文章编号: 1004-4353(2023)01-0036-07

一类具有隔离项的时滞分数阶 SIQ 传染病模型的稳定性分析

王娜
(山西工商学院 计算机信息工程学院, 太原 030006)

摘要: 为了探讨引入时滞对分数阶模型稳定性的影响,建立了一类具有隔离项的时滞分数阶 SIQ 传染病模型. 首先,计算了模型的特征矩阵和特征方程,求出了模型的基本再生数和平衡点;其次,在无时滞和有时滞两种情况下给出了具有隔离项的分数阶 SIQ 传染病模型存在无病平衡点稳定的充分条件;最后,利用分岔理论对模型出现的 Hopf 分岔行为进行了分析,结果表明模型的动力学特性与引入时滞的阈值大小密切相关.

关键词: 隔离项; 分数阶; SIQ 传染病模型; 平衡点; 稳定性; Hopf 分岔
中图分类号: O175.2　　**文献标识码**: A

Stability analysis of a class of time-lagged fractional-order SIQ infectious disease models with segregation

WANG Na
(*College of Computer and Information Engineering*, *Shanxi Technology and Business College*, *Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: In order to explore the effect of introducing time lags on the stability of the fractional-order model, we developed a kind of time-lagged fractional SIQ infectious disease models with isolation terms. Firstly, we calculated the characteristic matrix and characteristic equation of the model, and we finded the basic regenerative number and equilibrium point of the model. Secondly, we provided sufficient conditions for a stable disease-free equilibrium of the model in the cases of no time lag and with time lag. Finally, by using the bifurcation theory, we analyzed the Hopf bifurcation behavior of the model. The results showed that the dynamic properties of the model were closely related to the threshold size when introducing time lags.

Keywords: segregation term; fractional order; SIQ infectious disease model; equilibrium point; stability; Hopf bifurcation

0　引言

很多传染病(如霍乱、伤寒、流感、肺结核、艾滋病、鼠疫等)会严重危害人类的健康,因此做好预防工作具有重要意义. 目前,已有许多国内外学者利用分数阶微积分建立了传染病模型,并对模型的稳定性和分岔等动力学特性进行了研究. 例如: Mousa Mohamed 等[1]建立了一个关于儿童疾病(麻疹、腮腺炎、水痘等)的分数阶"易感-感染-恢复"SIR 模型,并定性考察了该模型的动力特性. Karaji 等[2]建立了

收稿日期: 2023－02－15
基金项目: 山西省高等学校科技创新项目(2020L0738);山西省教育科学"十四五"规划课题(GH-220181)
作者简介: 王娜(1987—),女,硕士,讲师,研究方向为应用数学.

一个分数阶乙型肝炎流行模型，并利用分数阶 Barbalat 引理研究了该模型的全局动力学. Miao 等[3] 在分数阶 SIRS 传染病模型中引入了两种不同的耦合控制器，并利用不动点定理研究了 Julia 集的复杂性和不规则性. Wang 等[4] 提出了一类带有饱和方程的时滞分数阶 SIR 传染病模型，并在任意时滞下分析了模型的稳定性与分支情况. 在上述研究的基础上，为了进一步探讨引入时滞对分数阶传染病模型的动力学特性的影响，本文建立了一类具有隔离项的时滞分数阶 SIQ 传染病模型，并研究了其动力学性质.

1　预备知识

定义 1[5]　连续函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha\ (\alpha>0)$ 阶 Caputo 分数阶导数为：

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s, $$

其中 $0\leqslant n-1\leqslant\alpha<n$，$n=[\alpha]+1$，Camma 函数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，$s>0$.

引理 1[6]　Caputo 分数阶导数的 Laplace 变换为：

$$ L\{{}_0^C D_t^{\alpha} f(t)\}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\{{}_0^C D_t^{\alpha} f(s)\}\mathrm{d}s=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\ n-1<\alpha\leqslant n. $$

引理 2[7]　已知时滞分数阶系统：

$$ \begin{cases} {}^C D_t^{\alpha_i} x_i(t)=f_i(t,x_i(t),x_i(t-\tau)),\\ x_i(\theta)=\varphi(\theta),\ \theta\in[-\tau,0],\ i=1,2,3. \end{cases} $$

