

文章编号: 1004-4353(2023)01-0061-09

概率犹豫模糊集的再定义及其 在群决策中的应用

朱国成

(广东创新科技职业学院 人文教育学院, 广东 东莞 523960)

摘要: 为了更好地解决概率犹豫模糊集多属性群决策问题,构建了一种在不同维度下比较各方案综合属性值大小的决策模型.首先,以二维坐标形式给出概率犹豫模糊集(PHFS)中的隶属度和概率,并在此基础上建立概率犹豫模糊元(PHFE)的二维几何距离模型和二维离差程度系数模型;其次,对 PHFS 中的隶属度赋予相应的评审专家权重,并用三维坐标刻画隶属度、概率和评审专家权重,以此建立 PHFE 的三维几何距离模型和三维离差程度系数模型;再次,在二维与三维条件下分别计算 2 种维度下 PHFE 的综合值,并利用 Maclaurin 对称平均算子对以上 2 种维度下各个 PHFE 的综合值进行集结并排序;最后,利用实例对在 2 种维度下建立的算法进行了验证分析.结果显示所建立的算法均可对各方案进行有效地排序,但由于在三维视角下建立的决策模型能够反映评审专家的偏好问题,因此该模型的决策效果相对更好.

关键词: 概率犹豫模糊集; 几何距离模型; 离差程度系数模型; Maclaurin 对称平均算子; 多属性决策问题

中图分类号: O159

文献标识码: A

Redefinition of probabilistic hesitant fuzzy sets and its application in group decision making

ZHU Guocheng

(School of Humanities Education, Guangdong Innovative Technical College, Dongguan 523960, China)

Abstract: In order to solve the multi-attribute group decision making problem of the probabilistic hesitant fuzzy sets, a decision model is constructed to compare the comprehensive attribute value of each scheme under different dimensions. Firstly, the membership degree and probability of the probabilistic hesitant fuzzy sets are written in the form of two-dimensional coordinates, and on this basis, the two-dimensional geometric distance model and the two-dimensional deviation degree coefficient model of the probabilistic hesitant fuzzy elements are established. Secondly, the membership degree of the probabilistic hesitant fuzzy sets is assigned to the corresponding weight of the evaluation experts, and the membership degree, probability and the assigned weight of the evaluation experts are described by three-dimensional coordinates, accordingly establish the three-dimensional geometric distance model and the three-dimensional deviation degree coefficient model of the probabilistic hesitant fuzzy elements. Thirdly, the comprehensive values of the probabilistic hesitant fuzzy elements under two dimensions and three dimensions were calculated respectively, and the Maclaurin symmetric average operator is used to aggregate and rank the comprehensive values of the probabilistic hesitant fuzzy elements under the above two dimensions. Finally, an example is used to in the two dimensional analysis of the algorithm are verified. The results show that the algorithm in two dimensions can be effective scheme of the

收稿日期: 2021-12-05

基金项目: 广东创新科技职业学院特色创新类重点资助项目(2022TSZD05)

作者简介: 朱国成(1986—),男,硕士,讲师,研究方向为模糊信息决策与最优化.

sort, but because in a three-dimensional perspective to establish a decision-making model could reflect the preference of evaluation experts, the decision-making effect of the model is relatively better.

Keywords: probabilistic hesitant fuzzy set; geometric distance model; deviation degree coefficient model; Maclaurin symmetric averaging operator; multi-attribute group decision making problem

0 引言

由于概率犹豫模糊集(probabilistic hesitant fuzzy sets, PHFS)^[1]能够更加细致地刻画决策者的心理偏好,因此近年来受到许多国内外学者的关注.例如:文献[2]和[3]的作者分别给出了 PHFS 中的元素(概率犹豫模糊元, probabilistic hesitant fuzzy elements, PHFE)运算法则和相似性测度,并对 PHFS 的相关理论进行了初步研究;文献[4]的作者研究了一种概率犹豫模糊偏好问题,并以 MAGDM 问题为例做了验证分析;文献[5]的作者针对概率犹豫模糊集多属性群决策(PHFS MAGDM)问题中的属性重要性程度具有不确定的情形,提出了一种基于累积前景理论的决策算法;文献[6]的作者给出了一种确定专家权重和计算属性权重(利用概率犹豫模糊熵)的决策方法;文献[7]的作者基于加权的 Maclaurin 几何对称平均算子的集结属性信息构建了一种新的 MAGDM 算法.但到目前为止,在 PHFS MAGDM 问题的研究中仍存在以下 3 个问题:①在研究 PHFE 的测度问题时,通常做法是将隶属度及其对应的概率(2 个不同维度的信息数据)直接相乘^[8],由此易使方案的综合决策信息失真;②随着 PHFE 中的元素(概率犹豫模糊数, probabilistic hesitant fuzzy numbers, PHFN)数量的增加,概率信息数据的运算结果会快速趋向于 0;③在计算 PHFE 的综合值时,由于所有决策者的权重被默认为是相同的,所以容易造成决策结果与事实不符.对此,本文从维度的角度出发建立了一个能够比较各个方案综合属性值大小的决策模型,并通过具体案例验证了该决策模型的可行性.

1 预备知识

1.1 二维视域下 PHFS 的再定义及其相关理论

定义 1^[8] 记 X 为非空集合,二元组 $H = \{\langle x, h_x(p_x) \rangle \mid x \in X\}$ 是集合 X 上的 PHFS, $h(p) = h_x(p_x) = \{\gamma_l(p_l), l = 1, 2, \dots, |h(p)|, \sum_{l=1}^{|h(p)|} p_l = 1\}$ 是 PHFE. PHFE $h(p)$ 中的 γ_l 为元素 x 属于集合 H 的隶属度, p_l 为隶属度 γ_l 的发生概率, $|h(p)|$ 为 PHFE $h(p)$ 中的元素个数.

