文章编号: 1004-4353(2023)03-0195-08

具有消失位势的 Schrödinger-Poisson 系统的可解性

李文敏, 张家锋
(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025)

摘要: 利用山路引理、Hölder 不等式、嵌入不等式和估值等,研究了一类含临界非局部项且位势在无穷远处消失的 Schrödinger-Poisson 系统的非平凡解的存在性. 首先利用嵌入不等式证明了泛函具有紧性,然后利用截断函数对泛函进行了估值,最后用变分方法证明了该系统至少有一个非平凡解. 所得结果丰富了椭圆型方程解的相关理论.

关键词: Schrödinger-Poisson 系统; 变分方法; 截断函数; 消失位势
中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A

The solvability of critical Schrödinger-Poisson systems in volving vanishing potential

LI Wenmin, ZHANG Jiafeng
(*School of Data Science and Information Engineering*, *Guizhou Minzu University*, *Guiyang* 550025, *China*)

Abstract: The existence of nontrivial solutions for a class of Schrödinger-Poisson systems containing critical nonlocal terms and vanishing potential at infinity was investigated by using the Mountain Pass Lemma, Hölder's inequality, embedding inequality and valuation. Firstly, we prove that the functional has tightness by using the embedding inequality, then the valuation of the functional is performed using the cut-off function, and finally we prove that there is at least one nontrivial solution of the system by variational method. The results of this paper enrich the theory of solutions of elliptic type equations.

Keywords: Schrödinger-Poisson system; variational methods; cut-off function; vanishing potential

由于 Schrödinger-Poisson 系统在物理学、生态学、经济学等领域有着丰富的应用背景,因此一直受到学者们的关注. 例如:2011 年,文献[1]的作者研究了一个具有在无穷远处消失的径向位势的渐进线性 Schrödinger-Poisson 系统,并证明了该系统不存在非平凡正解. 2016 年,文献[2]的作者研究了一个具有临界指数的渐进周期 Schrödinger-Poisson 系统,并证明了该系统存在正解. 2019 年,文献[3]的作者研究了一个在 $\mathbf{R}^3$ 中具有临界非局部项和消失位势的 Schrödinger-Poisson 系统,并在一些假设条件下利用山路定理证明了该系统至少有一个非平凡解. 2020 年,文献[4]的作者研究了一个具有临界非局部项和更一般非线性项的 Schrödinger-Poisson 系统,并利用变分方法等证明了该系统至少存在两个非

收稿日期: 2023-06-01
基金项目: 国家自然科学基金(11861021);贵州民族大学自然科学研究项目(GZMUZK[2022]YB23)
第一作者: 李文敏(1999—),女,硕士研究生,研究方向为非线性泛函分析及应用.
通信作者: 张家锋(1981—),男,博士,教授,研究方向为非线性泛函分析及应用.

平凡解.2021年,文献[5]的作者研究了一类具有临界指数的非局部问题正解的多重性,并在一些条件下利用变分方法和精确估计证明了该系统至少有 k 个正解.基于上述研究,本文研究一个具有临界非局部项且位势在无穷远处消失的 Schrödinger-Poisson 系统(式(1))的非平凡解的存在性.

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u-l(x)\phi|u|u=\eta K(x)f(u),\ x\in\mathbf{R}^4;\\ -\Delta\phi=l(x)|u|^3,\ x\in\mathbf{R}^4.\end{cases}\tag{1}$$

其中:$V(x),K(x)\in C(\mathbf{R}^4,\mathbf{R})$;$f$ 是连续函数;$l(x)$ 是有界非负连续函数;V 和 K 是非负函数,且可在无穷远处消失;$\eta(\eta>0)$ 是参数.

1 相关假设和引理

用 $D^{1,2}(\mathbf{R}^4)$ 表示"绝对光滑"空间 $C^\infty(\mathbf{R}^4)$ 的完备化空间,其对应的范数为 $\|u\|_{D^{1,2}(\mathbf{R}^4)}=\left(\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.假设本文的工作空间为 $E=\left\{u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^4):\int_{\mathbf{R}^3}V(x)|u|^2\mathrm{d}x<+\infty\right\}$,其中 $D^{1,2}(\mathbf{R}^4)=\{u\in L^4(\mathbf{R}^4):\nabla u\in L^2(\mathbf{R}^4)\}$,$E$ 对应的范数为 $\|u\|_E=\left(\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