其中：$\alpha_i\in(0,1]\ (i=1,2,3)$，$f_i(t,x_i(t),x_i(t-\tau)):\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$. 假设 $x^*=(x'_1,x'_2,x'_3)$ 为上述时滞分数阶系统的零解，则在该系统零点处 $x^*=(x'_1,x'_2,x'_3)$ 的特征矩阵为 $\boldsymbol{\Delta}(s)=$ $\begin{bmatrix} s^{\alpha_1}-a_{11}\mathrm{e}^{-s\tau_{11}} & -a_{12}\mathrm{e}^{-s\tau_{12}} & -a_{13}\mathrm{e}^{-s\tau_{13}}\\ -a_{21}\mathrm{e}^{-s\tau_{21}} & s^{\alpha_2}-a_{22}\mathrm{e}^{-s\tau_{22}} & -a_{23}\mathrm{e}^{-s\tau_{23}}\\ -a_{31}\mathrm{e}^{-s\tau_{31}} & -a_{32}\mathrm{e}^{-s\tau_{32}} & s^{\alpha_3}-a_{33}\mathrm{e}^{-s\tau_{33}} \end{bmatrix}$，其中 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 为系数矩阵，且该系统在零点处 $(x^*=(x'_1,x'_2,x'_3))$ 的局部渐近稳定条件为特征方程 $|\boldsymbol{\Delta}(s)|=0$ 的所有的根 s 满足 $\mathrm{Re}[s]<0$.

引理 3[8]（Routh-Hurwitz 判据）　已知一元多项式方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$，其所有的根均具有负实部的充要条件是：

$$ H_l=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2l-1}\\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2l-2}\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2l-3}\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2l-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_l \end{vmatrix}>0,\ l=1,2,3,\cdots,n. $$

2　具有隔离项的时滞分数阶 SIQ 传染病模型的建立

文献[9] 的作者建立了如下一类具有隔离项的常微分 SIQS 的传染病数学模型：

$$ \begin{cases} S'(t)=A-\beta SI-dS+rI+\varepsilon Q,\\ I'(t)=\beta SI-(r+\delta+d+\eta_1)I,\\ Q'(t)=\delta I-(\varepsilon+d+\eta_2)Q. \end{cases} \tag{1} $$

其中：$S(t)$、$I(t)$、$Q(t)$ 分别为 t 时刻人群中的易感染者、感染者、隔离者人数；$N(t)$ 为 t 时刻人群总人数，$N(t)=S(t)+I(t)+Q(t)$；A 为感染者人群对易感人群的感染率；β 为易感人群与感染者的有效接触率；d、η_1、η_2 分别为人群的自然死亡率、染病人群的死亡率、隔离人群的死亡率；δ 为染病人群的隔离率；r 为染病人群的恢复率；ε 为隔离人群的恢复率.

本文建立如下一类具有隔离项的时滞分数阶 SIQ 传染病模型：

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_1}S(t)=A-\beta SI(t-\tau)-dS+rI+\varepsilon Q, \\ D_t^{\alpha_2}I(t)=\beta SI(t-\tau)-(r+\delta+d+\eta_1)I, \\ D_t^{\alpha_3}Q(t)=\delta I-(\varepsilon+d+\eta_2)Q. \end{cases} \tag{2}$$

其中：$D_t^{\alpha_i}$ 为 Caputo 分数阶算子，τ 为时滞，$\alpha_i\in(0,1]\,(i=1,2,3)$，$t\in[0,+\infty)$，$S(0)=s_{t_0}>0$，$I(0)=I_{t_0}\geqslant 0$，$Q(0)=Q_{t_0}\geqslant 0$. 若系统(2) 中的任意平衡点为$(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{Q})$，则将平衡点$(\widetilde{S},\widetilde{I},\widetilde{Q})$ 代入系统(2) 并进行线性化处理可得：

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_1}S(t)=(-\beta\widetilde{I}-d)S(t)+(-\beta\widetilde{S}+r)I(t-\tau)+\varepsilon Q(t), \\ D_t^{\alpha_2}I(t)=\beta\widetilde{I}S(t)+\beta\widetilde{S}I(t-\tau)-(r+\delta+d+\eta_1)I(t), \\ D_t^{\alpha_3}Q(t)=\delta I(t)-(\varepsilon+d+\eta_2)Q(t). \end{cases} \tag{3}$$