定义 2^[8] 称 $s(h_x(p_x)) = \sum_{l=1}^{|h(p)|} \gamma_l \cdot p_l$ 是 PHFE $h_x(p_x)$ 的得分函数,称 $D(h_x(p_x)) = \sum_{l=1}^{|h(p)|} (\gamma_l - s(h_x(p_x)))^2 \cdot p_l$ 是 PHFE $h_x(p_x)$ 的方差.定义判断 2 个 PHFE $h_1(p_x)$ 与 $h_2(p_x)$ 的大小准则为:

- 1) 若 $s(h_1(p_x)) < s(h_2(p_x))$, $\Rightarrow h_1(p_x) < h_2(p_x)$;
- 2) 若 $s(h_1(p_x)) > s(h_2(p_x))$, $\Rightarrow h_1(p_x) > h_2(p_x)$;
- 3) 若 $s(h_1(p_x)) = s(h_2(p_x))$, 则有: ① $D(h_1(p_x)) > D(h_2(p_x))$, $\Rightarrow h_1(p_x) < h_2(p_x)$;
② $D(h_1(p_x)) < D(h_2(p_x))$, $\Rightarrow h_1(p_x) > h_2(p_x)$; ③ $D(h_1(p_x)) = D(h_2(p_x))$, $\Rightarrow h_1(p_x) \sim h_2(p_x)$.

为了能够以二维变量的形式给出 PHFN 的隶属度 γ_l 和与之相对应的概率 p_l , 本文在此按点坐标的形式对其进行描述. 另外, 本文中考虑的概率信息是全概率信息, 即 PHFE 的概率之和为 1.

定义 3 定义集合 H 为 PHFS, 其元素 PHFE $h(p) = \{(\gamma_l, p_l) \mid l = 1, 2, \dots, |h(p)|, \sum_{l=1}^{|h(p)|} p_l = 1\}$.

定义 4 定义集合 H 中的元素 PHFE $h(p)$ 的二维几何距离 $e = e(h(p))$, 其计算方法为:

$$e(h(p)) = \sum_{l=1}^{|h(p)|} \frac{\min\{\gamma_l, p_l\} \sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2} + \sqrt{(\gamma_l - 1)^2 + (p_l - 1)^2}}. \quad (1)$$

由式(1)易知, PHFE 的二维几何距离 $e = e(h(p))$ 是关于隶属度 γ_l 和概率 p_l 单调递增的, 且 PHFN 的最终结果可根据 $\min\{\gamma_l, p_l\}$ 中的值进行度量. $e = e(h(p))$ 的单调性说明, PHFE $h(p)$ 值随着 PHFN(γ_l, p_l) 值的增大而增大. 这与定义 2 中 PHFE 的得分函数类似, 因此可以用式(1)近似表示 PHFE 的综合值.

性质 1 PHFE $h(p)$ 的二维几何距离 $e(h(p))$ 的取值范围为 $e(h(p)) \in [0, 1]$.

证明 ① 当 $h(p) = \{(0, 1), (1, 0)\}$ 时, $e(h(p)) = 0$; ② 当 $h(p) = \{(1, 1)\}$ 时, $e(h(p)) = 1$; ③

当 $h(p) = \{(\gamma_l, p_l) \mid l = 1, 2, \dots, |h(p)|, 0 < \gamma_l < 1, \sum_{l=1}^{|h(p)|} p_l = 1\}$ 时, $e(h(p)) \in (0, 1)$. 因为 $0 <$

$$\frac{\sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2} + \sqrt{(\gamma_l - 1)^2 + (p_l - 1)^2}} < 1, 0 < \frac{\min\{\gamma_l, p_l\} \sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2} + \sqrt{(\gamma_l - 1)^2 + (p_l - 1)^2}} < \min\{\gamma_l, p_l\},$$

$$\text{所以 } 0 < \sum_{l=1}^{|h(p)|} \frac{\min(\gamma_l, p_l) \sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2}}{\sqrt{\gamma_l^2 + p_l^2} + \sqrt{(\gamma_l - 1)^2 + (p_l - 1)^2}} < \min\left\{\sum_{l=1}^{|h(p)|} \gamma_l, \sum_{l=1}^{|h(p)|} p_l\right\} = \min\left\{\sum_{l=1}^{|h(p)|} \gamma_l, 1\right\}, \text{ 即 } e =$$

$e(h(p)) \in (0, 1)$. 于是由 ① 和 ② 可知 $e(h(p)) \in [0, 1]$, 证毕.

定义 5 根据定义 3, 将 PHFE $h(p)$ 内部元素的二维离差程度系数($d = d(h(p))$) 定义为:

$$d(h(p)) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{|h(p)|} \sum_{l'=1}^{|h(p)|} \sqrt{(\gamma_l - \gamma_{l'})^2 + (p_l - p_{l'})^2}. \quad (2)$$

由定义 2 可知, 影响 PHFE $h(p)$ 值的因素为隶属度 γ_l 和与其对应的概率 p_l . 由此进一步可知: 利用定义 2 的规则比较 2 个 PHFE 的大小时, 由 PHFE 的综合值(得分函数)即可确定其大小; 当 2 个 PHFE 的综合值相等时, 可通过其内部元素的离差程度(方差)决定其大小. 当 PHFN 以二维坐标的形式给出时, 则定义 2 中的比较规则不再适用, 需采用新的方法进行测度比较; 为此, 依据定义 2—5 给出定义 6.

定义 6 定义 $e(h_1(p))$ 和 $e(h_2(p))$ 分别为 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的二维几何距离, $d(h_1(p))$ 和 $d(h_2(p))$ 分别为 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的二维离差程度系数, 定义判断 2 个 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 大小的准则为:

- 1) 若 $e(h_1(p)) > e(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) > h_2(p)$;
- 2) 若 $e(h_1(p)) < e(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) < h_2(p)$;
- 3) 若 $e(h_1(p)) = e(h_2(p))$, 则有: ① $d(h_1(p)) > d(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) < h_2(p)$; ② $d(h_1(p)) < d(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) > h_2(p)$; ③ $d(h_1(p)) = d(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) \sim h_2(p)$.

