

文章编号: 1004-4353(2023)01-0070-07

# 扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法在求解 Chen-Lee-Liu 方程精确解中的应用

赵雁楠

(山西工商学院 计算机信息工程学院, 太原 030000)

**摘要:** 利用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法研究了 Chen-Lee-Liu 方程的精确解, 所得解包括该方程的系列周期解和孤子解. 特别地, 当  $m \rightarrow 1$  和  $m \rightarrow 0$  时, 得到了该方程的三角函数解和双曲函数解的精确表达式. 绘制了该方程的三角函数解和双曲函数解的孤波图. 其二维图像显示, 孤立波的振幅不随时间的变化而发生变化, 但其空间位置发生变化.

**关键词:** Jacobi 椭圆函数展开法; Chen-Lee-Liu 方程; 周期解; 精确解

**中图分类号:** O175.29

**文献标识码:** A

## The application of the extended Jacobi elliptic function expansion method to the exact solution of Chen-Lee-Liu equation

ZHAO Yannan

(College of Computer and Information Engineering, Shanxi Technology and Business College,  
Taiyuan 030000, China)

**Abstract:** The exact solution of Chen-Lee-Liu equation is studied by using the extended Jacobi elliptic function expansion method. The obtained solutions include the series periodic solutions and soliton solutions of the equation. In particular, the exact expressions of trigonometric and hyperbolic solutions of Chen-Lee-Liu equation are obtained as  $m \rightarrow 1$  and  $m \rightarrow 0$ . The characteristics of the obtained solutions are visualized graphically. From the two-dimensional graphs, the amplitude of the soliton wave does not change over time, but their spatial position shifts.

**Keywords:** Jacobi elliptic function expansion method; Chen-Lee-Liu equation; periodic solution; exact solution

### 0 引言

由于非线性发展方程可用来描述自然界的许多复杂现象, 因此近年来许多学者对求解其精确解进行了研究. 目前, 求解非线性发展方程精确解的方法主要有齐次平衡法<sup>[1]</sup>、双曲函数法<sup>[2]</sup>、反散射方法<sup>[3]</sup>、sine-cosine 方法<sup>[4]</sup>、Backlund 方法<sup>[5]</sup>、Darboux 变换法<sup>[6]</sup>、Jacobi 椭圆函数展开法和扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法<sup>[7-11]</sup>等.

Chen-Lee-Liu(CLL)方程(方程(1))又被称作 DNLSE-II 方程, 它可用于描述光脉冲在介质中的

收稿日期: 2023-01-06

基金项目: 山西省教育科学“十四五”规划课题(GH-21253); 山西省高等学校科技创新项目(2020L0738); 山西工商学院校级科研课题(202257)

作者简介: 赵雁楠(1986—), 女, 硕士, 讲师, 研究方向为孤子理论及其应用.

传播现象. 近年来, 许多学者对 CLL 方程进行了求解. 例如: 文献[12]的作者通过 F 展开法得到了方程(1)的包络孤立波解和包络正弦波解; 文献[13]的作者通过扩展的 tanh 展开法得到了方程(1)的多种光孤子解, 如暗孤子解、奇异孤子解、暗奇异孤子解、奇异周期波解等; 文献[14]的作者利用奇数阶 Darboux 变换法得到了方程(1)的精确周期波解和怪波解; 文献[15]的作者利用 Jacobi 椭圆函数展开法获得了方程(1)的一些新的孤立波解; 文献[16]的作者利用扩展的直接代数法得到了方程(1)的一些新解, 如暗、亮、组合暗-亮、组合亮奇异和周期奇异孤子解等. 为了获得更多的 CLL 方程的精确解, 本文将利用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法研究 CLL 方程的精确解.

$$iq_t + \alpha q_{xx} + i\beta q q^* q_x = 0. \quad (1)$$

其中:  $q(x, t)$  为光孤子的分布函数,  $q^*$  为  $q(x, t)$  的共轭函数,  $\alpha$  为群速度的色散系数,  $\beta$  为非线性系数, 且  $\alpha$  和  $\beta$  均为实常数.

