf{v}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j \leq \mathbf{A}_j^T \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\gamma}_j + e^{-\lambda_j \tau} \mathbf{v}_j - \lambda_j \mathbf{v}_j.$$

由上式及式(5)和式(20)可得 $\dot{V}_j(t) - \lambda_j V_j(t) \leq 0$. 由于再通过类似定理 1 的证明可证得闭环系统(19)是有限时间稳定的, 故本文在此省略.

3 算例

例 1 讨论具有如下参数的切换正时滞系统(3)是否具有有限时间稳定性:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.15 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.18 \\ 0.16 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.21, \tau = 3$. 将上述数值代入式(4)~(5)后,再利用 Matlab 中的 LP 工具箱对其求解可得: $\mathbf{v}_1 = [2.0884 \ 2.2756]^T, \mathbf{v}_2 = [2.6360 \ 2.2634]^T, \mathbf{v}_1 = [1.0000 \ 1.7631]^T, \mathbf{v}_2 = [1.1793 \ 1.0000]^T$. 再设 $T = 8, c_1 = 0.5, c_2 = 15, \boldsymbol{\varepsilon} = [1.5 \ 1.3]^T, \boldsymbol{\delta} = [1.2 \ 1.4]^T$, 并将这些数值代入式(6)、(7)和式(9)中可得 $\mu_{12} = 1.002, \mu_2 = 1.03, \eta_1 = 1.0000, \eta_2 = 1.7370, \eta_3 = 1.2594$. 将上述常数值和求解所得的向量代入式(8)可得 $\tau_{12}^* = 1.1676$ 和 $\tau_{21}^* = 2.5240$. 依据该结果,本文在实验中选择 $\tau_{12} = 2$ 和 $\tau_{21} = 3$ 为可容许边依赖驻留时间. 由此得到的系统(3)的切换信号如图1所示. 由图1显然可以看出, τ_{12} 和 τ_{21} 均满足式(8).

图2和图3分别为系统(3)的状态响应曲线和 $\mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\varepsilon}$ 在时间区间 $[0, 8]$ 上的变化情况,系统(3)的初始条件为 $\mathbf{x}(0) = [6 \ 4]^T, \mathbf{x}(t) = [0.75 \ 0.43]^T, t \in [-3, 0)$. 由图2和图3可以看出,系统(3)在时间区间 $[0, 8]$ 内其 $\mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\varepsilon}$ 的值不超过 $c_2 (c_2 = 15)$.

由上述可知,系统(3)关于 $(0.5, 15, [1.2 \ 1.4]^T, [1.5 \ 1.3]^T, 8, 3, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的.

