文章编号: 1004-4353(2023)03-0189-07

一类 Hadamard 型分数阶微分方程边值问题的 Lyapunov 不等式及其解的存在性

葛月英， 葛琦

(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：研究了一类 Hadamard 型分数阶微分方程的边值问题. 首先，将微分方程边值问题转化为等价的积分方程问题；其次，根据边值条件求出微分方程相应的格林函数，并利用格林函数的性质得出微分方程所对应的 Lyapunov 不等式；最后，分别利用 Banach 压缩映像原理和 Leray-Schauder 不动点定理证明了该类非线性边值问题解的存在性，并通过算例验证了所得结果的正确性.

关键词：Hadamard 型分数阶微分方程；Lyapunov 不等式；边值问题；格林函数；不动点定理

中图分类号：O175.8　　　　**文献标志码**：A

Existence of Lyapunov inequality and its solutions for a class of boundary value problems for fractional differential equations of Hardmard type

GE Yueying， GE Qi

(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: A Hadamard type boundary value problem for fractional differential equations was studied. Firstly, the boundary value problem of differential equation was equivalent to the integral equation problem. Secondly, the corresponding Green function was obtained according to the boundary value conditions, and the Lyapunov inequality corresponding to the equation was obtained by using the properties of Green function. Finally, the existence of solutions for a class of nonlinear boundary value problems was proved by Banach compression mapping principle and Leray-Schauder fixed point theorem respectively. The correctness of the results obtained in this paper was verified by an example.

Keywords: fractional differential equation of Hardmard type; Lyapunov inequation; boundary value problem; Green function; fixed point theorem

0 引言

因分数阶微分方程模型可应用于自然科学、工程技术等多个领域，因此近年来许多学者对其进行了研究，并给出了不同的分数阶导数，如 Riemann-Liouville 导数、Caputo 导数、Grunwald-Letnikov 导数、Marchaud 导数、Hardamard 导数等. 2017 年，Ma 等[1]研究了如下一类含 Hadamard 分数阶导数的分数阶微分方程的边值问题：

收稿日期：2023－04－28

第一作者：葛月英(1999—)，女，硕士研究生，研究方向为常微分方程理论及其应用.

通信作者：葛琦(1975—)，女，硕士，教授，研究方向为常微分方程理论及其应用.

$$\begin{cases} {}_a^H D^\alpha u(t) - q(t)u(t) = 0,\ 1 < t < e; \\ u(a) = u(e) = 0. \end{cases}$$

其中:$1 < \alpha \leqslant 2$,$q(t)$ 是实连续函数.若上述方程有非零解,则有以下 Lyapunov 不等式成立:

$$\int_1^e |q(s)|\,\mathrm{d}s > \Gamma(\alpha)\lambda^{1-\alpha}(1-\lambda)^{1-\alpha}e^\lambda.$$

其中:$\lambda = \dfrac{2\alpha - 1 - \sqrt{(2\alpha-2)^2+1}}{2}$.2019 年,Laadjal 等[2] 对文献[1]中的边值条件进行了推广,即研究了如下边值问题:

$$\begin{cases} {}_a^H D^\alpha u(t) - q(t)u(t) = 0,\ 1 \leqslant a < t < b; \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

其中:$1 < \alpha \leqslant 2$,$q(t)$ 是实连续函数.若上述方程有非零解,则有以下 Lyapunov 不等式成立:

$$\int_a^b |q(s)|\,\mathrm{d}s \geqslant \Gamma(\alpha)\xi\left[\ln\frac{\zeta}{a}\ln\frac{b}{\zeta}\Big/\ln\frac{b}{a}\right]^{1-\alpha}.$$

其中:$\xi = \exp\left[\dfrac{1}{2}\left(2(\alpha-1) + \ln ba - \sqrt{4(\alpha-1)^2 + \ln^2\dfrac{b}{a}}\right)\right]$.