## 1 扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法

扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法的一般计算步骤为:

第 1 步 将非线性偏微分方程转化为非线性常微分方程, 即将 PDE 化为 ODE. 考虑如下非线性偏微分方程 PDE:

$$F(\varphi, \varphi^2, \varphi_x, \varphi_t, \varphi_{xx}, \dots) = 0. \quad (2)$$

为构造方程(2)的 Jacobi 椭圆函数解的形式, 本文引入如下变换:

$$\varphi(x, t) = \Phi(\xi), \quad \xi = ax - ct. \quad (3)$$

将式(3)代入方程(2)可得非线性常微分方程 ODE 为:

$$L(\Phi(\xi), \Phi^2(\xi), \Phi'(\xi), \Phi''(\xi), \dots) = 0, \quad (4)$$

其中  $a$  和  $c$  为实常数.

第 2 步 设定解的形式. 假设方程(4)的解可展开为 Jacobi 椭圆函数的有限级, 即:

$$\Phi(\xi) = \sum_{j=-M}^M b_j Y^j(\xi). \quad (5)$$

其中:  $Y(\xi)$  有 3 种情况, 分别为  $Y(\xi) = sn(\xi, m)$ ,  $Y(\xi) = cn(\xi, m)$ ,  $Y(\xi) = dn(\xi, m)$  ( $0 < m < 1$ );  $M$  和  $b_j$  ( $j = -M, \dots, M$ ) 为待定参数.

第 3 步 确定  $M$  值. 利用方程(4)中非线性项的最高阶数和导数项的最高阶数来求得  $M$  值. 非线性项和导数项的最高阶数为:

$$O(\Phi) = M, \quad O(\Phi^r) = rM, \quad O\left(\frac{d^s \Phi}{d\xi^s}\right) = M + s, \quad O\left(\Phi^r \frac{d^s \Phi}{d\xi^s}\right) = (r+1)M + s. \quad (6)$$

第 4 步 求解待定系数  $b_j$  ( $j = -M, \dots, M$ ). 将式(5)代入方程(4)可得关于 Jacobi 椭圆函数  $Y(\xi)$  的方程. 化简该方程后令  $Y(\xi)$  的各次幂系数为零可得到一个关于  $b_j$  ( $j = -M, \dots, M$ ) 的方程组, 由此再借助 Mathematica 软件求解该方程组即可求得  $b_j$  ( $j = -M, \dots, M$ ) 值.

第 5 步 确定方程(1)的周期解. 将在第 4 步中求得的  $b_j$  ( $j = -M, \dots, M$ ) 代入式(5)即可求得方程(1)的新周期解.

**注记 1** 为了便于应用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法, 本文给出如下 3 种关系式<sup>[17]</sup>:

1) 恒等形式:  $sn^2(\xi, m) + cn^2(\xi, m) = 1$ ,  $dn^2(\xi, m) + m^2 sn^2(\xi, m) = 1$ ,  $m^2 cn^2(\xi, m) + 1 - m^2 = dn^2(\xi, m)$ ,  $cn^2(\xi, m) + (1 - m^2) sn^2(\xi, m) = dn^2(\xi, m)$ .

2) 导数形式:  $sn'(\xi, m) = cn(\xi, m) dn(\xi, m)$ ,  $cn'(\xi, m) = -sn(\xi, m) dn(\xi, m)$ ,  $dn'(\xi, m) = -m^2 sn(\xi, m) cn(\xi, m)$ .

