文章编号: 1004-4353(2023)01-0048-05

三维 X 型态的相干值计算

赵安婷[1], 方明[1], 陶元红[2]
(1. 延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002; 2. 浙江科技学院 理学院, 杭州 310023)

摘要: 利用相干度量的定义式和三维 X 型态的密度矩阵对 3 类相干度量的解析表达式进行了研究,并给出了具体解析表达式. 这 3 类相干度量分别为基于范数的相干度量 (l_1 范数相干、l_p 范数相干($p>1$)、α-亲和度相干)、基于熵的相干度量(相对熵相干、Tsallis-α 相对熵相干、Rényi-α 相对熵相干) 和基于斜信息的相干度量. 该研究结果可为在不同相干度量下讨论量子态的权衡关系、不确定性关系以及序关系提供参考.

关键词: X 型态; 量子相干; 范数相干度量; 熵相干度量; 斜信息相干度量
中图分类号: O177.3 **文献标识码**: A

Quantum coherence of three-dimensional X states

ZHAO Anting[1], FANG Ming[1], TAO Yuanhong[2]
(1. *College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*;
2. *College of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou* 310023, *China*)

Abstract: Using the definition of coherence measure and the density matrix of three-dimensional X-type state, the analytical expressions of three kinds of coherence measures are studied and given. These three kinds of coherence measures are norm-based coherence measures, which are based on norms (l_1-norm coherence measure, l_p-norm coherence measure ($p>1$), Rényi-α relative entropy coherence), coherence based on entropy (relative entropy coherence measure, α-affinity coherence measure, Tsallis-α relative entropy coherence) and skew information coherence measure. The research results can provide a reference for discussing the trade-off, uncertainty and order relations of quantum states under different coherence measures.

Keywords: X state; quantum coherence; norm coherence measure; entropy coherence measure; skew information coherence

0 引言

量子相干性是量子力学的基本特征之一,也是量子信息学中的重要组成部分. 研究表明,量子相干性在量子信息处理[1]、量子生物学[2]等领域有着重要的应用. 2014 年, Baumgratz 等[3]提出了一个量化相干性的数学框架(BCP 框架). 由于该框架中的一个量化相干性条件(强单调性)难以验证,因此 2016 年于晓东等[4]提出了一个与 BCP 框架等价的 YZX 框架. 基础 YZX 框架,学者们提出了大量的相干度量,如 l_1 范数相干度量[3]、l_p 范数相干度量[5]、相对熵相干度量[3]、α-亲和度相干度量[6]、Tsallis-α 相

收稿日期: 2023-02-18
基金项目: 国家自然科学基金(11761073)
第一作者: 赵安婷(1999—),女,硕士研究生,研究方向为量子信息与量子计算.
通信作者: 陶元红(1973—),女,硕士,教授,研究方向为量子信息与量子计算.

对熵相干度量[7]、Rényi-α 相对熵相干度量[8]和斜信息相干度量[9]等.

近年来，学者们在不同相干度量下对量子态的相干性值的解析表达式进行了较多研究. 对于单量子比特态，已有学者给出了其在几何相干度量[2]、迹距离相干度量[10]、保真度相干度量[10]、改进的保真度相干度量[11]以及其他 7 种常见的相干度量(l_1 范数相干度量、l_p 范数相干度量($p\geqslant 2$)、相对熵相干度量、Tsallis-α 相对熵相干度量、Rényi-α 相对熵相干度量、α-亲和度相干度量和斜信息相干度量)[12]下的相干性值的解析式. 针对高维最大相干混合态，有学者给出了其在几何相干度量[13]、迹距离相干度量[14]以及其他 6 种常见相干度量(l_1 范数相干度量、l_p 范数相干度量($p\geqslant 2$)、相对熵相干度量、保真度相干度量、迹距离相干度量和斜信息相干度量)[15]下的相干性值的解析式. 目前，大部分学者研究的多为两量子比特 X 型态，而对三维 X 型态的研究较少，如王耀坤等[16]只在无偏基下对这类态的 l_1 范数相干值进行了研究；因此，本文研究如下三维 X 型态[16]的相干度量的解析表达式：

$$\rho_X=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & 1-x-y & 0 \\ z & 0 & y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 x、y、z 均为非 0 实数.