受文献[1-2]的启发,本文研究如下一类含 Hadamard 分数阶导数的分数阶微分方程的边值问题的 Lyapunov 不等式:

$$\begin{cases} {}_1^H D^\alpha u(t) + q(t)u(t) = 0,\ 1 < t < e; \\ u(1) = u'(1) = u''(1) = 0,\ {}_1^H D^\beta(e) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中:$3 < \alpha \leqslant 4$,$1 < \beta \leqslant 2$,$q(t)$ 是实连续函数.同时本文还研究以下微分方程解的存在性:

$$\begin{cases} {}_1^H D^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0,\ 1 < t < e; \\ u(1) = u'(1) = u''(1) = 0,\ {}_1^H D^\beta(e) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

其中:$3 < \alpha \leqslant 4$,$1 < \beta \leqslant 2$,$q(t)$ 是实连续函数.

1 预备知识

定义 1[3] 定义函数 $u(t)$ 的 α 阶 Hadamard 分数阶积分为:

$${}_a^H I^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s},\ a \leqslant t \leqslant b.$$

其中:$a \in \mathbf{R}^+$,且 $n-1 < \alpha \leqslant n$,$n \in \mathbf{N}$.

定义 2[3] 定义函数 $u(t)$ 的 α 阶 Hadamard 分数阶导数为:

$${}_a^H D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} t^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s},\ a \leqslant t \leqslant b.$$

其中:$a \in \mathbf{R}^+$,且 $n-1 < \alpha \leqslant n$,$n \in \mathbf{N}$.

由定义 1 和定义 2 可得到如下关系式:

$${}_a^H I^\alpha\, {}_a^H D^\alpha u(t) = u(t) + \sum_{i=1}^n c_i \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}, \tag{3}$$

$${}_1^H D^\alpha\, {}_1^H I^\alpha u(t) = u(t). \tag{4}$$

其中:$n-1 < \alpha \leqslant n$,$n \in \mathbf{N}$;$c_i \in \mathbf{R}\,(i = 1, \cdots, n)$,且 c_i 是常数.

引理 1[4] 若 $\beta - 1 > \gamma \geqslant 0$,$t > a > 1$,则有 ${}^H D_{1^+}^\gamma \left(\ln\dfrac{t}{a}\right)^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma)}\left(\ln\dfrac{t}{a}\right)^{\beta-\gamma-1}$.

引理 2 $u(t)$ 是边值问题(1)的解,当且仅当 $u(t)$ 满足 $u(t) = \int_1^e G(t,s)q(s)u(s)\,\mathrm{d}s$,其中:

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(\ln t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)s}(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}-\dfrac{(\ln t-\ln s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)s}, & 1\leqslant s\leqslant t\leqslant e;\\ \dfrac{(\ln t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)s}(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}, & 1\leqslant t\leqslant s\leqslant e.\end{cases}\tag{5}$$

证明 假设 $u(t)$ 是边值问题(1) 的解,则对边值问题(1) 的两侧做积分可得:

$$u(t)=c_1(\ln t)^{\alpha-1}+c_2(\ln t)^{\alpha-2}+c_3(\ln t)^{\alpha-3}+c_4(\ln t)^{\alpha-4}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}q(s)u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}.\tag{6}$$

由此再由 $u(1)=u'(1)=u''(1)=0$, $3<\alpha\leqslant 4$ 可得 $c_2=c_3=c_4=0$. 对 $u(t)$ 求 β 阶导数可得:

$${}_1^HD^\beta u(t)=c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)}(\ln t)^{\alpha-\beta-1}-\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\beta-1}q(s)u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}.\tag{7}$$

根据条件 ${}_1^HD^\beta u(e)=0$ 可得 $c_1=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^e\left(\ln\frac{e}{s}\right)^{\alpha-\beta-1}q(s)u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}$. 将该式代入式(6) 可得:

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e(\ln t)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{e}{s}\right)^{\alpha-\beta-1}q(s)u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}q(s)u(s)\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

证毕.