3) 极限形式:  $m \rightarrow 1$ ,  $sn(\xi, m) \rightarrow \tanh \xi$ ,  $cn(\xi, m) \rightarrow \text{sech } \xi$ ,  $dn(\xi, m) \rightarrow \text{sech } \xi$ ;  $m \rightarrow 0$ ,  $sn(\xi,$

$m) \rightarrow \sin \xi, cn(\xi, m) \rightarrow \cos \xi, dn(\xi, m) \rightarrow 1.$

## 2 扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法在 CLL 方程中的应用

假定方程(1) 解的形式为:

$$q(x, t) = Q(\xi) e^{i\phi}, \quad \xi = \mu(x - ct), \quad \phi = ax - \omega t, \quad (7)$$

其中  $\mu, c, a, \omega$  为实常数. 将式(7) 代入方程(1) 可得:

$$\begin{cases} i q_t = (-ic\mu Q' + \omega Q) e^{i\phi}, \\ \alpha q_{xx} = \alpha(\mu^2 Q'' + 2ia\mu Q' - a^2 Q) e^{i\phi}, \\ i\beta q q^* q_x = \beta(i\mu Q^2 Q' - a Q^3) e^{i\phi}. \end{cases}$$

由上式可得 ODE 的实数和虚数部分分别为:

$$\alpha\mu^2 Q'' + (\omega - \alpha a^2)Q - \beta a Q^3 = 0, \quad (8)$$

$$(c - 2\alpha a - \beta Q^2)\mu Q' = 0, \quad (9)$$

其中“'”表示  $Q$  对  $\xi$  的导数.

根据齐次平衡法<sup>[17]</sup> 平衡式(8) 中的  $Q''$  和  $Q^3$  可得 Jacobi 椭圆函数的有限级数  $M=1$ , 于是方程(1) 的解可设为:

$$Q(\xi) = b_{-1} Y^{-1}(\xi) + b_0 + b_1 Y(\xi). \quad (10)$$

将式(10) 代入方程(8) 可得关于 Jacobi 椭圆函数  $Y(\xi)$  的方程, 再利用注记 1 化简该方程后令  $Y(\xi)$  的各次幂系数为零可得到一个关于  $b_j (j = -1, 0, 1)$  的方程组, 由此再借助 Mathematica 软件求解该方程组即可求得  $b_j (j = -1, 0, 1)$  值.

### 2.1 CLL 方程的周期波解

情形 1 当取  $Y(\xi) = sn(\xi, m)$  时, 借助 Mathematica 软件可得到式(7)、(10) 中  $b_{-1}, b_0, b_1, \omega$  的值:

$$1) b_{-1} = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \mp \frac{\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, \quad \omega = \alpha(a^2 + \mu^2 + 6m\mu^2 + m^2\mu^2). \text{ 将上述值代入方}$$

程(10) 可得 CLL 方程的周期解为:

$$\begin{aligned} q(x, t) = & \left\{ \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} sn^{-1}[\mu(x - ct)] \mp \frac{\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} sn[\mu(x - ct)] \right\} \times \\ & \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 + 6m\mu^2 + m^2\mu^2)t)]. \end{aligned} \quad (11)$$

$$2) b_{-1} = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \pm \frac{\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, \quad \omega = \alpha(a^2 + \mu^2 - 6m\mu^2 + m^2\mu^2). \text{ 将上述值代入方}$$

程(10) 可得 CLL 方程的周期解为:

$$\begin{aligned} q(x, t) = & \left\{ \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} sn^{-1}[\mu(x - ct)] \pm \frac{\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} sn[\mu(x - ct)] \right\} \times \\ & \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 - 6m\mu^2 + m^2\mu^2)t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

$$3) b_{-1} = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad \omega = \alpha(a^2 + \mu^2 + m^2\mu^2). \text{ 将上述值代入方程(10) 可得 CLL 方}$$

程的周期解为:

$$q(x, t) = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} sn^{-1}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 + m^2\mu^2)t)]. \quad (13)$$

$$4) b_{-1} = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \mp \frac{\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, \quad \omega = \alpha(a^2 + \mu^2 + m^2\mu^2). \text{ 将上述值代入方程(10) 可得 CLL}$$

方程的周期解为:

$$q(x, t) = \mp \frac{\sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} \operatorname{sn}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 + m^2 \mu^2)t)]. \quad (14)$$