定义 7 在定义 3 的基础上, 将计算 PHFE $h(p)$ 加权综合值的方法定义为:

$$h(p)^\omega = \tilde{h}(p) = [e(h(p))]^\omega \cdot \{1 - [d(h(p))]^\omega\}, \quad (3)$$

其中 ω 为 PHFE $h(p)$ 对应的权重.

定义 8 在 MAGDM 问题中, 设: 决策的方案集为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_M\}$, 属性集为 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_N\}$, 属性权重用 ω_{g_j} 表示(未知), 并默认各决策专家的重要性程度一致. 决策专家组给予第 i 个方案的第 j 个属性的评价数据信息用 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 表示, 并定义 $h_{ij}(p_{ij}) = \{(\gamma_{ij}^{(k)}, p_{ij}^{(k)}) \mid \gamma_{ij}^{(k)} \in [0, 1], \sum_{k=1}^{\#h_{ij}(p_{ij})} p_{ij}^{(k)} \leq 1, k = 1, 2, \dots, \#h_{ij}(p_{ij})\}$, 其中 $\#h_{ij}(p_{ij})$ 为 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 中的元素个数.

根据定义 8, 再结合定义 4、定义 5 和定义 7 有如下扩展定义:

定义 9 在 MAGDM 问题中, 定义 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 的二维几何距离模型为:

$$e(h_{ij}(p_{ij})) = \sum_{k=1}^{\#h_{ij}(p_{ij})} \frac{\min\{\gamma_{ij}^{(k)}, p_{ij}^{(k)}\} \sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)})^2 + (p_{ij}^{(k)})^2}}{\sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)})^2 + (p_{ij}^{(k)})^2} + \sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)} - 1)^2 + (p_{ij}^{(k)} - 1)^2}}. \quad (4)$$

式中: $k = 1, 2, \dots, \#h_{ij}(p_{ij})$; $i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, N$.

定义 10 在 MAGDM 问题中, 定义 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 的二维离差程度系数模型为:

$$d(h_{ij}(p_{ij})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\#h_{ij}(p_{ij})} \sum_{k'=1}^{\#h_{ij}(p_{ij})} \sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k')})^2 + (p_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k')})^2}. \quad (5)$$

式中: $k, k' = 1, 2, \dots, \#h_{ij}(p_{ij})$; $i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, N$.

定义 11 在 MAGDM 问题中, 定义 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 的加权综合值为:

$$\text{PHFE } h_{ij}(p_{ij})^{\omega_{g_j}} = \tilde{h}_{ij}(p_{ij}) = [e(h_{ij}(p_{ij}))]^{\omega_{g_j}} \cdot \{1 - [d(h_{ij}(p_{ij}))]^{\omega_{g_j}}\}. \quad (6)$$

在式(6)中, 若 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 中只有 1 个元素, 则规定 $d(h_{ij}(p_{ij})) = \min_{i'}(d(h_{i'j}(p_{i'j}))) (i' \neq i)$.

由式(6)可知, $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$ 是关于 $e(h_{ij}(p_{ij}))$ 单调递增的, 是关于 $d(h_{ij}(p_{ij}))$ 单调递减的.

1.2 三维点坐标刻画下的 PHFS

本文在定义 3 的基础上考虑 PHFS 中的评审专家权重, 并将隶属度、概率、评审专家权重用三维点坐标的形式表示.

定义 12 定义集合 H 为 PHFS, 其元素 PHFE(考虑隶属度对应的评审专家权重) 为 $H(p) =$

$$\{(\gamma_l, p_l, \omega_l) \mid l = 1, 2, \dots, |H(p)|, \sum_{l=1}^{|H(p)|} p_l = 1, \omega_l = \sum_{t=1}^{|\gamma_l|} \omega_t\}, \text{ 其中 } |\gamma_l| \text{ 为认可隶属度 } \gamma_l \text{ 的专家人数,}$$

$$\sum_{t=1}^{|\gamma_l|} \omega_t \text{ 为认可隶属度 } \gamma_l \text{ 的 } |\gamma_l| \text{ 名评审专家的权重之和.}$$

在 MAGDM 问题中, 三维坐标条件下的 PHFE 的三维几何距离模型、三维离差程度系数模型可类似于定义 9—11 进行定义.

定义 13 在 MAGDM 问题中, 设: 决策专家集为 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_\lambda, \dots, z_T\}$, 其权重用 ω_{z_λ} 表示(已知); 方案集为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_M\}$; 属性集为 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_N\}$, 其属性权重用 ω_{g_j} 表示且未知; 评审专家组给予第 i 个方案的第 j 个属性的评价数据信息用 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 表示(如果在某个属性上的数据信息只有隶属度和认可该隶属度的专家人数, 则采用文献[1]中的方法将属性信息转化为 PHFE 数据信息). 这里定义 PHFE 为:

$$H_{ij}(p_{ij}) = \{(\gamma_{ij}^{(k)}, p_{ij}^{(k)}, \omega_{ij}^{(k)}) \mid \gamma_{ij}^{(k)} \in [0, 1], \sum_{k=1}^{\#H_{ij}(p_{ij})} p_{ij}^{(k)} \leq 1, k = 1, 2, \dots, \#H_{ij}(p_{ij}), \omega_{ij}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{|\gamma_{ij}^{(k)}|} \omega_{z_\lambda}\},$$

其中 $\#H_{ij}(p_{ij})$ 为 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 中元素 PHFN 的个数. 在式子 $\omega_{ij}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{|\gamma_{ij}^{(k)}|} \omega_{z_\lambda}$ 中, $|\gamma_{ij}^{(k)}|$ 为认可隶属

度 $\gamma_{ij}^{(k)}$ 的评审专家人数, $\sum_{\lambda=1}^{|\gamma_{ij}^{(k)}|} \omega_{z_\lambda}$ 为认可隶属度 $\gamma_{ij}^{(k)}$ 的 $|\gamma_{ij}^{(k)}|$ 名评审专家的权重之和.