由Lax-Milgram定理可知,对于 $u\in E$,系统(1)的第2个方程存在唯一解 $\phi_u\in E$,因此将 ϕ_u 代入式(1)可得:

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)-l(x)\phi_u|u|u=\eta K(x)f(u),\ x\in\mathbf{R}^4;\\ u>0,\ x\in\mathbf{R}^4.\end{cases}\tag{2}$$

方程(2)对应的能量泛函 $J:E\to\mathbf{R}$ 为:

$$J(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x.\tag{3}$$

令 $F(u,\phi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\cdot\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x$,则可得:

$$\partial_uF(u,\phi)[v]=\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u||\nabla v|+V(x)uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi|u|^2v\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u)v\mathrm{d}x.$$

$$\partial_\phi F(u,\phi)[\xi]=-\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi|u|^3\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}\nabla\phi\nabla\xi\mathrm{d}x.$$

再利用 $-\Delta\phi=l(x)|u|^3$ 和格林公式可得 $\partial_\phi F(u,\phi)[\xi]=-\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}\nabla\phi\nabla\xi\mathrm{d}x=0$.定义 $J(u)=F(u,\phi(u))$,由此可得 $J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla\phi_u|^2\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x$.对该式利用 $-\Delta\phi_u=l(x)|u|^3$ 和格林公式可得:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla\phi_u|^2\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x.$$

因此对 $J(u)$ 进行求导可得:

$$J'(u)=\partial_uF(u,\phi(u))+\partial_\phi F(u,\phi(u))\phi'(u)=\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u||\nabla v|+V(x)uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi|u|uv\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u)v\mathrm{d}x.$$

$J(u)$ 的弱导数 $J':E\to E'$ 为:

$$\langle J'(u),v\rangle=\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u||\nabla v|+V(x)uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|uv\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u)v\mathrm{d}x.\quad(4)$$

其中:E' 是 E 中所有连续泛函所构成的空间,即 E' 是 E 的对偶空间.由式(4)可知,对于任意的 $\varphi\in E$,u 是方程(2)的弱解,当且仅当

$$\int_{\mathbf{R}^4}(\nabla u\,\nabla\varphi+V(x)u\varphi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|u\varphi\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u)\varphi\mathrm{d}x=0.\quad(5)$$

在 Lebesgue 空间中定义 $L_k^p(\mathbf{R}^4)$ 均是由可测函数 $u:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ 构成的,且 $L_k^p(\mathbf{R}^4)=\{u:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}\mid\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^p\mathrm{d}x<+\infty\}$,$L_k^p(\mathbf{R}^4)$ 对应的范数为 $\|u\|_{L_k^p(\mathbf{R}^4)}:=\left(\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.用 $B_\rho(0)$ 表示以原点为中心且半径为 $\rho(\rho>0)$ 的球,用 S 表示最佳的 Sobolev 常数,即 $S:=\inf\limits_{u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^4)}\left\{\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\int_{\mathbf{R}^4}|u|^4\mathrm{d}x=1\right\}$.

如果 $V(x)$ 和 $K(x)$ 满足以下条件(VK1)和(VK2),以及条件(VK3)和(VK4)之一,则称 $(V,K)\in\mathbf{R}$:

(VK_1)对所有的 $x\in\mathbf{R}^4$,有 $V(x)>0$,$K(x)>0$,其中 $K\in L^\infty(\mathbf{R}^4)$.

(VK_2)如果 $\{A_n\}_n\subset\mathbf{R}^4$ 是一个 Borel 序列集,使得 Lebesgue meas$(A_n)\leqslant R$(对所有的 n 和某些 $R>0$),则有 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{A_n\cap B_R^c(0)}K(x)\mathrm{d}x=0$.

(VK_3)$K/V\in L^\infty(\mathbf{R}^4)$.

(VK_4)存在 $p_0\in(2,4)$,使得 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(K(x)/V(x)^{(4-p_0)/2})=0$.

Alves 等在文献[6]中首次引入上述假设条件(VK_1)—(VK_4),并且将问题(1)定性为零质量问题.关于零质量问题的研究可参考文献[7-8].

假设连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在原点和无穷远处的增长条件为:

(f_1)如果满足条件(VK_3),则有 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=0$ 成立;如果满足条件(VK_4),则有 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{|t|^{p_0-1}}<\infty$.