情形 2 当取  $Y(\xi) = cn(\xi, m)$  时, 借助 Mathematica 软件可得到式(7)、(10)中  $b_{-1}, b_0, b_1, w$  的值:

$$1) b_{-1} = \mp \frac{i \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{2} \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, b_0 = 0, b_1 = \mp \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, w = \alpha(a^2 + \mu^2 - 6m \sqrt{-1 + m^2} \mu^2 -$$

$2m^2 \mu^2$ ). 将上述值代入方程(10) 可得 CLL 方程的周期解为:

$$q(x, t) = \{ \mp \frac{i \sqrt{2} \mu \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} cn^{-1}[\mu(x - ct)] \mp \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} cn[\mu(x - ct)] \} \times \\ \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 - 6m \mu^2 \sqrt{-1 + m^2} - 2m^2 \mu^2)t)]. \quad (15)$$

$$2) b_{-1} = \mp \frac{i \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{2} \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, b_0 = 0, b_1 = \pm \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, w = \alpha(a^2 + \mu^2 + 6m \sqrt{-1 + m^2} \mu^2 -$$

$2m^2 \mu^2$ ). 将上述值代入方程(10) 可得 CLL 方程的周期解为:

$$q(x, t) = \{ \mp \frac{i \sqrt{2} \mu \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} cn^{-1}[\mu(x - ct)] \pm \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} cn[\mu(x - ct)] \} \times \\ \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 + 6m \mu^2 \sqrt{-1 + m^2} - 2m^2 \mu^2)t)]. \quad (16)$$

$$3) b_{-1} = \mp \frac{i \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{2} \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, b_0 = 0, b_1 = 0, w = \alpha(a^2 + \mu^2 - 2m^2 \mu^2). \text{ 将上述值代入方程(10)}$$

可得 CLL 方程的周期解为:

$$q(x, t) = \mp \frac{i \sqrt{2} \mu \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} cn^{-1}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 - 2m^2 \mu^2)t)]. \quad (17)$$

$$4) b_{-1} = 0, b_0 = 0, b_1 = \mp \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, w = \alpha(a^2 + \mu^2 - 2m^2 \mu^2). \text{ 将上述值代入方程(10) 可得 CLL}$$

方程的周期解为:

$$q(x, t) = \mp \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} cn[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2 - 2m^2 \mu^2)t)]. \quad (18)$$

情形 3 当取  $Y(\xi) = dn(\xi, m)$  时, 借助 Mathematica 软件可得到式(7)、(10)中  $b_{-1}, b_0, b_1, w$  的值:

$$1) b_{-1} = \mp \frac{\sqrt{-1 + m^2} \sqrt{2} \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, b_0 = 0, b_1 = \mp \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, w = \alpha(a^2 - 2\mu^2 + 6i \sqrt{-1 + m^2} \mu^2 +$$

$m^2 \mu^2$ ). 将上述值代入方程(10) 可得 CLL 方程的周期解为:

$$q(x, t) = \{ \mp \frac{\sqrt{2} \mu \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} dn^{-1}[\mu(x - ct)] \mp \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} dn[\mu(x - ct)] \} \times \\ \exp[i(ax - \alpha(a^2 - 2\mu^2 + 6i \mu^2 \sqrt{-1 + m^2} + m^2 \mu^2)t)]. \quad (19)$$

$$2) b_{-1} = \mp \frac{\sqrt{-1 + m^2} \sqrt{2} \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, b_0 = 0, b_1 = \pm \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}}, w = \alpha(a^2 - 2\mu^2 - 6i \sqrt{-1 + m^2} \mu^2 +$$