根据定义 13, 再结合定义 9、定义 10、定义 11 有以下扩展定义:

定义 14 在 MAGDM 问题中, 定义 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 的三维几何距离为:

$$E(H_{ij}(p_{ij})) = \sum_{k=1}^{\#H_{ij}(p_{ij})} \frac{\min\{\gamma_{ij}^{(k)}, p_{ij}^{(k)}, \omega_{ij}^{(k)}\} \sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)})^2 + (p_{ij}^{(k)})^2 + (\omega_{ij}^{(k)})^2}}{\sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)})^2 + (p_{ij}^{(k)})^2 + (\omega_{ij}^{(k)})^2} + \sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)} - 1)^2 + (p_{ij}^{(k)} - 1)^2 + (\omega_{ij}^{(k)} - 1)^2}}. \quad (7)$$

式中: $k = 1, 2, \dots, \#H_{ij}(p_{ij})$; $i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, N$.

定义 15 在 MAGDM 问题中, 定义 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 的三维离差程度系数为:

$$D(H_{ij}(p_{ij})) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\#H_{ij}(p_{ij})} \sum_{k'=1}^{\#H_{ij}(p_{ij})} \sqrt{(\gamma_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k')})^2 + (p_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k')})^2 + (\omega_{ij}^{(k)} - \omega_{ij}^{(k')})^2}. \quad (8)$$

式中: $k, k' = 1, 2, \dots, \# H_{ij}(p_{ij}); i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$.

根据定义 6 和定义 12—15, 本文给出如下比较 2 个用三维坐标刻画的 PHFE 大小的方法.

定义 16 设 $E(h_1(p))$ 和 $E(h_2(p))$ 分别为 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的三维几何距离, $D(h_1(p))$ 和 $D(h_2(p))$ 分别为 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的三维离差程度系数. 定义判断 2 个 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 大小的准则为:

- 1) 若 $E(h_1(p)) > E(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) > h_2(p)$;
- 2) 若 $E(h_1(p)) < E(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) < h_2(p)$;
- 3) 若 $E(h_1(p)) = E(h_2(p))$, 则有: ① $D(h_1(p)) > D(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) < h_2(p)$; ② $D(h_1(p)) < D(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) > h_2(p)$; ③ $D(h_1(p)) = D(h_2(p))$, $\Rightarrow h_1(p) \sim h_2(p)$.

以下利用实例验证定义 6 和定义 16 可用于比较 2 个 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的大小.

例 1 比较 PHFE $h_1(p) = \{(0.6 | 0.5), (0.4 | 0.5)\}$, $h_2(p) = \{(0.6 | 0.6), (0.5 | 0.4)\}$ 的大小.

解 根据文献[4]中的比较规则可得 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的得分函数值分别为 $s(h_1(p)) = 0.5$ 和 $s(h_2(p)) = 0.56$, 因此可得 $h_1(p) < h_2(p)$. 若将 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 以二维坐标形式给出, 并按照规定 4 进行测度可得 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 的二维几何距离为 $e(h_1(p)) = 0.4549$ 和 $e(h_2(p)) = 0.5402$, 由此根据定义 6 得 $h_1(p) < h_2(p)$. 若在 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 中添加评审专家的平均权重, 并按照本文定义的三维点坐标形式表达 PHFN (取 $h_1(p) = \{(0.6, 0.5, 0.5), (0.4, 0.5, 0.5)\}$, $h_2(p) = \{(0.6, 0.6, 0.5), (0.5, 0.4, 0.5)\}$), 则根据定义 14 可得 $E(h_1(p)) = 0.4533$, $E(h_2(p)) = 0.4699$, 由此再根据定义 16 可得 $h_1(p) < h_2(p)$. 若在 PHFE $h_1(p)$ 、 $h_2(p)$ 中不添加评审专家的平均权重, 并按照本文定义的三维坐标形式表达 PHFN (取 $h_1(p) = \{(0.6, 0.5, 0.6), (0.4, 0.5, 0.4)\}$, $h_2(p) = \{(0.6, 0.6, 0.3), (0.5, 0.4, 0.7)\}$), 则根据定义 14 可得 $E(h_1(p)) = 0.4566$, $E(h_2(p)) = 0.3625$, 由此再根据定义 16 可得 $h_1(p) > h_2(p)$.

由例 1 可知, 利用定义 6 对 2 个 PHFE 的大小进行判别是可行的. 若对评审专家没有偏好, 则利用定义 6 与定义 16 对 2 个 PHFE 的大小进行排序的结果与文献[4]的排序结果是一致的; 若对评审专家有偏好, 则根据定义 16 得出的排序结果与文献[4]的排序结果相反. 上述结果说明, 评审专家的偏好对方案的排序结果具有很大的影响, 不可忽略.

定义 17 在 MAGDM 问题中, 定义 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 的加权综合值为:

$$\text{PHFE } H_{ij}(p_{ij})^{\omega_{g_j}} = \widetilde{H}_{ij}(p_{ij}) = [E(H_{ij}(p_{ij}))]^{\omega_{g_j}} \cdot \{1 - [D(H_{ij}(p_{ij}))]^{\omega_{g_j}}\}. \quad (9)$$

在式(9)中, 若 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 中只有 1 个元素, 则规定 $D(H_{ij}(p_{ij})) = \min_i (D(H_{i'j}(p_{i'j}))) (i' \neq i)$. 由式(9)可知, $\widetilde{H}_{ij}(p_{ij})$ 是关于 $E(H_{ij}(p_{ij}))$ 单调递增的, $\widetilde{H}_{ij}(p_{ij})$ 是关于 $D(H_{ij}(p_{ij}))$ 单调递减的.