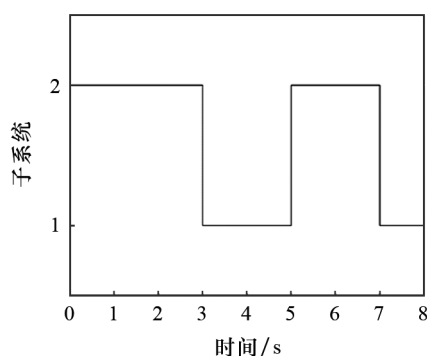


图1 系统(3)的切换信号

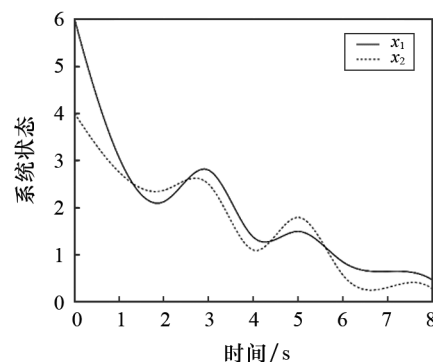


图2 系统(3)的状态响应曲线

例2 讨论具有如下参数的闭环系统(19)是否具有有限时间稳定性:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.91 & -0.8 \\ -1 & -0.6 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.7 \\ -0.5 & -0.55 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.7 \\ 1 & 0.75 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.73 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.3 \\ 0.95 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.29 \\ 0.95 & 2 \end{bmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.2, \alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.3, \tau = 2$. 将以上数值代入式(5)、(20)和(21)后,再利用 Matlab 中的 LP 工具箱对其求解可得: $\mathbf{v}_1 = [1.0318 \ 2.5688]^T, \mathbf{v}_2 = [2.1603 \ 1.4750]^T, \mathbf{v}_1 = [1.0759 \ 2.9584]^T, \mathbf{v}_2 = [1.5227 \ 1.7543]^T, \boldsymbol{\gamma}_1 = [1.0101 \ 1.0122]^T, \boldsymbol{\gamma}_2 = [1.0021 \ 1.0011]^T$. 再设 $T = 10, c_1 = 0.09, c_2 = 20, \boldsymbol{\varepsilon} = [0.6 \ 1.6]^T, \boldsymbol{\delta} = [1.2 \ 1.75]^T$, 并将这些数值代入式(6)、(7)和式(9)中可得 $\mu_{12} = 1.3000, \mu_2 = 1.0001, \eta_1 = 1.0000, \eta_2 = 1.4679, \eta_3 = 1.6905$. 将上述常数值和求解所得的向量代入式(8)和式(22)中可得 $\tau_{12}^* = 1.7195, \tau_{21}^* = 0.0019, \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.3848 & 0.3856 \\ 0.3848 & 0.3856 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.2386 & -0.2384 \\ -0.2386 & -0.2384 \end{bmatrix}$. 依据该结果,本文在实验中选择 $\tau_{12} = 2$ 和 $\tau_{21} = 1$ 为可容许边依赖驻留时间. 此时闭环系统(19)的切换信号如图4所示. 由图4显然可以看出, τ_{12} 和 τ_{21} 均满足式(8).

图5和图6分别为闭环系统(19)的状态响应曲线和 $\mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\varepsilon}$ 在时间区间 $[0, 10]$ 上的变化情况,系统(19)的初始条件为 $\mathbf{x}(0) = [11 \ 8]^T, \mathbf{x}(t) = [0.043 \ 0.021]^T, t \in [-2, 0)$. 由图5和图6可以看出,闭环系统(19)在时间区间 $[0, 10]$ 内其 $\mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\varepsilon}$ 的值不超过 $c_2 (c_2 = 20)$.

由上述可知,系统(19)关于 $(0.09, 20, [1.2 \ 1.75]^T, [0.6 \ 1.6]^T, 10, 2, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的.

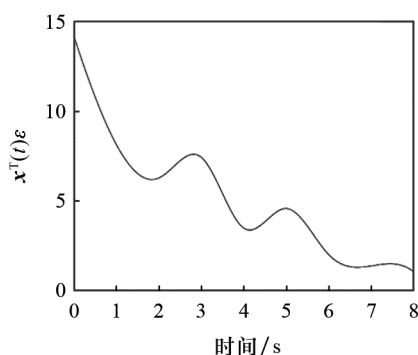


图 3 系统(3)中的 $x^T(t)\varepsilon$ 在时间区间 $[0, 8]$ 上的变化情况

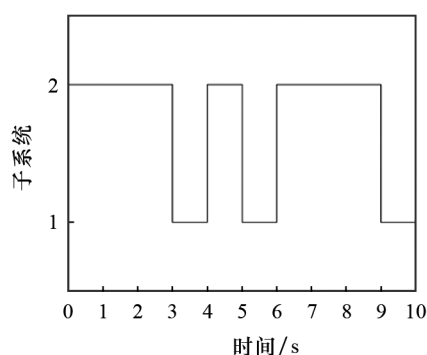


图 4 系统(19)的切换信号

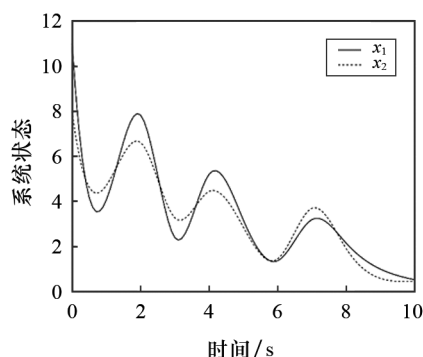


图 5 系统(19)的状态响应曲线

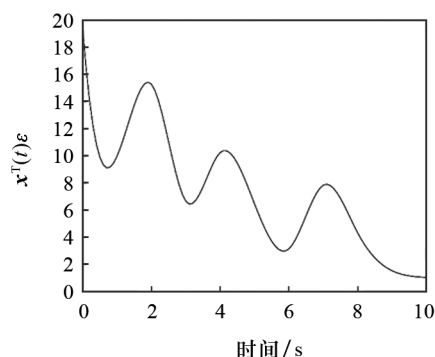


图 6 系统(19)中的 $x^T(t)\varepsilon$ 在时间区间 $[0, 10]$ 上的变化情况

4 结语

本文应用多元共正李雅普诺夫泛函方法得到了切换正时滞系统的有限时间稳定性与镇定性的充分条件,且与传统的李雅普诺夫泛函相比,该方法所得的结论具有更低的保守性,因此该方法可用于研究切换正时滞系统的稳定性及其他相关问题.在本研究中,我们仅考虑了系统在同步切换下的稳定性问题,因此在今后的研究中我们将进一步讨论系统在异步切换下的稳定性问题.