引理 3 $G(t,s)$ 有如下性质:

1) $G(t,s)\geqslant 0$, $t,s\in[1,e]\times[1,e]$;

2) $\forall s\in[1,e]$, $\displaystyle\max_{t\in[1,e]}G(t,s)=G(e,s)=\frac{(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}\left[1-(1-\ln s)^{\beta}\right]}{\Gamma(\alpha)s}$;

3) $\displaystyle\max_{t,s\in[1,e]}G(t,s)=\frac{\Delta}{\Gamma(\alpha)}$, 其中:

$$\Delta=e^{\frac{1+\beta-2\alpha+\sqrt{(\beta-2\alpha+1)^2-4(\alpha-1)}}{2}}\left(\frac{2\alpha-\beta-1-\sqrt{(\beta-2\alpha+1)^2-4[\alpha-1]}}{2}\right)^{\alpha-1}\times$$
$$\left(1-\frac{2\alpha-\beta-1-\sqrt{(\beta-2\alpha+1)^2-4(\alpha-1)}}{2}\right)^{\alpha-\beta-1}.\tag{8}$$

证明 1) 当 $t\in[1,s]$ 时,由式(5) 显然可得 $G(t,s)\geqslant 0$; 当 $t\in[s,e]$ 时,由式(5) 可得:

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}=\frac{(\alpha-1)\left[(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}(\ln t)^{\alpha-2}-(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}\right]}{\Gamma(\alpha)st}.$$

因此再由 $\alpha-\beta-1<\alpha-2$ 可知 $(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}>(1-\ln s)^{\alpha-2}$, 故

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}>\frac{(\alpha-1)\left[(1-\ln s)^{\alpha-2}(\ln t)^{\alpha-2}-(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}\right]}{\Gamma(\alpha)st}.$$

由 $1\leqslant s\leqslant t\leqslant e$ 知, $0\leqslant\ln s\leqslant 1$, $0\leqslant\ln t\leqslant 1$, 因此有 $\ln t\ln s\leqslant\ln s$, 故 $\ln t-\ln t\ln s\geqslant\ln t-\ln s$. 又由于 $3<\alpha\leqslant 4$, 因此 $(\ln t-\ln t\ln s)^{\alpha-2}\geqslant(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}$, 故 $\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}\geqslant 0$. 由上述可知 $G(t,s)$ 关于 t 是单调递增的,因此有 $G(t,s)\geqslant G(s,s)\geqslant 0$.

2) 由上述证明可知,对于 $s\in[1,e]$, $G(t,s)$ 关于 t 是单调递增的,因此有:

$$\max_{t\in[1,e]}G(t,s)=G(e,s)=\frac{(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}-(1-\ln s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)s}.$$

3) 由式(5) 可知,对于 $\forall t\in[1,e]$, 当 $s\in[1,t]$ 时有:

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial s}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)s^2}\left[-(\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln s)^{\alpha-\beta-2}(\alpha-\beta-1)+(\alpha-1)(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}-\right.$$
$$\left.(\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}+(\ln t-\ln s)^{\alpha-1}\right]=$$

$$\frac{(1-\ln s)^{\alpha-\beta-2}(\ln t)^{\alpha-1}(-\alpha+\beta+\ln s)+(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}(\alpha-1+\ln t-\ln s)}{\Gamma(\alpha)s^2}>$$
$$\frac{(\ln t-\ln s)^{\alpha-\beta-2}(\ln t)^{\alpha-1}(-\alpha+\beta+\ln s)+(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}(\alpha-1+\ln t-\ln s)}{\Gamma(\alpha)s^2}>$$
$$\frac{(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}\left[(\ln t)^{\alpha-1}(-\alpha+\beta+\ln s)+(\alpha-1+\ln t-\ln s)\right]}{\Gamma(\alpha)s^2}>$$
$$\frac{(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}\left[(\ln t)^{\alpha-1}(-\alpha+\beta+\ln s)+(\ln t)^{\alpha-1}(\alpha-1+\ln t-\ln s)\right]}{\Gamma(\alpha)s^2}>$$
$$\frac{(\ln t-\ln s)^{\alpha-2}\left[(\ln t)^{\alpha-1}(\beta+\ln t-1)\right]}{\Gamma(\alpha)s^2}.$$

由上式可知$\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial s}\geqslant 0$,因此 $G(t,s)$ 关于 s 是单调递增的,故有:

$$\max_{s\in[1,t]}G(t,s)=G(t,t)=\frac{(\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln t)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)t}. \tag{9}$$