$m^2 \mu^2$ ). 将上述值代入方程(10) 可得 CLL 方程的周期解为:

$$q(x, t) = \{ \mp \frac{\sqrt{2} \mu \sqrt{-1 + m^2} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} dn^{-1}[\mu(x - ct)] \pm \frac{i \sqrt{2} m \mu \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\beta}} dn[\mu(x - ct)] \} \times$$

$$\exp[i(ax - \alpha(a^2 - 2\mu^2 - 6i\mu^2\sqrt{-1+m^2} + m^2\mu^2)t)]. \quad (20)$$

$$3) b_{-1} = \mp \frac{\sqrt{-1+m^2}\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, b_0 = 0, b_1 = 0, w = \alpha(a^2 - 2\mu^2 + m^2\mu^2). \text{ 将上述值代入方程(10)}$$

可得 CLL 方程的周期解为:

$$q(x, t) = \mp \frac{i\sqrt{2}\mu\sqrt{-1+m^2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} dn^{-1}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 - 2\mu^2 + m^2\mu^2)t)]. \quad (21)$$

$$4) b_{-1} = 0, b_0 = 0, b_1 = \mp \frac{i\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}}, w = \alpha(a^2 - 2\mu^2 + m^2\mu^2). \text{ 将上述值代入方程(10) 可得 CLL}$$

方程的周期解为:

$$q(x, t) = \mp \frac{i\sqrt{2}m\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} dn[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 - 2\mu^2 + m^2\mu^2)t)]. \quad (22)$$

## 2.2 周期波解的退化形式

1) 当  $m \rightarrow 1$  时, 由 Jacobi 椭圆函数的定义可知  $sn(\xi, m) \rightarrow \tanh \xi$ ,  $cn(\xi, m) \rightarrow \operatorname{sech} \xi$ ,  $dn(\xi, m) \rightarrow \operatorname{sech} \xi$ , 且有如下情形:

情形 1 当  $sn(\xi, m) \rightarrow \tanh \xi$  时, 方程(11)、(12)、(13)、(14) 可化简为如下形式:

$$q(x, t) = \{\mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \tanh^{-1}[\mu(x - ct)] \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \tanh[\mu(x - ct)]\} \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + 8\mu^2)t)]. \quad (23)$$

$$q(x, t) = \{\mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \tanh^{-1}[\mu(x - ct)] \pm \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \tanh[\mu(x - ct)]\} \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 - 4\mu^2)t)]. \quad (24)$$

$$q(x, t) = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \tanh^{-1}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + 2\mu^2)t)]. \quad (25)$$

$$q(x, t) = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \tanh[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + 2\mu^2)t)]. \quad (26)$$

情形 2 当  $cn(\xi, m) \rightarrow \operatorname{sech} \xi$  时, 方程(15)、(16)、(18) 可化简为如下形式:

$$q(x, t) = \mp \frac{i\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \operatorname{sech}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 - \mu^2)t)]. \quad (27)$$

情形 3 当  $dn(\xi, m) \rightarrow \operatorname{sech} \xi$  时, 方程(19)、(20)、(22) 可化简为如下形式:

$$q(x, t) = \mp \frac{i\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \operatorname{sech}[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 - \mu^2)t)]. \quad (28)$$

2) 当  $m \rightarrow 0$  时, 由 Jacobi 椭圆函数的定义可知  $sn(\xi, m) \rightarrow \sin \xi$ ,  $cn(\xi, m) \rightarrow \cos \xi$ , 且有如下情形:

情形 1 当  $sn(\xi, m) \rightarrow \sin \xi$  时, 方程(11)、(12)、(13) 可化简为如下形式:

$$q(x, t) = \mp \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \csc[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2)t)]. \quad (29)$$

情形 2 当  $cn(\xi, m) \rightarrow \cos \xi$  时, 方程(15)、(16)、(17) 可化简为如下形式:

$$q(x, t) = \pm \frac{\sqrt{2}\mu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\beta}} \sec[\mu(x - ct)] \times \exp[i(ax - \alpha(a^2 + \mu^2)t)]. \quad (30)$$