将系统(3) 进行 Laplace 变换可得：

$$\begin{cases} s^{\alpha_1}L[S(t)]-s^{\alpha_1}S(0)=(-\beta\widetilde{I}-d)L[S(t)]+(-\beta\widetilde{S}+r)\mathrm{e}^{-s\tau}\left(L[I(t)]+\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-s\tau}\phi(t)\mathrm{d}t\right)+ \\ \qquad \varepsilon L[Q(t)], \\ s^{\alpha_2}L[I(t)]-s^{\alpha_2}I(0)=\beta\widetilde{I}L[S(t)]+\beta\widetilde{S}\mathrm{e}^{-s\tau}\left(L[I(t)]+\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-s\tau}\phi(t)\mathrm{d}t\right)- \\ \qquad (r+\delta+d+\eta_1)L[I(t)], \\ s^{\alpha_3}L[Q(t)]-s^{\alpha_3}Q(0)=\delta L[I(t)]-(\varepsilon+d+\eta_2)L[Q(t)]. \end{cases} \tag{4}$$

式(4) 中 $L[S(t)]$、$L[I(t)]$、$L[Q(t)]$ 分别为 $S(t)$、$I(t)$、$Q(t)$ 的 Laplace 变换. 对式(4) 进行化简可得：

$$\boldsymbol{\Delta}(s)\cdot\begin{pmatrix} L[S(t)] \\ L[I(t)] \\ L[Q(t)] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

其中：$\boldsymbol{\Delta}(s)$ 为系统(2) 的特征矩阵，$\det(\boldsymbol{\Delta}(s))=0$ 为系统(2) 的特征方程. 另外，式(5) 中的 $\boldsymbol{\Delta}(s)$、$v_1(s)$、$v_2(s)$、$v_3(s)$ 分别可表示为：

$$\boldsymbol{\Delta}(s)=\begin{pmatrix} s^{\alpha_1}+\beta\widetilde{I}+d & (\beta\widetilde{S}-r)\mathrm{e}^{-s\tau} & -\varepsilon \\ -\beta\widetilde{I} & s^{\alpha_2}-\beta\widetilde{S}\mathrm{e}^{-s\tau}+r+\delta+d+\eta_1 & 0 \\ 0 & -\delta & s^{\alpha_3}+\varepsilon+d+\eta_2 \end{pmatrix},$$

$$v_1(s)=s^{\alpha_1}S(0)+(-\beta\widetilde{S}+r)\mathrm{e}^{-s\tau}\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-s\tau}\phi(t)\mathrm{d}t,$$

$$v_2(s)=s^{\alpha_2}I(0)+(\beta\widetilde{S}\mathrm{e}^{-s\tau})\int_{-\tau}^{0}\mathrm{e}^{-s\tau}\phi(t)\mathrm{d}t,$$

$$v_3(s)=s^{\alpha_3}Q(0).$$

3　解的稳定性及其 Hopf 分岔行为

3.1　系统(2) 的平衡点及其基本再生数的计算

由于求解分数阶系统与整数阶系统平衡点的方法相同(整数阶系统 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$ 的平衡点是通过使 $f(t,x)=0$ 求得的[10])，因此求分数阶系统(2) 的平衡点可通过令 $D_t^{\alpha_1}S(t)=0$，$D_t^{\alpha_2}I(t)=0$，$D_t^{\alpha_3}Q(t)=0$ 后进行计算得到. 经计算，系统(2) 的无病平衡点为 $E_0=(\frac{A}{d},0,0)$，地方病平衡点为 $E_*=(S_*,I_*,Q_*)$，其中：

$$S_*=\frac{r+\delta+d+\eta_1}{\beta},\ I_*=\frac{A\beta-rd-\delta d-d^2-\eta_1 d}{\beta(\delta+d+\eta_1-\frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon+d+\eta_2})},\ Q_*=\frac{\delta I_*}{\varepsilon+d+\eta_2}. \tag{6}$$

基本再生数是刻画传染病在传染初期的重要参数，也是区分传染病是否流行的阈值[10]，因此本文利用文献[11] 中提出的再生矩阵法求解系统(2) 在无病平衡点 $E_0=(\frac{A}{d},0,0)$ 处的基本再生数 R_0. 经计算得 $R_0=\frac{A\beta}{d(r+\delta+d+\eta_1)}$.