当 $s\in[t,e]$ 时,由式(5)可知,$G(t,s)$ 关于 s 是单调递减的,故有:

$$\max_{s\in[t,e]}G(t,s)=G(t,t)=\frac{(\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln t)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)t}. \tag{10}$$

综合式(9)和式(10)可得,对于 $\forall t\in[1,e]$ 有 $\max\limits_{s\in[1,e]}G(t,s)=G(t,t)=\dfrac{(\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln t)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)t}$. 记 $H(t)=\dfrac{(\ln t)^{\alpha-1}(1-\ln t)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)t}$,则对 $H(t)$ 进行求导可得:

$$H'(t)=\frac{(\ln t)^{\alpha-2}(1-\ln t)^{\alpha-\beta-2}\left[(\alpha-1)(1-\ln t)-\ln t(\alpha-\beta-1)-\ln t(1-\ln t)\right]}{\Gamma(\alpha)t^2}.$$

再令 $H'(t)=0$,由此可得 $\ln t=\dfrac{2\alpha-\beta-1\pm\sqrt{(\beta-2\alpha+1)^2-4(\alpha-1)}}{2}$. 由于 $\ln t\in(0,1)$,故$H'(t)=0$ 有唯一解:$t_0=e^{\frac{2\alpha-\beta-1-\sqrt{(\beta-2\alpha+1)^2-4(\alpha-1)}}{2}}$,且 $H'(t)\begin{cases}>0,\ 1<t<t_0;\\<0,\ t_0<t<e.\end{cases}$ 综上可知,$\max\limits_{t,s\in[1,e]}G(t,s)=H(t_0)=\dfrac{\Delta}{\Gamma(\alpha)}$,其中 Δ 满足式(8).

引理 4(Leray-Schauder 不动点定理)[5] 设 V 是 Banach 空间 Y 的一个有界闭凸子集,E 是 V 中的相对开球,且 $0\in E$. 若算子 $F:\bar{E}\to V$ 是全连续的,则下列结论之一成立:① F 在 $\bar{E}$ 中至少存在一个不动点;② 存在 $u\in\partial E$ 和 $\omega\in(0,1)$,使得 $u=\omega F(u)$.

引理 5(Banach 压缩映像原理)[6] 假设 D 是 Banach 空间 E 的非空闭子集,$T:D\to D$ 是压缩算子,即对任意的 $x,y\in D$ 有 $|Tx-Ty|\leqslant a|x-y|$, $a\in[0,1)$. 则存在唯一的 $x^*\in D$,使得 $Tx^*=x^*$,即 T 在 D 内存在唯一的不动点 x^*.

2 主要结论及其证明

定理 1 若边值问题(1)有非零解,则有:

$$\int_1^e\frac{(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}\left[1-(1-\ln s)^{\beta}\right]}{s}|q(s)|\,\mathrm{d}s\geqslant\Gamma(\alpha),$$
$$\int_1^e|q(s)|\,\mathrm{d}s\geqslant\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}.$$

证明 假设 $u(t)$ 是边值问题(1)的非零解,则由引理 2 可知,$u(t)=\int_1^e G(t,s)q(s)u(s)\mathrm{d}s$. 令 $h=$

$\max\limits_{t\in[1,e]}|u(t)|$,则对 $\forall t\in[1,e]$ 有 $|u(t)|\leqslant\int_1^e|G(t,s)||q(s)||u(s)|\mathrm{d}s\leqslant\int_1^e\max\limits_{t\in[1,e]}|G(t,s)||q(s)|h\mathrm{d}s$,即

$$1\leqslant\int_1^e\max_{t\in[1,e]}|G(t,s)||q(s)|\mathrm{d}s. \tag{11}$$

由引理 3 中的性质 2) 及式(11) 可得 $\int_1^e\frac{(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}[1-(1-\ln s)^{\beta}]}{s}|q(s)|\mathrm{d}s\geqslant\Gamma(\alpha)$. 再由引理 3 中的性质 3) 及式(11) 可得 $\int_1^e|q(s)|\mathrm{d}s\geqslant\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta}$. 证毕.