(f_2)f 是拟临界增长,即 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t^3}=0$.

(f_3)存在 $\theta\in(2,4)$,使得 $\theta F(t)\leqslant tf(t)$ 成立,其中 $t\in\mathbf{R}$,$F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$.

此外,本文还对 $l(x)$ 作了以下假设:

(l_1)若存在 x_0,则有 $l(x_0)=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^4}l(x)$.

(l_2)若 $x\to x_0$,则有 $l(x)=l(x_0)+O(|x-x_0|)$.

命题 1[6]　假设$(V,K)\in\mathfrak{R}$成立,且对任意的 $p\in(2,4)$,则 E 紧嵌入到$L_k^p(\mathbf{R}^4)$.如果条件(VK_4)成立,则 E 紧嵌入到 $L_k^p(\mathbf{R}^4)$.

命题 2[6]　假设 f 满足条件(f_1)—(f_2)且$(V,K)\in\mathfrak{R}$,并设$\{v_n\}$在 E 中使得 $v_n\rightharpoonup v$,则有:

$$\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(v_n)\mathrm{d}x\to\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(v)\mathrm{d}x,\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(v_n)v_n\mathrm{d}x\to\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(v)v\mathrm{d}x.$$

引理 1[3]　对于每一个 $u\in E$,其在 $\mathbf{R}^4$ 中存在唯一解 ϕ_u 且满足 $-\Delta\phi=l(x)|u|^3$,同时 ϕ_u 有以下性质:① $\phi_u(x)>0$,$\forall x\in\mathbf{R}^4$;② $\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbf{R}^4)}^2=\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x$;③ 对于任意的 $t>0$,有 $\phi_{tu}=t^3\phi_u$;④ $\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbf{R}^4)}\leqslant|l(x)|_\infty S^{-\frac{1}{2}}|u|_4^3$,$\int_{\mathbf{R}^4}\phi_u|u|^3\mathrm{d}x\leqslant|l(x)|_\infty S^{-1}|u|_4^6$;⑤ 当 $n\to\infty$ 时,若在 $L^4(\mathbf{R}^4)$ 中有 $u_n\rightharpoonup u$ 和在 $\mathbf{R}^4$ 中几乎处处有 $u_n\to u$,则在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^4)$ 中 $\phi_{u_n}\to\phi_u$.

引理 2 假定$(V,K)\in\Re$, $p\in[2,4]$,则存在 $C>0$,且使得$\|u\|_{L_k^p(\mathbf{R}^4)}\leqslant C\|u\|_E$, $\forall u\in E$.

证明 以下分别证明条件(VK_3)和条件(VK_4)成立时引理 2 成立. 当条件(VK_3)成立时,对于 $p\in(2,4)$,定义 $m=\dfrac{4-p}{2}$,则由此可得 $p=2m+4(1-m)$,

$$\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^p\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^{2m}|u|^{4(1-m)}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^4}|K(x)|^{\frac{1}{m}}|u|^2\mathrm{d}x\right)^m\left(\int_{\mathbf{R}^4}|u|^4\mathrm{d}x\right)^{1-m}\leqslant$$
$$\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^m}\right)\left(\int_{\mathbf{R}^4}V(x)|u|^2\mathrm{d}x\right)^m\left(\int_{\mathbf{R}^4}|u|^4\mathrm{d}x\right)^{1-m}\leqslant C\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^m}\right)\cdot$$
$$\left(\int_{\mathbf{R}^4}V(x)|u|^2\mathrm{d}x\right)^m\left(\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{2(1-m)}\leqslant C\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^m}\right)\cdot$$
$$\left(\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{m+2(1-m)}=C\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^m}\right)\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\left(\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}.$$

由于 $K(x)\in L^\infty(\mathbf{R}^4)$ 和 $K/V\in L^\infty(\mathbf{R}^4)$,因此有$\|u\|_{L_k^p(\mathbf{R}^4)}\leqslant C\|u\|_E$, $p\in(2,4)$.