注 1　基本再生数 R_0 能够反映传染病模型中的平衡点稳定情况. 由于地方病平衡点 $E_*=(S_*,I_*,Q_*)$ 满足式(6)，因此对式(6) 进行化简可得 $S_*=\frac{r+\delta+d+\eta_1}{\beta}=\frac{A}{dR_0}$，$I_*=\frac{A}{B}(1-\frac{1}{R_0})$，$Q_*=\frac{\delta I_*}{\varepsilon+d+\eta_2}$，其中 $B=\delta+d+\eta_1-\frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon+d+\eta_2}$. 由此显然知 $B=\frac{(\delta+d+\eta_1)(\varepsilon+d+\eta_2)-\varepsilon\delta}{\varepsilon+d+\eta_2}>0$. 由于当 $R_0>1$ 时，$S_*>0$，$I_*>0$，$Q_*>0$，因此当 $R_0>1$ 时系统(2) 存在正的地方病平衡点 $E_*=(S_*,I_*,Q_*)$.

3.2　主要结论及其证明

3.2.1　系统(2) 在无病平衡点 E_0 处的稳定性

定理 1　对于所有 $\tau\geqslant 0$，当 $R_0<1$ 时，系统(2) 在无病平衡点 E_0 处为局部渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，系统在无病平衡点 E_0 处为不稳定.

证明　系统(2) 在无病平衡点 $E_0=(\frac{A}{d},0,0)$ 处的特征方程为：

$$\det[\boldsymbol{\Delta}(s)|_{E_0}]=\begin{vmatrix} s^{\alpha_1}+d & \left(\frac{A\beta}{d}-r\right)\mathrm{e}^{-s\tau} & -\varepsilon \\ 0 & s^{\alpha_2}-\frac{A\beta}{d}\mathrm{e}^{-s\tau}+r+\delta+d+\eta_1 & 0 \\ 0 & -\delta & s^{\alpha_3}+\varepsilon+d+\eta_2 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

下面分 $\tau=0$ 和 $\tau>0$ 两种情况讨论系统(2) 在无病平衡点处的稳定性.

(i) 当 $\tau=0$ 时，设 $\lambda_i=s^{\alpha_i}$，$i=1,2,3$，则式(7) 可化简为：

$$(\lambda_1+d)(\lambda_2-\frac{\beta A}{d}+r+\delta+d+\eta_1)(\lambda_3+\varepsilon+d+\eta_2)=0. \tag{8}$$

由式(8) 可得系统(2) 的 3 个特征值分别为 $\lambda_1=-d<0$，$\lambda_2=\frac{\beta A}{d}-r-\delta-d-\eta_1=(R_0-1)(r+\delta+d+\eta_1)$，$\lambda_3=-(\varepsilon+d+\eta_2)<0$. 于是由引理 2 可知：当 $R_0<1$ 时，$\lambda_2<0$，系统(2) 在无病平衡点 E_0 处的特征值均为负，因此此时系统(2) 在无病平衡点 E_0 处是局部渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，$\lambda_2>1$，系统(2) 在无病平衡点 E_0 处的特征值不满足 $\mathrm{Re}[s]<0$，因此此时系统(2) 在无病平衡点 E_0 处是不稳定的.

(ii) 当 $\tau>0$ 时,式(7) 可化简为:

$$(s^{\alpha_1}+d)(s^{\alpha_2}-\frac{\beta A}{d}\mathrm{e}^{-s\tau}+r+\delta+d+\eta_1)(s^{\alpha_3}+\varepsilon+d+\eta_2)=0. \tag{9}$$

设 $\lambda_i=s^{\alpha_i}$, $i=1,3$,则式(9) 的 2 个特征值分别为 $\lambda_1=-d<0$, $\lambda_3=-(\varepsilon+d+\eta_2)<0$. 由于式(9) 的左边第 2 个因子包含时滞 τ,故应考虑如下方程的根:

$$s^{\alpha_2}-\frac{\beta A}{d}\mathrm{e}^{-s\tau}+r+\delta+d+\eta_1=0. \tag{10}$$

令 $s=\mathrm{i}\omega\ (\omega>0)$,并将其代入式(10) 中可得:

$$\omega^{\alpha_2}(\cos\frac{\alpha_2\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha_2\pi}{2})-\frac{\beta A}{d}(\cos\omega\tau-\mathrm{i}\sin\omega\tau)+r+\delta+d+\eta_1=0. \tag{11}$$