1　基于范数的相干度量下的解析式

1) l_1 范数相干度量. 本文记 I 为非相干态集合. 量子态 ρ 的 l_1 范数相干度量的表达式[3] 为：

$$C_{l_1}(\rho)=\min_{\delta\in I}\|\rho-\delta\|_{l_1}=\sum_{i\neq j}|\langle i|\rho|j\rangle|.$$

由 l_1 范数相干度量的定义可知，$C_{l_1}(\rho)$ 只与密度算子 ρ 的非对角线元素有关，因此显然有：

$$C_{l_1}(\rho_X)=2|z|.$$

2) l_p 范数相干度量. 量子态 ρ 的 l_p 范数相干度量的表达式[5] 为：

$$C_{l_p}(\rho)=\min_{\delta\in I}\|\rho-\delta\|_{l_p}^{p}=\sum_{i\neq j}|\langle i|\rho|j\rangle|^{p},\ p>1.$$

由 l_p 范数相干度量的定义可知，$C_{l_p}(\rho_X)$ 等于密度算子的所有非对角元素模的 p 次幂之和，因此有：

$$C_{l_p}(\rho_X)=\sum_{i\neq j}|\langle i|\rho_X|j\rangle|^{p}=2|z|^{p},\ p>1.$$

由上式可知，在 l_p 范数相干度量下三维 X 型态(式(1))的相干性值的解析表达式为：

$$C_{l_p}(\rho_X)=2|z|^{p},\ p>1.$$

3) α-亲和度相干度量. 对任意的量子态 ρ 和 δ，其 α-亲和度可定义[6] 为：

$$A^{(\alpha)}(\rho\|\delta)=\mathrm{tr}(\rho^{\alpha}\delta^{1-\alpha}),\ \alpha\in(0,1).$$

量子态 ρ 的 α-亲和度相干度量表达式[6] 为：

$$C_{a}^{(\alpha)}(\rho)=\min_{\delta\in I}\{1-[A_{a}^{\alpha}(\rho,\delta)]^{1/\alpha}\}=1-\sum_{i}\langle i|\rho^{\alpha}|i\rangle^{1/\alpha},\ \alpha\in(0,1). \tag{2}$$

由式(2) 可知，α-亲和度的相干度量仅与变元 α 和 $\sum_{i}\langle i|\rho^{\alpha}|i\rangle^{1/\alpha}$ 有关. 由于后文中 Tsallis-α 相对熵相干和 Rényi-α 相对熵相干也有类似情形，因此记

$$r=\sum_{i}\langle i|\rho^{\alpha}|i\rangle^{1/\alpha}. \tag{3}$$

对于三维 X 型态(式(1))，若记

$$t=\sqrt{(x-y)^2+4z^2},\ \begin{cases}A=x+y-t,\\B=x+y+t,\\C=x-y+t,\\D=-x+y+t.\end{cases} \tag{4}$$

则有

$$r=\sum_i\langle i|\rho_X^\alpha|i\rangle^{1/\alpha}=1-x-y+\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{5}$$

再由式(2)可知,在 α-亲和度相干度量下三维 X 型态(式(1))的相干性值的解析表达式为:

$$C_a^\alpha(\rho_X)=x+y-\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

2 基于熵的相干度量下的解析式

2.1 相对熵相干度量

量子态 ρ 的相对熵相干度量的定义[3]为:

$$C_r(\rho)=\min_{\delta\in I}S(\rho\|\delta)=S(\rho_{\mathrm{diag}})-S(\rho), \tag{6}$$

其中 $S(\rho)=-\mathrm{tr}(\rho\log_2\rho)$ 为冯诺依曼熵.为了方便计算 ρ_X(式(1))的冯诺依曼熵,本文首先计算 X 型态 ρ_X(式(1))的 3 个特征值.经计算,这 3 个特征值分别为:

$$\lambda_1=1-x-y,\ \lambda_2=\frac{1}{2}(x+y-\sqrt{(x-y)^2+4z^2}),\ \lambda_3=\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{(x-y)^2+4z^2}).$$

基于上述计算结果和 $S(\rho_X)$、$S(\rho_{X_{\mathrm{diag}}})$ 的定义可得:

$$\begin{aligned}S(\rho_X)=&-\mathrm{tr}(\rho_X\log_2\rho_X)=(x+y-1)\log_2(1-x-y)-\\&\frac{1}{2}(x+y-\sqrt{(x-y)^2+4z^2})\log_2\frac{1}{2}(x+y-\sqrt{(x-y)^2+4z^2})-\\&\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{(x-y)^2+4z^2})\log_2\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{(x-y)^2+4z^2}),\end{aligned}$$

$$S(\rho_{X_{\mathrm{diag}}})=-\mathrm{tr}(\rho_{X_{\mathrm{diag}}}\log_2\rho_{X_{\mathrm{diag}}})=-x\log_2x-y\log_2y-(1-x-y)\log_2(1-x-y).$$

于是再由式(6)可得:

$$\begin{aligned}C_r(\rho_X)=&x\log_2x+y\log_2y-\frac{1}{2}(x+y-\sqrt{(x-y)^2+4z^2})\log_2\frac{1}{2}(x+y-\\&\sqrt{(x-y)^2+4z^2})-\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{(x-y)^2+4z^2})\log_2\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{(x-y)^2+4z^2}).\end{aligned}$$