当条件(VK_4)成立时,定义 $m_0=\dfrac{4-p_0}{4}$,则由此可得 $p_0=2m_0+4(1-m_0)$,

$$\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^{p_0}\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^{2m_0}|u|^{4(1-m_0)}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^4}|K(x)|^{\frac{1}{m_0}}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{m_0}\cdot$$
$$\left(\int_{\mathbf{R}^4}|u|^4\mathrm{d}x\right)^{1-m_0}\leqslant\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^{m_0}}\right)\left(\int_{\mathbf{R}^4}V(x)|u|^2\mathrm{d}x\right)^{m_0}\left(\int_{\mathbf{R}^4}|u|^4\mathrm{d}x\right)^{1-m_0}\leqslant$$
$$C\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^{m_0}}\right)\left(\int_{\mathbf{R}^4}V(x)|u|^2\mathrm{d}x\right)^{m_0}\left(\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{2(1-m_0)}\leqslant C\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^{m_0}}\right)\cdot$$
$$\left(\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{m_0+2(1-m_0)}=C\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\frac{|K(x)|}{|V(x)|^{m_0}}\right)\sup_{x\in\mathbf{R}^4}\left(\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_0}{2}}.$$

由上述不等式可得$\|u\|_{L_k^{p_0}(\mathbf{R}^4)}\leqslant C\|u\|_E$,于是再由条件($\mathrm{VK}_3$)可得 $\dfrac{|K(x)|}{|V(x)|^{m_0}}\in L^\infty(\mathbf{R}^4)$. 由上述证明可知引理 2 成立.

引理 3 泛函 J 满足下列结论:

(i) 存在 $\rho,\alpha>0$,使得当$\|u\|_E=\rho$ 时有 $J(u)\geqslant\alpha$.

(ii) 存在 $e\in B_\rho(0)$,使得 $J(e)<0$.

证明 首先证明结论(i),分两种情况证明.

情况 1 假设条件(VK_3)成立,于是对任意的 $\varepsilon>0$,由条件(f_1)和(f_2)可得存在 $C_\varepsilon>0$,且使得

$$F(u)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|u|^2+C_\varepsilon|u|^4,\ \forall u\in E. \tag{6}$$

由式(6)和引理 2 可得 $\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|u|^4\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\|u\|_E^2+C_\varepsilon\|u\|_E^4$,于是再由引理 1 可得:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|_E^2-C\|u\|_E^6-\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_E^2-C_\varepsilon\|u\|_E^4=\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\|u\|_E^2-C\|u\|_E^6-C_\varepsilon\|u\|_E^4.$$

在上式中取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,则通过计算可知存在足够小的 ρ ($\rho>0$),且当 $\rho=\|u\|_E$ 时有 $J(u)\geqslant\alpha$.

情况 2 假设条件(VK_4)成立,则由条件(f_1)和(f_2)可得存在 $C'_\varepsilon>0$ 和 $C''_\varepsilon>0$,使得 $F(u)\leqslant$

$C'_\varepsilon |u|^{p_0} + C''_\varepsilon |u|^4$, $\forall u \in E$. 由上述可得:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|_E^2-C\|u\|_E^4-C\|u\|_E^6-C\|u\|_E^{p_0}.$$

再通过与情况 1 类似的计算可知,上式存在足够小的 $\rho\,(\rho>0)$,且当 $\rho=\|u\|_E$ 时有 $J(u)\geqslant\alpha$.

(ii) 对每个 $t>0$,由 $J(u)$ 可得 $J(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|_E^2-\frac{t^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(tu)\mathrm{d}x$. 由上式可知存在 $T>0$ 且 T 足够大,同时当 $t>T$ 时有 $J(tu)\to-\infty$. 由此可知,当 $e=tu$ 时,结论(ii)成立.

由引理 3 可知,泛函 $J(u)$ 可在

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\gamma(t))>0 \tag{7}$$

处找到一个(PS)序列,且该序列的路径为 $\Gamma:=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbf{R}^4)):\gamma(0)=0,J(\gamma(1))<0\}$.

引理 4　若 $\{u_n\}$ 是 J 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,则 $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

证明　假设 $\{u_n\}$ 是 J 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,即当 $n\to+\infty$ 时有 $J(u_n)\to c$ 和 $J'(u_n)\to 0$. 由此再由条件(f_3)可得:$c+1+\|u_n\|_E\geqslant J(u_n)-\frac{1}{\theta}\langle J'(u_n),u_n\rangle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u\|_E^2+\frac{\eta}{\theta}\int_{\mathbf{R}^4}K(x)(f(u_n)u_n-\theta F(u_n))\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{6}\right)\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{u_n}|u_n|^3\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u\|_E^2$. 上式表明 $\{u_n\}$ 在 E 中有界,因此引理 4 得证.