分离式(11) 中的实部和虚部可得:

$$\begin{cases}\omega^{\alpha_2}\cos\dfrac{\alpha_2\pi}{2}+(r+\delta+d+\eta_1)=\dfrac{A\beta}{d}\cos\omega\tau,\\ \omega^{\alpha_2}\sin\dfrac{\alpha_2\pi}{2}=-\dfrac{A\beta}{d}\sin\omega\tau.\end{cases} \tag{12}$$

将式(12) 中的 2 个方程分别进行平方、求和并化简后可得:

$$\omega^{2\alpha_2}+2(r+\delta+d+\eta_1)\cos\frac{\alpha_2\pi}{2}\omega^{\alpha_2}+(r+\delta+d+\eta_1)^2(1+R_0)(1-R_0)=0. \tag{13}$$

当 $R_0<1$ 时,由根与系数的关系可知方程(13) 没有正实根. 由此可知,式(9) 的特征值实部均为负. 于是再由引理 2 可知,系统(2) 在无病平衡点 E_0 处是局部渐近稳定的. 当 $R_0>1$ 时,由根与系数的关系可知方程(13) 有正实根,系统(2) 在无病平衡点 E_0 处的特征值不满足 $\mathrm{Re}[s]<0$,故由引理 2 可知系统(2) 在无病平衡点 E_0 处是不稳定的.

3.2.2 系统(2) 在地方病平衡点 E_* 处的稳定性

系统(2) 在地方病平衡点 $E_*=(S_*,I_*,Q_*)$ 处的特征方程为:

$$\det[\boldsymbol{\Delta}(s)|_{E_*}]=\begin{vmatrix}s^{\alpha_1}+\beta I_*+d & (\beta S_*-r)\mathrm{e}^{-s\tau} & -\varepsilon\\ -\beta I_* & s^{\alpha_2}-\beta S_*\mathrm{e}^{-s\tau}+r+\delta+d+\eta_1 & 0\\ 0 & -\delta & s^{\alpha_3}+\varepsilon+d+\eta_2\end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

整理式(14) 可得:

$$f_1(s)+f_2(s)\mathrm{e}^{-s\tau}=0. \tag{15}$$

其中: $f_1(s)=s^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+a_1s^{\alpha_1+\alpha_2}+a_2s^{\alpha_1+\alpha_3}+a_3s^{\alpha_2+\alpha_3}+a_4s^{\alpha_1}+a_5s^{\alpha_2}+a_6s^{\alpha_3}+a_7$, $f_2(s)=-(b_1s^{\alpha_1+\alpha_3}+b_2s^{\alpha_3}+b_3s^{\alpha_1}+b_4)$, $a_1=(\varepsilon+d+\eta_2)$, $a_2=r+\delta+d+\eta_1$, $a_3=\beta I_*+d$, $a_4=(\varepsilon+d+\eta_2)(r+\delta+d+\eta_1)$, $a_5=(\beta I_*+d)(\varepsilon+d+\eta_2)$, $a_6=(\beta I_*+d)(r+\delta+d+\eta_1)$, $a_7=(\beta I_*+d)(\varepsilon+d+\eta_2)(r+\delta+d+\eta_1)$, $b_1=\beta S_*$, $b_2=\beta rI_*+\beta dS_*$, $b_3=\beta S_*(\varepsilon+d+\eta_2)$, $b_4=(\beta rI_*+\beta dS_*)(\varepsilon+d+\eta_2)$.

由注 1 可知,当 $R_0>1$ 时,地方病平衡点($E_*=(S_*,I_*,Q_*)$) 中的 $S_*>0$, $I_*>0$;因此,$a_i\ (i=1,2,3,4,5,6,7)$ 和 $b_j\ (j=1,2,3,4)$ 均为正数.

定理 2 假设系统(2) 的分数阶 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha\in(0,1]$. 当时滞 $\tau=0$, $R_0>1$, $a_1+a_2+a_3-b_1>0$, $(a_1+a_2+a_3-b_1)(a_4+a_5+a_6-b_2-b_3)-(a_7-b_4)>0$ 时,系统(2) 在地方病平衡点 E_* 处是局部渐近稳定的.