综上可得,相对熵相干度量下三维 X 型态(式(1))的相干性值的解析表达式为:

$$\begin{aligned}C_r(\rho_X)=&x\log_2x+y\log_2y-\\&\frac{1}{2}(x+y-t)\log_2\frac{1}{2}(x+y-t)-\frac{1}{2}(x+y+t)\log_2\frac{1}{2}(x+y+t)=\\&x\log_2x+y\log_2y-\frac{A}{2}\log_2\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\log_2\frac{B}{2}.\end{aligned}$$

2.2 Tsallis-α 相对熵相干度量

对任意量子态 ρ 和 δ,其 Tsallis-α 相对熵可定义[7]为:$S_\alpha^T(\rho\|\delta)=\dfrac{\mathrm{tr}(\rho^\alpha\delta^{1-\alpha})}{\alpha-1}$,$\alpha\in(0,1)\cup(1,2]$,

且有 $\lim\limits_{\alpha\to 1} S_\alpha^T(\rho\|\delta)=S(\rho\|\delta)$. 量子态 ρ 的 Tsallis-α 相对熵相干度量的表达式[7] 为:

$$C_\alpha^T(\rho)=\min_{\delta\in I} S_\alpha^T(\rho\|\delta)=\frac{1}{\alpha-1}\left\{\left[\sum_i\langle i|\rho^\alpha|i\rangle^{1/\alpha}\right]^\alpha-1\right\},\ \alpha\in(0,1)\cup(1,2].$$

由式(3) 显然可知 $C_\alpha^T(\rho)=\frac{1}{\alpha-1}(r^\alpha-1)$. 于是再利用式(4) 和式(5) 可得:

$$C_\alpha^T(\rho_X)=\frac{1}{\alpha-1}\left[1-x-y+\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^\alpha-\frac{1}{\alpha-1}.$$

2.3 Rényi-α 相对熵相干度量

对任意量子态 ρ 和 δ, 其Rényi-α 相对熵的定义[8] 为: $S_\alpha^R(\rho\|\delta)=\frac{1}{\alpha-1}\log_2 \mathrm{tr}(\rho^\alpha\delta^{1-\alpha})$, $\alpha\in(0,1)\cup(1,2]$, 且有 $\lim\limits_{\alpha\to 1} S_\alpha^R(\rho\|\delta)=S(\rho\|\delta)$. 量子态 ρ 的 Rényi-α 相对熵相干度量的表达式[8] 为:

$$C_\alpha^R(\rho)=\min_{\delta\in I} S_\alpha^R(\rho\|\delta)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2\left(\sum_i\langle i|\rho^\alpha|i\rangle^{1/\alpha}\right),\ \alpha\in(0,1)\cup(1,2].$$

由上式显然可知, $C_\alpha^R(\rho)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2 r$. 于是再利用式(3)—(5) 可得:

$$C_\alpha^R(\rho_X)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2\left[1-x-y+\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right].$$

3 基于斜信息的相干度量下的解析式

量子态 ρ 的斜信息相干度量的表达式[17] 为:

$$C_{sk}(\rho)=\sum_i I(\rho,|i\rangle\langle i|)=1-\sum_i\langle i|\sqrt{\rho}|i\rangle^2, \tag{7}$$

其中 $I(\rho,K)=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{[\sqrt{\rho},K]^2\}$ 为量子态 ρ 与可观测量 K 之间的斜信息. 由式(7) 可知, 在斜信息相干度量下三维 X 型态的相干性值与 $\sum_i\langle i|\sqrt{\rho_X}|i\rangle^2$ 密切相关, 因此本文首先计算 $\sum_i\langle i|\sqrt{\rho_X}|i\rangle^2$. 设

$$\sqrt{\rho_X}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & a_{13}\\ 0 & a_{22} & 0\\ a_{31} & 0 & a_{33}\end{pmatrix}.$$

由此对 ρ_X 行进行计算得: $a_{11}=a_{33}=\frac{\sqrt{2}(x-y+t)\sqrt{x+y+t}+\sqrt{2}(y-x+t)\sqrt{x+y-t}}{4t}$, $a_{13}=a_{31}=\frac{\sqrt{2}z(\sqrt{x+y+t}-\sqrt{x+y-t})}{2t}$, $a_{22}=\sqrt{1-x-y}$. 再对 $\sqrt{\rho_X}$ 主对角线上的元素 a_{11}、a_{22}、a_{33} 进行计算可得 $\sum_i\langle i|\sqrt{\rho_X}|i\rangle^2=\frac{x^2-2xz^2-2yz^2-2xy+y^2+4z^2+2z^2\sqrt{x+y+t}\sqrt{x+y-t}}{t^2}$. 进而由该式可得:

$$C_{sk}(\rho_X)=1-\sum_i\langle i|\sqrt{\rho_X}|i\rangle^2=\frac{2z^2\sqrt{x+y-t}(x+y-\sqrt{x+y+t})}{t^2}.$$

为了便于相关研究人员对三维 X 型态的相干值进行学习与查阅, 本文将上述 3 类相干度量下的三维 X 型态(式(1)) 的相干值的解析表达式列于表 1 中. 在今后的研究中, 我们将继续讨论高维量子态在不同相干度量下的解析表达式, 以为相干性值的计算提供便利.