以下本文利用定理 1 讨论如下特征值问题:

$$\begin{cases}{}_1^HD^{\alpha}u(t)+\lambda u(t)=0,\ 1<t<e;\\ u(1)=u'(1)=u''(1)=0,\ {}_1^HD^{\beta}(e)=0.\end{cases} \tag{12}$$

其中:$3<\alpha\leqslant4$, $1<\beta\leqslant2$. 由定理 1 可得如下推论:

推论 1　对于 $\lambda\in\left(-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)},\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)}\right)$,特征值问题(12) 没有与其对应的特征函数.

证明　假设 $u_1(t)$ 是特征值问题(12) 的一个非零特征函数,其相对应的特征值为 $\lambda_0\in\left(-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)},\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)}\right)$. 于是由定理 1 知 $|\lambda|\geqslant\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)}$,这与假设矛盾,故推论 1 成立.

下面利用 $G(t,s)$ 的性质讨论微分方程边值问题(2) 解的存在性. 首先记 Banach 空间 $E=C[1,e]$,定义其范数为 $\|y\|=\max\limits_{t\in[1,e]}|y(t)|$,并定义算子 $P:E\to E$ 为:

$$Pu(t)=\int_1^eG(t,s)q(s)u(s)\mathrm{d}s. \tag{13}$$

另外,本文还作如下假设:

(H_1) $f:[1,e]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数;

(H_2) 存在常数 $L>0$,使得 $|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$ 对于任意的 $t\in[1,e]$ 和任意的 $y_1,y_2\in\mathbf{R}$ 都成立;

(H_3) 存在非负连续函数 $l(t)\in C([1,e];\mathbf{R})$,使得 $|f(t,y)|\leqslant l(t)|y|$ 对任意的 $(t,y)\leqslant[1,e]\times\mathbf{R}$ 都成立.

定理 2　假设条件(H_1) 和(H_2) 成立,且若对于任意的 $t\in[1,e]$ 有如下不等式成立:

$$L<\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)}, \tag{14}$$

则边值问题(2) 有唯一解.

证明　首先证明算子 $P:E\to E$ 为压缩算子. 由条件(H_2) 可知,对任意的 $u_1,u_2\in C([1,e];\mathbf{R})$ 有:

$$|Pu_1(t)-Pu_2(t)|\leqslant\int_1^e|G(t,s)||f(s,u_1(s)-f(s,u_2(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$L\int_1^e|G(t,s)||u_1(s)-u_2(s)|\mathrm{d}s\leqslant L\int_1^eG(t,s)\mathrm{d}s\|u_1-u_2\|\leqslant L\frac{\Delta(e-1)}{\Gamma(\alpha)}\|u_1-u_2\|,$$

因此由式(14) 可知 P 是一个压缩算子. 由此再由 Banach 压缩映像原理可知,算子 P 存在唯一的不动点,即边值问题(2) 存在唯一解.

定理 3　假设条件(H_1) 和(H_3) 成立,且若对于任意的 $t\in[1,e]$,有如下不等式成立:

$$\frac{\Delta(e-1)}{\Gamma(\alpha)}\|l\|<1, \tag{15}$$

则边值问题(2) 至少存在一个解.

证明　由于定义算子 P 与式(13) 相同,因此定理 3 可以分为以下 3 个步骤证明:

(i) P 是连续算子. 由条件(H_1) 和勒贝格控制收敛定理显然可得.

(ii) P 是紧算子. 首先证明 P 是一致有界的. 设 T_r 是 $C([1,e];\mathbf{R})$ 上的一个有界集,即存在 $M>0$ 使得对任意的 $u\in T_r$ 有 $\|u\|\leqslant M$ 成立,再令 $L=\max\limits_{\|u\|\leqslant M} f(t,u(t))+1$,则对任意的 $u\in T_r$ 有

$$\|Pu\|=\max_{t\in[1,e]}\left|\int_1^e G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{\Delta(e-1)}{\Gamma(\alpha)}L.$$

于是根据算子一致有界的定义可知,P 是一致有界的.