定义 18 令 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为一组非负实数, 且有 $r = 1, 2, \dots, n$. 若

$$\text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r a_{i_j} / C_n^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (10)$$

则称式(10)为 Maclaurin 对称平均算子. 其中 i_1, i_2, \dots, i_r 是 $1, 2, \dots, n$ 中所有可能组合的 r 元组, $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 为二项式系数.

由式(10)可知, Maclaurin 对称平均算子有以下性质:

- 1) 对于任意的 i , 若 $a_i = a \geq 0$, 则 $\text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$;
- 2) 对于任意的 i , 若 $0 \leq a_i \leq b_i$, 则 $\text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{MSM}^{(r)}(b_1, b_2, \dots, b_n)$;
- 3) 对于任意的 $a_i \geq 0$, 有 $\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

2 主要方法与结果

2.1 二维坐标定义下的 PHFS 决策算法(算法 1)

2.1.1 属性权重的计算方法

本文根据定义 8, 利用 PHFE 的二维几何距离和熵值法计算属性权重. 具体计算方法和过程为:

1) 计算第 j 个属性的熵 s_j , 其计算公式为 $s_j = -(\sum_{i=1}^M \pi_{ij} \ln \pi_{ij}) / \ln M$. 其中: $i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N; \pi_{ij} = e(h_{ij}(p_{ij})) / \sum_{i=1}^M e(h_{ij}(p_{ij}))$.

2) 计算属性权重 ω_{g_j} , 其计算公式为 $\omega_{g_j} = (1 - s_j) / (N - \sum_{j=1}^N s_j)$, 其中 $j = 1, 2, \dots, N$.

2.1.2 决策算法

本文在定义 8 的基础上设置决策算法, 其具体步骤为:

步骤 1 将评审专家组给予的方案评分表转换为由 PHFN 构成的决策矩阵 \tilde{h} ($\tilde{h} = [[h_{ij}(p_{ij})]_{i \times j}]_{M \times N}$), 使用文献[1]中的方法求解 PHFN 的概率;

步骤 2 依据 2.1.1 中的计算公式和决策矩阵 \tilde{h} 计算属性权重 ω_{g_j} , $j = 1, 2, \dots, N$;

步骤 3 根据矩阵 \tilde{h} 和定义 9、定义 10 分别计算 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 的二维几何距离 $e(h_{ij}(p_{ij}))$ 和二维离差程度系数 $d(h_{ij}(p_{ij}))$;

步骤 4 确定各方案的属性综合值(PHFE 的加权综合值 $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$);

步骤 5 利用式(10)集结 PHFE 的加权综合值 $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$, 由此获取方案的综合属性值 $f(a_i)$, $f(a_i) = MSM^{(r)}(\tilde{h}_{i1}(p_{i1}), \tilde{h}_{i2}(p_{i2}), \dots, \tilde{h}_{iN}(p_{iN})) = (\sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_l < \dots \leq N} \prod_{l=1}^r \tilde{h}_{ij}(p_{ij})_{\sigma_l} / C_N^r)^{\frac{1}{r}}$;

步骤 6 依据 $f(a_i)$ 值按从大到小的顺序对方案进行排序, $f(a_i)$ 越大方案 a_i 越优.

2.2 三维点坐标定义下的 PHFS 决策算法(算法 2)

2.2.1 属性权重的计算方法

本文利用 PHFE 的三维几何距离和熵值法计算属性权重, 具体计算方法和过程为:

1) 计算第 j 个属性的熵 S_j , 其计算公式为 $S_j = -(\sum_{i=1}^M \pi_{ij} \ln \pi_{ij}) / \ln M$. 其中: $i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N; \pi_{ij} = E(h_{ij}(p_{ij})) / \sum_{i=1}^M E(h_{ij}(p_{ij}))$.

2) 计算属性权重 ω_{g_j} , 其计算公式为 $\omega_{g_j} = (1 - S_j) / (N - \sum_{j=1}^N S_j)$, 其中 $j = 1, 2, \dots, N$.

2.2.2 决策算法

本文在定义 13 的基础上设置决策算法, 其具体步骤为:

步骤 1 将评审专家组给予的方案评分表转换为决策矩阵 \tilde{H} ($\tilde{H} = [[H_{ij}(p_{ij})]_{i \times j}]_{M \times N}$), PHFN 的概率按照文献[1]中的方法求解, 概率关联的决策专家权重根据定义 13 计算;

步骤 2 依据 2.2.1 中的计算公式和决策矩阵 \tilde{H} 计算属性权重 ω_{g_j} , $j = 1, 2, \dots, N$;

步骤 3 计算 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 的三维几何距离 $E(H_{ij}(p_{ij}))$ 与三维离差程度系数 $D(H_{ij}(p_{ij}))$;

步骤 4 确定各方案的综合属性值(PHFE 的加权综合值 $\tilde{H}_{ij}(p_{ij})$);

步骤 5 利用式(10)集结 PHFE 的加权综合值 $\tilde{H}_{ij}(p_{ij})$, 由此获取方案的综合属性值 $F(a_i)$, $F(a_i) = MSM^{(r)}(\tilde{H}_{i1}(p_{i1}), \tilde{H}_{i2}(p_{i2}), \dots, \tilde{H}_{iN}(p_{iN})) = (\sum_{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_l < \dots \leq N} \prod_{l=1}^r \tilde{H}_{ij}(p_{ij})_{\sigma_l} / C_N^r)^{\frac{1}{r}}$;

步骤 6 依据 $F(a_i)$ 值按从大到小的顺序对方案进行排序, $F(a_i)$ 越大方案 a_i 越优.