为了对泛函进行估值,在 $\mathbf{R}^4$ 中选取一个达到函数 $U_\varepsilon(x)=\frac{8^{\frac{1}{2}}\varepsilon}{\varepsilon^2+|x-x_0|^2}$,使其满足 $-\Delta u=u^3$;同时选取一个截断函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)$,使其在 $B_1(x_0)$ 中满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $\mathrm{supp}\,\varphi\subset B_2(x_0)$ 和 $\varphi(x)\equiv 1$. 令 $v_\varepsilon=\varphi U_\varepsilon$,于是根据文献[9]中的渐进估计可得 $\|v_\varepsilon\|^2=S^2+O(\varepsilon^2)$, $|v_\varepsilon|_4^4=S^2+O(\varepsilon^4)$. 对于 $s\in[2,4)$,再利用文献[9]中的渐进估计可得 $|v_\varepsilon|_s^s=\begin{cases}O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|), & s=2;\\ O(\varepsilon^{4-s}), & s\in(2,4).\end{cases}$ 定义 $V_{\max}:=\max_{X\in B_{2r}(x_0)}V(x)$ 和 $K_{\min}:=\min_{X\in B_{2r}(x_0)}K(x)$,于是再由假设($l_2$)可得 $l(x_0)\int_{B_{2r}(x_0)}\phi|u|^3\mathrm{d}x\leqslant\int_{B_{2r}(x_0)}l(x)\phi|u|^3\mathrm{d}x$. 证毕.

引理 5　假设 $(V,K)\in\Re$,条件(f_1)—(f_3)成立,$l(x)$ 满足假设(l_1)和(l_2),则存在 $u_0\in E\backslash\{0\}$,且使得 $0<\sup_{t\geqslant 0}J(tu_0)<\frac{1}{3}S^2|l(x)|_{L^\infty(\mathbf{R}^4)}^{-1}$.

证明　首先由 $J(u)$ 可得 $J(tv_\varepsilon)=\frac{t^2}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_\varepsilon|^2+V(x)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x-\frac{t^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x-\eta\cdot\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(tv_\varepsilon)\mathrm{d}x$. 再由引理 2 可知,存在 $t_\varepsilon>0$,且使得 $\sup_{t\geqslant 0}J(tv_\varepsilon)>0$ 成立,同时当 $\varepsilon>0$ 时有 $\lim_{t\to\infty}J(tv_\varepsilon)=-\infty$. 假设存在 ρ_1、ρ_2 和 $\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ 且 ε 足够小时满足 $\rho_1<t_\varepsilon<\rho_2$, $J(t_\varepsilon v_\varepsilon)=\sup_{t\geqslant 0}J(tv_\varepsilon)$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}J(tv_\varepsilon)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_\varepsilon}=0$,则由此可进一步得:

$$t_\varepsilon\int_{B_{2r}(x_0)}(|\nabla v_\varepsilon|^2+V(x)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x-\eta\int_{B_{2r}(x_0)}K(x)f(t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon\mathrm{d}x-$$

$$t^5\int_{B_{2r}(x_0)}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x=0. \tag{8}$$

下证当 $\varepsilon_n \to 0^+$ 时 $t_\varepsilon \to +\infty$ 不成立. 由式(8) 可得：

$$t_{\varepsilon_n}\int_{B_{2r}(x_0)}(|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2+V(x)|v_{\varepsilon_n}|^2)\mathrm{d}x \geqslant t_{\varepsilon_n}^5\int_{B_{2r}(x_0)} l(x)\phi_{v_{\varepsilon_n}}|v_{\varepsilon_n}|^3\mathrm{d}x.$$

因当 $t_\varepsilon \to +\infty$ 时，上式矛盾，因此 $\varepsilon_n \to 0^+$ 时 $t_\varepsilon \to +\infty$ 不成立.