下证 P 是等度连续的. 由式(13) 可知,对任意的 $1\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant e$ 以及任意的 $u\in T_r$,有:

$$|Pu(t_2)-Pu(t_1)|=\left|\int_1^e G(t_2,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s-\int_1^e G(t_1,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^e(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}(\ln t_2)^{\alpha-1}f(s,u(s))\frac{\mathrm{d}s}{s}-\int_1^e(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}(\ln t_1)^{\alpha-1}f(s,u(s))\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))\frac{\mathrm{d}s}{s}-\int_1^{t_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))\frac{\mathrm{d}s}{s}\right|=I_1+I_2.$$

其中:

$$I_1\leqslant\frac{\|l\|r\left[(\ln t_2)^{\alpha-1}-(\ln t_1)^{\alpha-1}\right]}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e(1-\ln s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}(\ln s)=\frac{\|l\|r\left[(\ln t_2)^{\alpha-1}-(\ln t_1)^{\alpha-1}\right]}{\Gamma(\alpha)(\alpha-\beta)},$$

$$I_2\leqslant\frac{\|l\|r}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_1^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}d(\ln s)-\int_1^{t_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}(\ln s)\right]=\frac{\|l\|r\left[(\ln t_2)^{\alpha}-(\ln t_1)^{\alpha}\right]}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

由上式可知,当 $t_2-t_1\to0$ 时,有 $I_1,I_2\to0$,即 $|Pu(t_2)-Pu(t_1)|\to0$. 由此可知 PT_r 是等度连续的,于是再由 Arezla-Ascoli 定理可知 P 是紧算子.

(iii) 算子 P 是有界的. 利用反证法证明. 由式(15) 知存在足够大的 N,使得 $\dfrac{\Delta(e-1)}{\Gamma(\alpha)}\|l\|N<N$ 成立. 定义集合 $E=\{u\in C([1,e];\mathbf{R}):\|u\|<N\}$,于是根据(ii) 中的结论可知算子 $P:\bar{E}\to C([1,e];\mathbf{R})$ 是紧算子,且是连续的. 假设存在 $\lambda\in(0,1)$ 和 $u\in\partial E$,使得 $u=\lambda Pu$ 成立,则对任意的 $t\in(1,e)$ 有:

$$|u(t)|=|\lambda Pu(t)|\leqslant\int_1^e G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{\Delta(e-1)\|l\|\|u\|}{\Gamma(\alpha)}.$$

由 $\dfrac{\Delta(e-1)}{\Gamma(\alpha)}\|l\|N<N$ 可得 $\|u\|<N$,这与 $\|u\|=N$ 相矛盾,故对于任意的 $\lambda\in(0,1)$ 和 $u\in\partial E$,有 $u\neq\lambda Pu$ 成立.

由定理 3 及引理 4 可知,算子 P 至少存在一个不动点,因此边值问题(2) 至少有一个解,证毕.

3 算例

考虑如下边值问题:

$$\begin{cases}{}_1^HD^{\frac{7}{2}}u(t)+\dfrac{t}{1+t}\sin u=0,\ 1<t<e;\\ u(1)=u'(1)=u''(1)=0,\ {}_1^HD^{\frac{3}{2}}(e)=0.\end{cases}\tag{16}$$

其中:$\alpha=\dfrac{7}{2}$,$\beta=\dfrac{3}{2}$,$f(t,u(t))=\dfrac{t}{1+t}\sin u$. 由函数连续的定义可知,$f$ 是定义在$[1,e]\times\mathbf{R}$ 上的连续函数. 由引理 3 中 Δ 的计算公式可得 $\Delta=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{41}-9}{4}}\times\left(\dfrac{9-\sqrt{41}}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\times\dfrac{\sqrt{41}-5}{4}\approx0.062\,118$,由此根据式(14) 进一步计算可得 $\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)}\approx8$. 故由定理 2 可知,当 $L<8$ 时边值问题(16) 有唯一解.