3 数值算例

例 2 以某父母在某平台择婿案例为例对本文算法进行验证分析. 根据女方家庭对男方的要求, 平台给该家庭提供了 3 名符合要求的男方资料. 女方家庭从 8 个属性指标(财产、工作、家庭出身、健康、学历、才能、相貌、兴趣等)考察男方, 用符号 $g_j (j=1, 2, \dots, 8)$ 表示. 女方家庭有 4 名成员, 依次为女儿、母亲、父亲及弟弟, 用符号分别刻画为 $z_\lambda (\lambda=1, 2, 3, 4)$. 女方家庭各成员(决策专家)对男方的评价权重依次为 $\omega_{z_1}=0.6, \omega_{z_2}=0.25, \omega_{z_3}=0.10, \omega_{z_4}=0.05$. 3 名相亲男士用符号 $a_i (i=1, 2, 3)$ 表示, 其在 8 个指标上满足女方要求程度的测评信息见表 1. 表中用 0 至 1 之间的数表示满足程度, 其中 1 表示百分之百满足要求, 0 表示完全不满足要求.

表 1 3 名相亲男士在 8 个指标上满足女方要求程度的测评信息

属性指标	a_1 的测评信息	a_2 的测评信息	a_3 的测评信息
财产(g_1)	$\{0.65 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.60 z_1\}$	$\{0.85 (z_3, z_4)\}, \{0.80 (z_1, z_2)\}$	$\{0.90 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.85 z_1\}$
工作(g_2)	$\{0.90 (z_2, z_3)\}, \{0.85 (z_1, z_4)\}$	$\{0.75 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.70 z_1\}$	$\{0.70 (z_1, z_3)\}, \{0.65 (z_2, z_4)\}$
家庭出身(g_3)	$\{0.60 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.65 z_1\}$	$\{0.65 (z_2, z_3)\}, \{0.70 (z_1, z_4)\}$	$\{0.60 (z_1, z_2, z_3, z_4)\}$
健康(g_4)	$\{0.70 (z_2, z_3)\}, \{0.75 (z_1, z_4)\}$	$\{0.70 (z_2, z_3)\}, \{0.65 (z_1, z_4)\}$	$\{0.60 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.65 z_1\}$
学历(g_5)	$\{1.00 (z_1, z_2, z_3, z_4)\}$	$\{0.85 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.80 z_1\}$	$\{0.70 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.75 z_1\}$
才能(g_6)	$\{0.90 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.85 z_1\}$	$\{0.65 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.70 z_1\}$	$\{0.60 (z_3, z_4)\}, \{0.65 (z_1, z_2)\}$
相貌(g_7)	$\{0.75 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.80 z_1\}$	$\{0.75 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.70 z_1\}$	$\{0.70 (z_1, z_2)\}, \{0.65 (z_3, z_4)\}$
兴趣(g_8)	$\{0.80 (z_1, z_4)\}, \{0.85 (z_2, z_3)\}$	$\{0.75 z_3\}, \{0.70 (z_1, z_2, z_4)\}$	$\{0.65 (z_2, z_3, z_4)\}, \{0.60 z_1\}$

运用算法 1 和算法 2 对 3 名男士进行排序的结果如下:

1) 算法 1. 首先, 根据文献[1]中计算隶属度及其对应概率的方法以及本文中的定义 3 和表 1 可得如下决策矩阵:

$$([h_{ij}(p_{ij})]_{i \times j}]_{3 \times 8})^T = \begin{bmatrix} \{(0.65, 0.75), (0.60, 0.25)\} & \{(0.85, 0.50), (0.80, 0.50)\} & \{(0.90, 0.75), (0.85, 0.25)\} \\ \{(0.90, 0.50), (0.85, 0.50)\} & \{(0.75, 0.75), (0.70, 0.25)\} & \{(0.70, 0.50), (0.65, 0.50)\} \\ \{(0.60, 0.75), (0.65, 0.25)\} & \{(0.65, 0.50), (0.70, 0.50)\} & \{(0.60, 1.00)\} \\ \{(0.70, 0.50), (0.75, 0.50)\} & \{(0.70, 0.50), (0.65, 0.50)\} & \{(0.60, 0.75), (0.65, 0.25)\} \\ \{(1.00, 1.00)\} & \{(0.85, 0.75), (0.80, 0.25)\} & \{(0.70, 0.75), (0.75, 0.25)\} \\ \{(0.90, 0.75), (0.85, 0.25)\} & \{(0.65, 0.75), (0.70, 0.25)\} & \{(0.60, 0.50), (0.65, 0.50)\} \\ \{(0.75, 0.75), (0.80, 0.25)\} & \{(0.75, 0.75), (0.70, 0.25)\} & \{(0.70, 0.50), (0.65, 0.50)\} \\ \{(0.80, 0.50), (0.85, 0.50)\} & \{(0.75, 0.25), (0.70, 0.75)\} & \{(0.65, 0.75), (0.60, 0.25)\} \end{bmatrix}.$$

其次, 根据本文中 2.1.1 中的计算公式可得 8 个指标的权重分别为: $\omega_{g_1}=0.1263, \omega_{g_2}=0.0421, \omega_{g_3}=0.1158, \omega_{g_4}=0.0442, \omega_{g_5}=0.3684, \omega_{g_6}=0.1495, \omega_{g_7}=0.0547, \omega_{g_8}=0.0989$. 在上述权重中, $\sum_{j=1}^8 \omega_{g_j}=0.9999 < 1$. 该误差(0.0001)是在计算指标权重的过程中因四舍五入造成的.