证明 当时滞 $\tau=0$ 时,化简式(15) 可得 $f_1(s)+f_2(s)=0$,即:

$$s^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+a_1s^{\alpha_1+\alpha_2}+a_2s^{\alpha_1+\alpha_3}+a_3s^{\alpha_2+\alpha_3}+a_4s^{\alpha_1}+a_5s^{\alpha_2}+a_6s^{\alpha_3}+a_7-$$
$$b_1s^{\alpha_1+\alpha_3}-b_2s^{\alpha_3}-b_3s^{\alpha_1}-b_4=0. \tag{16}$$

由于 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha\in(0,1]$，因此方程(16)可简化为：

$$s^{3\alpha}+(a_1+a_2+a_3-b_1)s^{2\alpha}+(a_4+a_5+a_6-b_2-b_3)s^{\alpha}+a_7-b_4=0. \tag{17}$$

令 $s^{\alpha}=\lambda$，于是方程(17)可简化为：$\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3=0$，其中 $p_1=a_1+a_2+a_3-b_1$，$p_2=a_4+a_5+a_6-b_2-b_3$，$p_3=a_7-b_4$. 根据定理2中的已知条件可得：

$$H_1=p_1=a_1+a_2+a_3-b_1>0,$$
$$H_2=p_1p_2-p_3=(a_1+a_2+a_3-b_1)(a_4+a_5+a_6-b_2-b_3)-(a_7-b_4)>0.$$

再由引理3中的Routh-Hurwitz判据知，系统(2)在地方病平衡点 E_* 处的特征方程的根均具有负实部. 因此由引理2知，当时滞 $\tau=0$ 且系统(2)的分数阶 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha\in(0,1]$ 时，系统(2)在地方病平衡点 E_* 处是局部渐近稳定的.

3.2.3 系统(2)在地方病平衡点 E_* 处的Hopf分岔行为

定理3 若系统(2)的分数阶 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha\in(0,1]$，则当时滞 $\tau>0$，且分岔点 $\tau_0=\min\{\tau_0^k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$，满足 $\mathrm{Re}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_0,\omega=\omega_0}>0$ 时，系统(2)在地方病平衡点 E_* 处发生Hopf分岔，且有：

1) 当 $\tau<\tau_0$ 时，系统(2)在地方病平衡点 E_* 处是局部渐近稳定的；

2) 当 $\tau>\tau_0$ 时，系统(2)在地方病平衡点 E_* 处是不稳定的.

证明 当时滞 $\tau>0$，且系统(2)的分数阶 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha\in(0,1]$ 时，式(15)可化简为：

$$s^{3\alpha}+(a_1+a_2+a_3)s^{2\alpha}+(a_4+a_5+a_6)s^{\alpha}+a_7-[b_1s^{2\alpha}+(b_2+b_3)s^{\alpha}+b_4]e^{-s\tau}=0. \tag{18}$$

由文献[12]中的Hopf分岔理论可知，若系统在平衡点处的特征方程存在一对共轭复根 $\rho(\tau)\pm i\omega(\tau)$，且满足 $\rho(0)=0$，$\omega(0)=\omega_0$，$\rho'\neq0$(横截条件)，则 $\rho(\tau)\pm i\omega(\tau)$ 的轨迹在 $\tau=\tau_0$ 处横向穿越虚轴，即系统在该平衡点处发生Hopf分岔行为. 假设方程(18)含有一对纯虚根 $s=\pm i\omega$，并将 $s=i\omega=\omega\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$ 代入式(18)中并整理可得：

$$T_1+iT_2-[\cos(\omega\tau)-i\sin(\omega\tau)](T_3+iT_4)=0, \tag{19}$$

其中：

$$T_1(\omega)=\omega^{3\alpha}\cos\frac{3\alpha\pi}{2}+(a_1+a_2+a_3)\omega^{2\alpha}\cos(\alpha\pi)+(a_4+a_5+a_6)\omega^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+a_7, \tag{20}$$

$$T_2(\omega)=\omega^{3\alpha}\sin\frac{3\alpha\pi}{2}+(a_1+a_2+a_3)\omega^{2\alpha}\sin(\alpha\pi)+(a_4+a_5+a_6)\omega^{\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}+a_7, \tag{21}$$

$$T_3(\omega)=b_1\omega^{2\alpha}\cos(\alpha\pi)-(b_2+b_3)\omega^{\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+b_4, \tag{22}$$

$$T_4(\omega)=b_1\omega^{2\alpha}\sin(\alpha\pi)-(b_2+b_3)\omega^{\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{23}$$