再假设有一个序列，且当 $\varepsilon_n \to 0^+$ 时有 $\tilde{t}_{\varepsilon_n} \to 0$. 如果条件($\mathrm{VK}_3$) 成立，则由条件($\mathrm{f}_1$) 和($\mathrm{f}_2$) 可知，对所有 $\delta > 0$ 存在 $C_\delta > 0$，且使得

$$\int_{\mathbf{R}^4} K(x)f(\tilde{t}_{\varepsilon_n}v_{\varepsilon_n})v_{\varepsilon_n}\mathrm{d}x \leqslant \delta\tilde{t}_{\varepsilon_n}\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^2\mathrm{d}x + C_\delta(\tilde{t}_{\varepsilon_n})^3\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^4\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\delta C\tilde{t}_{\varepsilon_n}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2+V(x)|v_{\varepsilon_n}|^2)\,\mathrm{d}x + C_\delta(\tilde{t}_{\varepsilon_n})^3\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^4\mathrm{d}x.$$

在上式中取 $\delta = \dfrac{1}{2c}$，$\eta \leqslant 1$，则由式(8) 可得：

$$\frac{\tilde{t}_{\varepsilon_n}}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2+V(x)|v_{\varepsilon_n}|^2)\,\mathrm{d}x \leqslant C_\delta(\tilde{t}_{\varepsilon_n})^3\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^4\mathrm{d}x + (\tilde{t}_{\varepsilon_n})^5\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_{\varepsilon_n}}|v_{\varepsilon_n}|^3\mathrm{d}x.$$

假设条件(VK_4) 成立，则由条件(f_1) 和(f_2) 可知，存在一个常数 $\bar{C} > 0$，且使得

$$\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(\tilde{t}_{\varepsilon_n}v_{\varepsilon_n})\mathrm{d}x \leqslant (\tilde{t}_{\varepsilon_n})^{p_0-1}\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^{p_0}\mathrm{d}x + \bar{C}(\tilde{t}_{\varepsilon_n})^3\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^4\mathrm{d}x.$$

对上式再利用式(8) 可得：

$$\tilde{t}_{\varepsilon_n}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_{\varepsilon_n}|^2+V(x)|v_{\varepsilon_n}|^2)\,\mathrm{d}x \leqslant (\tilde{t}_{\varepsilon_n})^{p_0-1}\int_{\mathbf{R}^4}K(x)(v_{\varepsilon_n})^{p_0}\mathrm{d}x +$$

$$\bar{C}(\tilde{t}_{\varepsilon_n})^3\int_{\mathbf{R}^4}K(x)|v_{\varepsilon_n}|^4\mathrm{d}x + (\tilde{t}_{\varepsilon_n})^5\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_{\varepsilon_n}}(v_{\varepsilon_n})^3\mathrm{d}x.$$

因为 $p_0 > 2$，故上式矛盾，证毕.

由于 $0 < \rho_1 < t_\varepsilon < \rho_2 < \infty$，因此根据 $V_{\max}$ 和 $K_{\min}$ 的定义可得：

$$J(tv_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_\varepsilon|^2+V(x)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x - \eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(tv_\varepsilon)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_\varepsilon|^2+V(x)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x - \frac{t_\varepsilon^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x - \eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x + \frac{t_\varepsilon^2}{2}V_{\max}(x)\int_{\mathbf{R}^4}|v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x - \frac{t_\varepsilon^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x - \eta K_{\min}(x)\int_{\mathbf{R}^4}F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x.$$

定义 $h(t) := \dfrac{t^2}{2}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x - \dfrac{t^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x$，于是对 $h(t)$ 进行计算可得：

$$\max_{t\geqslant 0}h(t) = \frac{1}{3}\Big(\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{3}{2}} \Big/ \Big(\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

再由 $-\Delta\phi_{v_\varepsilon} = l(x)|v_\varepsilon|^3$ 和 Cauchy 不等式可得：

$$\int_{\mathbf{R}^4}l(x)|v_\varepsilon|^4\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^4}\nabla\phi_{v_\varepsilon}|\nabla v_\varepsilon|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2|l(x)|_\infty}\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla\phi_{v_\varepsilon}|^2\mathrm{d}x + \frac{|l(x)|_\infty}{2}\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2|l(x)|_\infty}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x + \frac{|l(x)|_\infty}{2}\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x.$$