为了更加直观地描述 CLL 方程的孤波解, 本文通过选取特定的参数给出了 CLL 方程解(26)、(27)、

(29)、(30) 的孤波图, 如图 1—图 4 所示. 从图 1 和图 2 中的 3D 图可以看出, 当取相同的参数和退化形式 ( $\alpha=2, \beta=2, a=2, c=0.1, \mu=1$ ), 而  $Y(\xi)$  取不同的函数时, CLL 方程的孤波方向发生了改变; 从图 2 和图 3 中的 3D 图可以看出, 当取相同的参数 ( $\alpha=2, \beta=2, a=2, c=0.1, \mu=1$ ), 而取不同的退化形式和  $Y(\xi)$  函数时, CLL 方程的孤波形状发生了显著变化. 从图 1—图 4 中的 2D 图可以看出, 孤立波的振幅不随时间的变化而发生变化, 但其空间位置发生了变化. 这表明光孤子在传播中不随时间而改变其形状、大小和方向, 即其具有很好的稳定性.

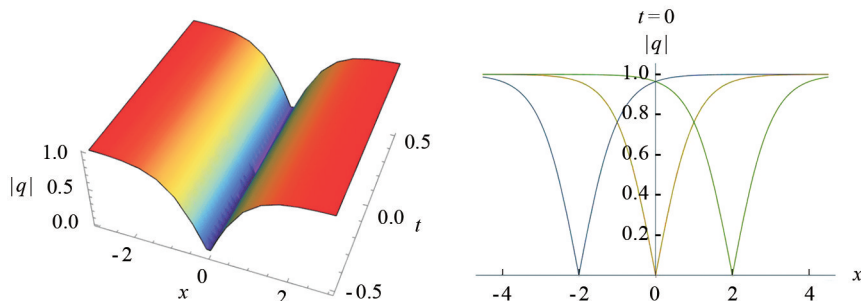


图 1 式(26)的 3D 和 2D 孤波图 ( $\alpha=2, \beta=2, a=2, c=0.1, \mu=1, m=1$ )

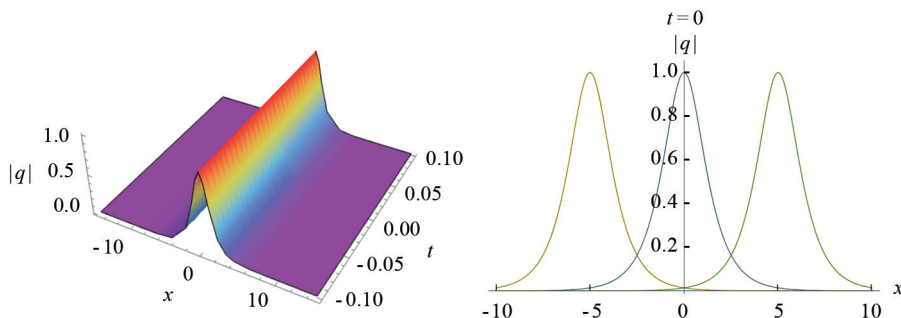


图 2 式(27)的 3D 和 2D 孤波图 ( $\alpha=2, \beta=2, a=2, c=0.1, \mu=1, m=1$ )

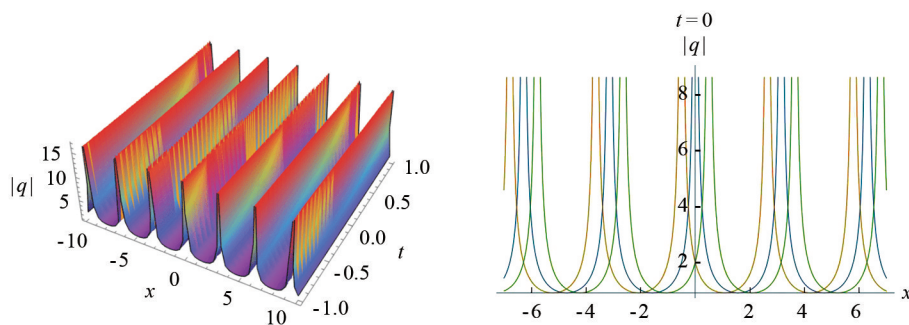


图 3 式(29)的 3D 和 2D 孤波图 ( $\alpha=2, \beta=2, a=2, c=0.1, \mu=1, m=0$ )