(下转第 217 页)

photovoltaic properties of RF-sputtered CdSe thin films[J]. Crystals, 2021, 11(1): 73.
[17] ZHAO G L, ZHANG T B, ZHANG T, et al. Electrical and optical properties of titanium nitride coatings prepared by atmospheric pressure chemical vapor deposition[J]. Journal of Non-Crystalline Solids, 2008, 354(12/13): 1272-1275.
[18] CULLITY B D, STOCK S R. Elements of X-ray Diffraction[M]. 3rd Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2001: 388.
[19] MATHURI S, RAMAMURTHI K, BABU R R. Effect of Sb incorporation on the structural, optical, morphological and electrical properties of CdSe thin films deposited by electron beam evaporation technique[J]. Thin Solid Films, 2018, 660: 23-30.
[20] LALITHA S, SATHYAMOORTHY R, SENTHILARASU S, et al. Influence of $CdCl_2$ treatment on structural and optical properties of vacuum evaporated CdTe thin films [J]. Solar Energy Materials and Solar Cells, 2006, 90(6): 694-703.
[21] SINDHUA H S, MAIDUR S R, PATIL P S, et al. Nonlinear optical and optical power limiting studies of $Zn_{1-x}Mn_xO$ thin films prepared byspraypyrolysis[J]. Optik, 2019, 182: 671-681.
[22] PATIL K R, PARANJAPE D V, SATHAYE S D, et al. A process for preparation of Q-CdSe thin films by liquid-liquid interface reaction technique [J]. Materials Letters, 2000, 46(2/3): 81-85.
[23] KALE R B, LOKHANDE C D. Systematic study on structural phase behavior of CdSe thin films [J]. The Journal of Physical Chemistry B, 2005, 109(43): 20288-20294.
[24] MAKORI N E, AMATALO I A, KARIMI P M, et al. Optical and electrical properties of CdO:Sn thin films for solar cell applications [J]. International Journal Optoelectronic Engineering, 2014, 4(1): 11-15.

(上接第 194 页)

在条件(H_3)中取 $l(t)=t$. 由于 $t\in[1,e]$，因此有 $\frac{t}{1+t}<t$，$\left|\frac{t}{1+t}\sin u\right|<t\,|\sin u|$. 由此可知条件($H_3$)成立，且 $f(t,u(t))$ 满足条件(H_1)和条件(H_3). 利用 $\frac{\Gamma(\alpha)}{\Delta(e-1)}\approx 8$ 对式(15)进行求解可得 $\frac{\Delta(e-1)}{\Gamma(\alpha)}\|l\|<1$. 由此再根据定理 3 可知，边值问题(16)至少存在一个解.

参考文献：

[1] MA Q H, MA C, WANG J U. A Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation with Hadamard derivative[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2017, 11(1): 135-141.
[2] LAADJAL Z, ADJEROUD N, MA Q. Lyapunov-type inequality for the Hadamard fractional boundary value problem on a general interval [a, b][J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2019, 13(3): 789-799.
[3] 武杰慧，马德香. 一类分数阶微分方程边值问题的 Lyapunov 不等式及其正解的存在性[J]. 汕头大学学报(自然科学版)，2022，37(2)：26-33.
[4] 张丽平. 两类混合型分数阶微分方程的边值问题解的存在性研究[D]. 昆明：云南师范大学，2022.
[5] 郑春华，宁艳艳. 一类分数阶 Laplacian 方程边值问题解的存在性与唯一性[J]. 云南民族大学学报(自然科学版)，2014，23(6)：429-433.
[6] 杨海鹏. Banach 压缩映射原理的应用[J]. 湖南工程学院学报(自然科学版)，2018，28(1)：53-56.
[7] 甘亦苗，侯成敏. 一类 Hadamard 型分数阶微分方程解的存在唯一性[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2021，47(2)：95-100.
[8] 武杰慧. 两类分数阶微分方程边值问题的 Lyapunov 不等式研究[D]. 北京：华北电力大学，2022.
[9] FERREIRA R A C. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013, 16(4): 978-984.
[10] O'REGAN D, SAMET B. Lyapunov-type inequalities for a class of fractional differential equations[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 247(1): 1-10.