上式表明 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x \geqslant 2|l(x)|_\infty\int_{\mathbf{R}^4}l(x)|v_\varepsilon|^4\mathrm{d}x - |l(x)|_\infty^2\int_{\mathbf{R}^4}|\nabla v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x = |l(x)|_\infty^2 S^2 +$ $O(\varepsilon^2)$，因此有 $\displaystyle\max_{t\geqslant 0}h(t) \leqslant \frac{1}{3}\frac{(S^2+O(\varepsilon^2))^{\frac{3}{2}}}{(|l(x)|_\infty^2 S^2+O(\varepsilon^2))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}|l(x)|_\infty^{-1}S^2+O(\varepsilon^2)$. 另外由条件($\mathrm{f}_3$) 可得 $F(s) \geqslant Cs^\theta$，$s > 0$，因此有：

$$\int_{B_{2r}(x_0)} F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \geqslant C\int_{B_{2r}(x_0)} (t_\varepsilon v_\varepsilon)^\theta \mathrm{d}x \geqslant C\rho_1^\theta \int_{B_{2r}(x_0)} (v_\varepsilon)^\theta \mathrm{d}x = \begin{cases} C\rho_1^\theta O(\varepsilon^2 |\ln\varepsilon|), \theta=2; \\ C\rho_1^\theta O(\varepsilon^{4-\theta}), \theta\in(2,4). \end{cases} \tag{9}$$

由于 $\max\limits_{t\geqslant 0} J(tv_\varepsilon)=J(t_\varepsilon v_\varepsilon)$，即：

$$\max_{t\geqslant 0} J(tv_\varepsilon)=\frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_\varepsilon|^2+V(x)|v_\varepsilon|^2)\mathrm{d}x-\frac{t_\varepsilon^6}{6}\int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_{v_\varepsilon}|v_\varepsilon|^3\mathrm{d}x-$$

$$\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant h(t_\varepsilon)+\frac{V_{\max}}{2}\int_{\mathbf{R}^4}|v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{3}|l(x)|_\infty^{-1}S^2+CO(\varepsilon^2)-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x,$$

因此由式(9)可得：

$$CO(\varepsilon^2)-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant CO(\varepsilon^2)-\begin{cases} C\rho_1^\theta O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|), \theta=2; \\ C\rho_1^\theta O(\varepsilon^{4-\theta}), \theta\in(2,4). \end{cases}$$

由上述可知：如果 $\theta=2$，$\eta>0$，$\varepsilon>0$ 且 ε 足够小，则有：

$$CO(\varepsilon^2)-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant CO(\varepsilon^2)-C\eta\rho_1^2 O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)<0.$$

如果 $\theta\in(2,4)$，$0<4-\theta<2$，$\eta>0$，$\varepsilon>0$ 且 ε 足够小，则有：

$$CO(\varepsilon^2)-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x\leqslant CO(\varepsilon^2)-C\eta\rho_1^\theta O(\varepsilon^{4-\theta})<0.$$

由以上证明可知，对任何 $\eta>0$，当 $\theta\in(2,4)$ 时有 $CO(\varepsilon^2)-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x<0$. 由此可得 $\sup\limits_{t\geqslant 0} J(tv_\varepsilon)<\frac{1}{3}S^2|l(x)|_E^{-1}$，证毕.

2　主要结果及其证明

定理 1　若 $(V,K)\in\Re$，f 满足条件(f_1)—(f_3)，$l(x)$ 满足假设(l_1)—(l_2)，$\theta\in(2,4)$，$\eta>0$，则系统(1)至少存在一个非平凡解.

证明　由引理 4 可知 $\{u_n\}_n$ 在 E 中有界，因此存在一个子序列，即：

$$u_n\rightharpoonup u\in E;\ u_n\to u\in L_{loc}^r(\mathbf{R}^4),\ r\in[2,4);\ \text{在 } \mathbf{R}^4 \text{ 中几乎处处有 } u_n\to u. \tag{10}$$

于是由式(3)—(5)可得：$J(u_n)=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)F(u_n)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\cdot\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{u_n}|u_n|^3\mathrm{d}x=c+o(1)$ 和 $\langle J'(u_n),u_n\rangle=\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u_n)u_n\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{u_n}|u_n|^3\mathrm{d}x=o(1)$. 假设 $v_n=u_n-u$，于是再利用式(10)、命题 2 和 Brézis-Lieb 引理[10]可得：

$$J(u_n)=J(u)+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_n|^2+V(x)|v_n|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_n}|v_n|^3\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$\langle J'(u_n),u_n\rangle=\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u)u\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_n|^2+V(x)|v_n|^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_{v_n}|v_n|^3\mathrm{d}x+o_n(1). \tag{12}$$