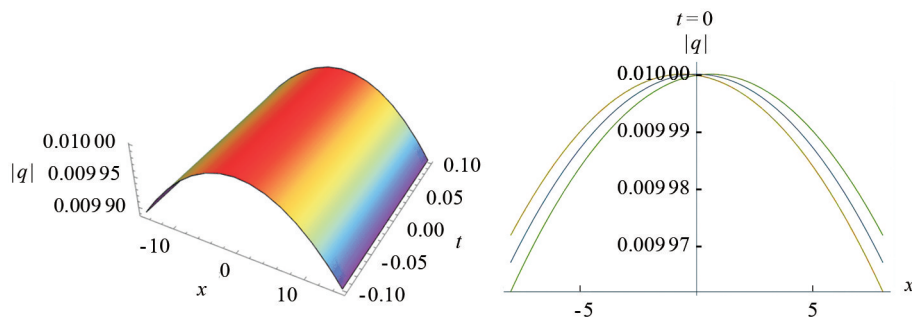


图 4 式(30)的 3D 和 2D 孤波图 ( $\alpha=2, \beta=1, a=4, c=0.6, \mu=0.01, m=0$ )

**参考文献:**

- [1] WANG M L, ZHOU Y B, LI Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. *Phys Lett A*, 1996, 216(1/5): 67-75.
- [2] 张桂成, 李志斌, 段一士. 非线性方程的精确孤立波解[J]. *中国科学*, 2000, 30(12): 1103-1108.
- [3] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.
- [4] YAN C T. A simple transformation for nonlinear waves[J]. *Phys Lett A*, 1996, 224(1/2): 77-84.
- [5] 谷超豪. 孤立子理论及其应用[M]. 浙江: 浙江科技出版社, 1990.
- [6] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子中的 Darboux 变换及其几何应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1999.
- [7] 刘式适, 傅遵涛, 刘式达. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用[J]. *物理学报*, 2001, 50(11): 2068-2073.
- [8] 翁建平. 用 Jacobi 椭圆函数求非线性方程的解析解[J]. *安徽大学学报(自然科学版)*, 2005, 29(5): 39-42.
- [9] 肖亚峰, 薛海丽, 张鸿庆. 一类非线性发展方程的改进的 Jacobi 椭圆函数精确解[J]. *中北大学学报(自然科学版)*, 2012, 33(2): 93-97.
- [10] 赵贞, 庞晶. 基于改进的 Jacobi 椭圆函数展开法构造 STO 方程的解[J]. *内蒙古工业大学学报(自然科学版)*, 2021, 40(3): 168-174.
- [11] ZHAO Y N, WANG N. The exact solutions of Fokas-Lenells equation based on Jacobi elliptic function expansion method[J]. *Boundary Value Problems*, 2022, 2022: 93.
- [12] 李向正, 张金良. Chen-Lee-Liu 方程的精确解[J]. *兰州理工大学学报*, 2008, 34(2): 151-154.
- [13] OZDEMIR N, ESEN H, SECER A, et al. Optical soliton solutions to Chen-Lee-Liu model by the modified extended tanh expansion scheme[J]. *Optik*, 2021, 245: 167643.
- [14] PENG W Q, PU J C, CHEN Y. PINN deep learning for the Chen-Lee-Liu equation: Rogue wave on the periodic background[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2022, 105: 106067.
- [15] TARLA S, ALI K K, YILMAZER R, et al. New optical solitons based on the perturbed Chen-Lee-Liu model through Jacobi elliptic function method[J]. *Optical and Quantum Electronics*, 2022, 54: 131.
- [16] REHMAN H U, BIBI M, SALEEM M S, et al. New optical soliton solutions of the Chen-Lee-Liu equation[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2021, 35(18): 2150184.
- [17] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.