再次, 分别计算 PHFE $h_{ij}(p_{ij})$ 的二维几何距离 $e(h_{ij}(p_{ij}))$ 和二维离差程度系数 $d(h_{ij}(p_{ij}))$, 由此最终得到的 PHFE 的加权综合值 $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$ 为:

$$\tilde{h}_{11}(p_{11})=0.0774, \tilde{h}_{12}(p_{12})=0.1164, \tilde{h}_{13}(p_{13})=0.0710, \tilde{h}_{14}(p_{14})=0.1213,$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{15}(p_{15}) &= 0.2239, \tilde{h}_{16}(p_{16}) = 0.0936, \tilde{h}_{17}(p_{17}) = 0.0362, \tilde{h}_{18}(p_{18}) = 0.2482, \\ \tilde{h}_{21}(p_{21}) &= 0.2981, \tilde{h}_{22}(p_{22}) = 0.0281, \tilde{h}_{23}(p_{23}) = 0.2749, \tilde{h}_{24}(p_{24}) = 0.1211, \\ \tilde{h}_{25}(p_{25}) &= 0.1990, \tilde{h}_{26}(p_{26}) = 0.0905, \tilde{h}_{27}(p_{27}) = 0.0361, \tilde{h}_{28}(p_{28}) = 0.0629, \\ \tilde{h}_{31}(p_{31}) &= 0.0801, \tilde{h}_{32}(p_{32}) = 0.1159, \tilde{h}_{33}(p_{33}) = 0.2664, \tilde{h}_{34}(p_{34}) = 0.0291, \\ \tilde{h}_{35}(p_{35}) &= 0.1891, \tilde{h}_{36}(p_{36}) = 0.3311, \tilde{h}_{37}(p_{37}) = 0.1467, \tilde{h}_{38}(p_{38}) = 0.0622.\end{aligned}$$

最后,利用 Maclaurin 对称平均算子集结 PHFE 的加权综合值 $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$. 不失一般性,本文在此取 $r=1$,由此得 $f(a_i)$ 值分别为: $f(a_1)=0.1235$, $f(a_2)=0.1388$, $f(a_3)=0.1526$. 根据该结果可得 3 名男士的排序为 $a_3 > a_2 > a_1$.

2) 算法 2. 首先,根据文献[1]中计算隶属度及其对应概率的方法以及定义 13 和表 1 可得决策矩阵:

$$([h_{ij}(p_{ij})]_{i \times j}]_{3 \times 8})^T = \begin{bmatrix} \{(0.65, 0.75, 0.40), (0.60, 0.25, 0.60)\} & \{(0.85, 0.50, 0.15), (0.80, 0.50, 0.85)\} & \{(0.90, 0.75, 0.40), (0.85, 0.25, 0.60)\} \\ \{(0.90, 0.50, 0.35), (0.85, 0.50, 0.65)\} & \{(0.75, 0.75, 0.40), (0.70, 0.25, 0.60)\} & \{(0.70, 0.50, 0.70), (0.65, 0.50, 0.30)\} \\ \{(0.60, 0.75, 0.40), (0.65, 0.25, 0.60)\} & \{(0.65, 0.50, 0.35), (0.70, 0.50, 0.65)\} & \{(0.60, 1.00, 1.00)\} \\ \{(0.70, 0.50, 0.35), (0.75, 0.50, 0.65)\} & \{(0.70, 0.50, 0.35), (0.65, 0.50, 0.65)\} & \{(0.60, 0.75, 0.40), (0.65, 0.25, 0.60)\} \\ \{(1.00, 1.00, 1.00)\} & \{(0.85, 0.75, 0.40), (0.80, 0.25, 0.60)\} & \{(0.70, 0.75, 0.40), (0.75, 0.25, 0.60)\} \\ \{(0.90, 0.75, 0.40), (0.85, 0.25, 0.60)\} & \{(0.65, 0.75, 0.40), (0.70, 0.25, 0.60)\} & \{(0.60, 0.50, 0.15), (0.65, 0.50, 0.85)\} \\ \{(0.75, 0.75, 0.40), (0.80, 0.25, 0.60)\} & \{(0.75, 0.75, 0.40), (0.70, 0.25, 0.60)\} & \{(0.70, 0.50, 0.85), (0.65, 0.50, 0.15)\} \\ \{(0.80, 0.50, 0.65), (0.85, 0.50, 0.35)\} & \{(0.75, 0.25, 0.10), (0.70, 0.75, 0.90)\} & \{(0.65, 0.75, 0.40), (0.60, 0.25, 0.60)\} \end{bmatrix}.$$

其次,根据 2.2.1 中的计算公式可得 8 个指标的权重分别为: $\omega_{g_1}=0.0133$, $\omega_{g_2}=0.0527$, $\omega_{g_3}=0.0731$, $\omega_{g_4}=0.0781$, $\omega_{g_5}=0.6550$, $\omega_{g_6}=0.0140$, $\omega_{g_7}=0.0019$, $\omega_{g_8}=0.1118$. 在上述权重中, $\sum_{j=1}^8 \omega_{g_j} = 0.9999 < 1$. 该误差(0.0001)也是在计算指标权重的过程中因四舍五入造成的.

再次,分别计算 PHFE $H_{ij}(p_{ij})$ 的三维几何距离 $E(H_{ij}(p_{ij}))$ 和三维离差程度系数 $D(H_{ij}(p_{ij}))$, 由此最终得到 PHFE 的加权综合值 $\tilde{H}_{ij}(p_{ij})$ 为:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{11}(p_{11}) &= 0.0080, \tilde{H}_{12}(p_{12}) = 0.0588, \tilde{H}_{13}(p_{13}) = 0.0407, \tilde{H}_{14}(p_{14}) = 0.0840, \\ \tilde{H}_{15}(p_{15}) &= 0.3314, \tilde{H}_{16}(p_{16}) = 0.0085, \tilde{H}_{17}(p_{17}) = 0.0012, \tilde{H}_{18}(p_{18}) = 0.1157, \\ \tilde{H}_{21}(p_{21}) &= 0.0046, \tilde{H}_{22}(p_{22}) = 0.0303, \tilde{H}_{23}(p_{23}) = 0.0790, \tilde{H}_{24}(p_{24}) = 0.0842, \\ \tilde{H}_{25}(p_{25}) &= 0.1705, \tilde{H}_{26}(p_{26}) = 0.0085, \tilde{H}_{27}(p_{27}) = 0.0012, \tilde{H}_{28}(p_{28}) = 0.0059, \\ \tilde{H}_{31}(p_{31}) &= 0.0080, \tilde{H}_{32}(p_{32}) = 0.0449, \tilde{H}_{33}(p_{33}) = 0.0789, \tilde{H}_{34}(p_{34}) = 0.0432, \\ \tilde{H}_{35}(p_{35}) &= 0.1744, \tilde{H}_{36}(p_{36}) = 0.0048, \tilde{H}_{37}(p_{37}) = 0.0007, \tilde{H}_{38}(p_{38}) = 0.0592.\end{aligned}$$