参考文献:

- [1] MASON O, SHORTEN R. On linear copositive Lyapunov functions and the stability of switched positive linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(7):1346-1349.
- [2] MURATORI S, RINAKLDI S. Equilibria, stability and reachability of Leslie systems with nonnegative inputs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(9):1065-1068.
- [3] CACCETTA L, FOULDS L R, RUMCHEV V G. A positive linear discrete-time model of capacity planning and its controllability properties[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40(1/2):217-226.
- [4] 通雁辉. 线性切换正系统的分析与综合[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2013.
- [5] LI S, XIANG Z R, ZHANG J F. Exponential stability analysis for singular switched positive systems under dwell-time constraints[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(18):13834-13871.
- [6] XIANG W M, LAM J, SHEN J. Stability analysis and \mathcal{L}_1 -gain characterization for switched positive systems under dwell-time constraint[J]. Automatica, 2017, 85:1-8.
- [7] ZHAO X D, ZHANG L X, SHI P, et al. Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching[J]. Automatica, 2012, 48:1132-1137.
- [8] YUAN C Z, WU F. Hybrid control for switched linear systems with average dwell time[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 60(1):240-245.

(下转第 222 页)

参考文献:

- [1] YOU J Q, NORI F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits[J]. *Nature*, 2011, 474(7353):589-597.
- [2] MILLS D L, BURSTEIN E. Polaritons: the electromagnetic modes of media[J]. *Rep Prog Phys*, 1974, 37(7):817.
- [3] CAO Y, YAN P, HUEBL H, et al. Exchange magnon-polaritons in microwave cavities[J]. *Phys Rev B*, 2015, 91(9):094423.
- [4] GORYACHEV M, FARR W G, CREEDON D L, et al. High-cooperativity cavity QED with magnons at microwave frequencies[J]. *Phys Rev A*, 2014, 2(5):054002.
- [5] YAN R Y, FENG Z B. Controllable and accelerated generation of entangled states between two superconducting qubits in circuit QED[J]. *Opt Laser Technol*, 2021, 135:106699.
- [6] HAN J X, WU J L, WANG Y, et al. Tripartite high-dimensional magnon-photon entanglement in phases with broken PT-symmetry of a non-Hermitian hybrid system[J]. *Phys Rev B*, 2022, 105(6):064431.
- [7] ZHAO J, LIU Y L, WU L H, et al. Observation of anti-PT-symmetry phase transition in the magnon-cavity-magnon coupled system[J]. *Phys Rev A*, 2020, 13(1):014053.
- [8] ULLAH K, NASEEM M T, ÖZGÜR E M. Tunable multiwindow magnomechanically induced transparency, Fano resonances, and slow-to-fast light conversion[J]. *Phys Rev A*, 2020, 102(3):033721.
- [9] LI J, ZHU S Y. Entangling two magnon modes via magnetostrictive interaction[J]. *Phys*, 2019, 21(8):085001.
- [10] WANG Y P, ZHANG G Q, ZHANG D, et al. Bistability of cavity magnon polaritons[J]. *Phys Rev Lett*, 2018, 120(5):057202.
- [11] CHAKRABORTY S, SARMA AK. Delayed sudden death of entanglement at exceptional points[J]. *Phys Rev A*, 2019, 100(6):063846.
- [12] ZHANG X, ZOU C L, JIANG L, et al. Cavity magnomechanics[J]. *Sci Adv*, 2016, 2(3):e1501286.

~~~~~  
(上接第 208 页)

- [9] ZHANG L X, GAO H J. Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time[J]. *Automatica*, 2010, 46:953-958.
- [10] YU Q, LV H. Stability analysis for discrete-time switched systems with stable and unstable modes based on a weighted average dwell time approach[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, 38:100949.
- [11] ZHAO X D, ZHANG L X, SHI P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7):1809-1815.
- [12] ZHANG J F, HAN Z Z, ZHU F B, et al. Stability and stabilization of positive switched systems with mode-dependent average dwell time[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 9:42-55.
- [13] YANG J Q, ZHAO X D, BU X H, et al. Stabilization of switched linear systems via admissible edge-dependent switching signals[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29:100-109.
- [14] HUANG T T, SUN Y G, TIAN D D. Finite-time stability of positive switched time-delay systems based on linear time-varying copositive Lyapunov functional[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(5):2244-2258.
- [15] ZHANG J F, HAN Z Z, ZHU F B.  $\mathcal{L}_1$ -gain analysis and control synthesis of positive switched systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2015, 46(12):2111-2121.
- [16] HU S Y, WANG R H, JIAO T C, et al. Output-based optimal  $\mathcal{L}_1$ -gain control of weighted edge-dependent switching positive systems by a new copositive Lyapunov function[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2022, 46:101260.