由于当 $n\to\infty$ 时有 $J'(u_n)\to 0$，因此由式(10)可得：

$$\langle J'(u)_n,u\rangle=\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^4}l(x)\phi_u|u|^3\mathrm{d}x-\eta\int_{\mathbf{R}^4}K(x)f(u)u\mathrm{d}x. \tag{13}$$

由此再由式(12)可得：

$$\int_{\mathbf{R}^4} |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^4} V(x) |v_n|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_{v_n} |v_n|^3 \mathrm{d}x \to 0,\ n \to +\infty; \tag{14}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)\mathrm{d}x - \eta\int_{\mathbf{R}^4} K(x)F(u)\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_u |u|^3 \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\eta\int_{\mathbf{R}^4} K(x)f(u)u\mathrm{d}x - \eta\int_{\mathbf{R}^4} K(x)F(u)\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_u |u|^3 \mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{15}$$

不失一般性,假设:

$$\int_{\mathbf{R}^4} (|\nabla v_n|^2 + V(x)|v_n|^2)\mathrm{d}x \to l,\ n \to \infty. \tag{16}$$

于是利用式(14)可得:

$$\int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_{v_n} |v_n|^3 \mathrm{d}x \to l,\ n \to \infty. \tag{17}$$

对 $-\Delta\phi_u = l(x)|u|^3$ 进行计算得:

$$\int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_{v_n} |v_n|^3 \mathrm{d}x \leqslant \frac{|l(x)|_\infty^2 |v_n|_4^6}{S} \leqslant \frac{|l(x)|_\infty^2 \|v_n\|^6}{S^4}. \tag{18}$$

由式(15)—(18)可知 $l \leqslant \frac{|l(x)|_\infty^2 l^3}{S^4}$,因此 $l = 0$ 或者 $l \geqslant \frac{S^2}{|l(x)|_\infty}$. 假设 $l \geqslant \frac{S^2}{|l(x)|_\infty}$,令 $c_0 = J(u_n)$,并在式(11)中取极限($n \to \infty$),于是由式(15)—(17)和 $l \geqslant \frac{S^2}{|l(x)|_\infty}$ 可得 $J(u_n) > 0 + \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4}(|\nabla v_n|^2 + V(x)|v_n|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^4} l(x)\phi_{v_n}|v_n|^3\mathrm{d}x\right] = \frac{2}{6}l \geqslant \frac{1}{3}\ \frac{S^2}{|l(x)|_\infty}$. 由该式可得 $c_0 \geqslant \frac{1}{3}\ \frac{S^2}{|l(x)|_\infty}$. 而由式(7)和引理 5 可得 $c_0 \leqslant \frac{1}{3}\ \frac{S^2}{|l(x)|_\infty}$,因此矛盾. 由此表明 $l = 0$,即 $J(u) = c > 0$ 和 $J'(u) = 0$,因此 u 是问题(1)的非平凡解. 证毕.

参考文献:

[1] SUN J T, CHEN H B, YANG L. Positive solutions of asymptotically linear Schrödinger-Poisson systems with a radial potential vanishing at infinity[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2011,74(2):413-423.

[2] LIU H D. Positive solutions of an asymptotically periodic Schrödinger-Poisson system with critical exponent[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2016,32:198-212.

[3] SHAO L Y. Non-trivial solutions for Schrödinger-Poisson systems involving critical nonlocal term and potential vanishing at infinity[J]. Open Mathematics, 2019,17(1):1156-1167.

[4] ZHANG J F, GUO W, CHU C M, et al. Existence of solutions for a Schrödinger-Poisson system with critical nonlocal term and general nonlinearity[J]. Journal of Function Spaces, 2020,2020:2197207.

[5] QIAN X T. Multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal problem involving critical exponent[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2021,2021(57):1-14.

[6] ALVES C O, SOUTO M A S. Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity[J]. Journal of Differential Equations, 2013,254(4):1977-1991.

[7] SUN J B, WANG Z Q, WILLEM M. Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials [J]. Journal of Differential Equations, 2007,238(1):201-219.

[8] AMBROSETTI A, MALCHIODI A, FELLI V. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity[J]. Journal of the European Mathematical Society, 2005,7(1):117-144.

[9] KHOUTIR S, CHEN H B. Positive ground state solutions for a class of Schrödinger-Poisson systems in $\mathbf{R}^4$ involving critical Sobolev exponent[J]. Asymptotic Analysis, 2018,109(1/2):91-109.

[10] BREZIS H, LIEB E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983,88(3):486-490.