最后,利用 Maclaurin 对称平均算子集结 PHFE 的加权综合值 $\tilde{H}_{ij}(p_{ij})$. 不失一般性,这里也取 $r=1$,由此得 $F(a_i)$ 的值分别为: $F(a_1)=0.0810$, $F(a_2)=0.0480$, $F(a_3)=0.0518$. 根据该结果可得 3 名男士的排序为 $a_1 > a_3 > a_2$.

8 个指标的权重和 3 名相亲男士的排序结果见表 2. 由表 2 可知: 2 种算法计算出的 8 个指标的权重和排序结果存在很大不同. 若采用本文算法 1 中的 8 个指标权重与文献[9]中的算法 1 进行排序,则得到的 3 名男士的排序结果与本文算法 1 的排序结果相同;若采用本文算法 2 中的 8 个指标权重与文献[9]中的算法 1 进行排序,则得到的 3 名男士的排序结果与本文算法 2 的排序结果相同. 该结果表明, 8 个指标的权重对 3 名男士的排序具有决定性作用. 由 8 个指标权重的计算过程可知,影响 8 个指标权重的唯

一因素是家庭成员的权重. 在算法 2 中, 4 名家庭成员的权重均参与了计算, 且女儿对 3 名相亲男士评价的权重最大, 因此算法 2 的排序结果($a_1 \succ a_3 \succ a_2$) 优于算法 1 (算法 1 中默认 4 名家庭成员的权重相等, 且 4 名家庭成员的权重均没有参与计算).

表 2 不同算法的各指标权重值及其决策结果

算法	8 个指标的权重值				决策结果
本文算法 1	$\omega_{g_1} = 0.1263$	$\omega_{g_2} = 0.0421$	$\omega_{g_3} = 0.1158$	$\omega_{g_4} = 0.0442$	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$
	$\omega_{g_5} = 0.3684$	$\omega_{g_6} = 0.1495$	$\omega_{g_7} = 0.0547$	$\omega_{g_8} = 0.0989$	
本文算法 2	$\omega_{g_1} = 0.0133$	$\omega_{g_2} = 0.0527$	$\omega_{g_3} = 0.0731$	$\omega_{g_4} = 0.0781$	$a_1 \succ a_3 \succ a_2$
	$\omega_{g_5} = 0.6550$	$\omega_{g_6} = 0.0140$	$\omega_{g_7} = 0.0019$	$\omega_{g_8} = 0.1118$	
文献[9] 中的算法 1(a)	$\omega_{g_1} = 0.1263$	$\omega_{g_2} = 0.0421$	$\omega_{g_3} = 0.1158$	$\omega_{g_4} = 0.0442$	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$
	$\omega_{g_5} = 0.3684$	$\omega_{g_6} = 0.1495$	$\omega_{g_7} = 0.0547$	$\omega_{g_8} = 0.0989$	
文献[9] 中的算法 1(b)	$\omega_{g_1} = 0.0133$	$\omega_{g_2} = 0.0527$	$\omega_{g_3} = 0.0731$	$\omega_{g_4} = 0.0781$	$a_1 \succ a_3 \succ a_2$
	$\omega_{g_5} = 0.6550$	$\omega_{g_6} = 0.0140$	$\omega_{g_7} = 0.0019$	$\omega_{g_8} = 0.1118$	

4 结论

研究表明, 本文利用 2 种维度分别定义的 PHFE 几何距离都能快速计算出方案的属性权重, 且在 2 种维度下建立的决策算法都可以对方案进行排序, 同时在决策过程中不存在因元素 PHFN 增多而使概率信息数据快速衰减的问题. 数值算例分析表明, 三维定义下的决策算法(算法 2)兼顾了评审专家的权重, 因此其决策结果相对更优. 在整个决策过程, 若对评审专家无偏好, 则可以直接使用算法 1 进行计算. 在今后的研究中, 笔者将考虑在 PHFS 中给予隶属度赋予相应的评审专家权重, 并在此基础上建立决策算法, 以此来更好地解决概率犹豫模糊集多属性群决策问题.

参考文献:

- [1] 朱斌. 基于偏好关系的决策方法研究及应用[D]. 南京: 东南大学经济管理学院, 2014.
- [2] ZHANG Z M. Weighted hesitant fuzzy sets and their application to multi-criteria decision making[J]. British Journal of Mathematics and Computer Science, 2014, 4(8): 1091-1123.
- [3] FARHADINIA B. Utility of correlation measure for weighed hesitant fuzzy sets in medical diagnosis problems[J]. Mathematical and Applications, 2016, 1(2): 36-45.
- [4] XU Z S, ZHOU W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.
- [5] 高建伟, 黄鑫, 郭奉佳, 等. 基于累积前景理论的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(10): 45-58.
- [6] 饶益, 陈云翔, 蔡忠义, 等. 考虑专家偏好的基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 火力与指挥控制, 2021, 46(4): 4-13.
- [7] 武文颖, 李应, 倪志伟, 等. 概率犹豫模糊 Maclaurin 几何对称平均算子及其群决策模型[J]. 系统科学与数学, 2020, 40(6): 1074-1089.
- [8] ZHANG S, XU Z S, HE Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. Information Fusion, 2017, 38: 1-11.
- [9] 朱国成, 陈利群, 李峰. 解决概率犹豫模糊集多属性群决策问题的两种算法[J]. 东莞理工学院学报, 2022, 29(5): 1-6.