表 1　三维 X 型态的相干度量的解析表达式

相干度量名称	解析表达式
l_1 范数相干度量	$C_{l_1}(\rho_X)=2\lvert z\rvert$
l_p 范数相干度量	$C_{l_p}(\rho_X)=2\lvert z\rvert^p,\ p>1$
相对熵相干度量	$C_r(\rho_X)=x\log_2 x+y\log_2 y-\frac{1}{2}(x+y-t)\log_2\frac{1}{2}(x+y-t)-\frac{1}{2}(x+y+t)\log_2\frac{1}{2}(x+y+t)$
α-亲和度相干度量	$C_\alpha^a(\rho_X)=x+y-\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}$
Tsallis-α 相对熵相干度量	$C_\alpha^T(\rho_X)=\frac{1}{\alpha-1}\left[1-x-y+\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^\alpha-\frac{1}{\alpha-1}$
Rényi-α 相对熵相干度量	$C_\alpha^R(\rho_X)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2\left[1-x-y+\frac{(A^\alpha C+B^\alpha D)^{\frac{1}{\alpha}}+(A^\alpha D+B^\alpha C)^{\frac{1}{\alpha}}}{(2^{\alpha+1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]$
斜信息相干度量	$C_{sk}(\rho_X)=\frac{2z^2\sqrt{x+y-t}\,(x+y-\sqrt{x+y+t})}{t^2}$

注:表中 $t=\sqrt{(x-y)^2+4z^2}$, $A=x+y-t$, $B=x+y+t$, $C=x-y+t$, $D=-x+y+t$.

参考文献:

[1] JHA P K, MREJEN M, KIM J, et al. Coherence-driven topological transition in quantum metamaterials[J]. Phys Rev Lett, 2016,116(16):165502.

[2] LLOYD S. Quantum coherence in biological systems[J]. J Phys Conf Ser, 2011,302(1):012037.

[3] BAUMGRATZ T, CRAMER M, PLENIO M B. Quantifying coherence[J]. Phys Rev Lett, 2014,113(14):140401.

[4] YU X D, ZHANG D J, XU G F, et al. Alternative framework for quantifying coherence[J]. Phys Rev A, 2016,94(6):060302.

[5] BAI Z F, DU S P. Maximally coherent states[J/OL]. Quantum Information & Computation.(2015-03-24)[2022-01-12]. https://arxiv.org/pdf/1503.07103.

[6] XIONG C H, KUMAR A, WU J D. Family of coherence measures and duality between quantum coherence and path distinguish ability[J]. Phys Rev A, 2018,98(3):032324.

[7] ZHANG F G, SHAO L H, LUO Y, et al. Ordering states with Tsallis relative α-entropies of coherence[J]. Quant Inf Proc, 2017,16:1-17.

[8] SHAO L H, LI Y M, LUO Y, et al. Quantum coherence quantifiers based on the Rényi-α relative entropy[J]. Commun Theor Phys, 2017,67(6):631-636.

[9] STRELTSOV A, SINGH U, DHAR H S, et al. Measuring quantum coherence with entanglement[J]. Phys Rev Lett, 2015,115(2):020403.

[10] SHAO L H, XI Z J, FAN H, et al. The fidelity and trace norm distances for quantifying coherence[J]. Phys Rev A, 2015,91(4):042120.

[11] LIU C L, ZHANG D J, YU X D, et al. A new coherence measure based on fidelity[J]. Quant Inf Proc, 2017,16:1-10.

[12] 孙柳,陶元红,李江鹏. 二维量子态的相干值计算[J]. 延边大学学报(自然科学版),2022,48(2):107-111.

[13] ZHANG H J, CHEN B, LI M, et al. Estimation on geometric measure of quantum coherence[J]. Commun Theor Phys, 2017,67(2):166-170.

[14] CHEN B, FEI S M. Notes on modified trace distance measure of coherence[J]. Quant Inf Proc, 2018,17(5):107.

[15] 廉晓龙,李江鹏,孙柳,等. 最大相干混合态的量子相干性[J]. 哈尔滨理工大学学报,2022,27(5):147-150.

[16] WANG Y K, GE L Z, TAO Y H. Quantum coherence in mutually unbiased bases[J]. Quant Inf Proc, 2019,18(6):1-12.

[17] YU C S. Quantum coherence via skew information and its polygamy[J]. Phys Rev A, 2017,95(4):042337.