分离方程(19)的实部和虚部可得：

$$\begin{cases}T_3(\omega)\cos(\tau\omega)+T_4(\omega)\sin(\tau\omega)=T_1(\omega),\\ T_4(\omega)\cos(\tau\omega)-T_3(\omega)\sin(\tau\omega)=T_2(\omega).\end{cases} \tag{24}$$

再由式(20)可得：

$$\begin{cases}\cos(\tau\omega)=\dfrac{T_1(\omega)T_3(\omega)+T_2(\omega)T_4(\omega)}{T_3^2(\omega)+T_4^2(\omega)},\\[2ex] \sin(\tau\omega)=\dfrac{T_1(\omega)T_4(\omega)-T_2(\omega)T_3(\omega)}{T_3^2(\omega)+T_4^2(\omega)}.\end{cases} \tag{25}$$

于是由$\cos^2(\tau\omega)+\sin^2(\tau\omega)=1$可得关于$\omega$的方程:

$$T_1^2(\omega)+T_2^2(\omega)=T_3^2(\omega)+T_4^2(\omega). \tag{26}$$

将式(20)—(23)代入式(26),并假设方程(26)有正根$\omega=\omega_0^{(k)}>0$,由此可通过式(25)的第1个方程求得时滞$\tau_0^{(k)}=\frac{1}{\omega_0}\left[\arccos\left(\frac{T_1(\omega_0^{(k)})T_3(\omega_0^{(k)})+T_2(\omega_0^{(k)})T_4(\omega_0^{(k)})}{T_3^2(\omega_0^{(k)})+T_4^2(\omega_0^{(k)})}\right)+2k\pi\right]$, $k=0,1,2,\cdots$.

定义分岔点$\tau_0=\min\{\tau_0^{(k)}\}$, $k=0,1,2,\cdots$,则当$\tau=\tau_0$时可得$\omega=\omega_0$.为进一步验证系统(2)在分岔点τ_0处发生Hopf分岔的横截条件为$\rho_0=0$, $\omega(0)=\omega_0$, $\rho'\neq 0$,本文对特征方程(18)的时滞τ进行了求导,得$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}=\frac{f_1'(s)+f_2'(s)\mathrm{e}^{-s\tau}}{f_2(s)s\mathrm{e}^{-s\tau}}-\frac{\tau}{s}$.由于$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_0,\omega=\omega_0}>0$满足系统发生Hopf分岔的横截条件,因此根据Hopf分岔理论可知特征方程(18)的根横向穿越虚轴,系统(2)此时会出现Hopf分岔,且分岔的临界阈值为$\tau=\tau_0$.当$\tau<\tau_0$时,系统(2)在地方病平衡点E_*处是局部渐近稳定的;当$\tau>\tau_0$时,系统(2)在地方病平衡点E_*处是不稳定的.

4 结论

本文建立了一类具有隔离项的时滞分数阶SIQ传染病模型,并利用分数阶系统稳定性的相关理论研究了当时滞$\tau\geqslant 0$时,系统(2)在无病平衡点E_0处的稳定情况,同时给出了其局部渐进稳定的充分条件.以时滞为参数,利用Hopf分岔理论对系统(2)在地方病平衡点E_*处所发生的Hopf分岔行为进行计算并分析表明:当$\tau<\tau_0$(临界阈值)时,系统(2)在地方病平衡点E_*处是局部渐近稳定的;当$\tau>\tau_0$时,系统(2)在地方病平衡点E_*处是不稳定的.本文结果可为研究具有隔离项的时滞分数阶传染病系统的动力学特性提供参考.

参考文献:

[1] MOHAMED M, FAHAD A. A comparative numerical study and stability analysis for a fractional-order SIR model of childhood diseases[J]. Mathematics, 2021, 9(22): 2847.

[2] KARAJI P T, NYAMORADI N. Analysis of a fractional SIR model with general incidence function[J]. Applied Mathematics Letters, 2020, 108: 106499.

[3] MIAO O Y, ZHANG Y P, LIU J. Fractal control and synchronization of the discrete fractional SIRS model[J]. Complexity, 2020, 9(3): 3085036.

[4] WANG X H, WANG Z, HUANG X, et al. Dynamic analysis of a delayed fractional-order SIR model with saturated incidence and treatment functions[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(14): 1850-1880.

[5] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999: 198-202.

[6] MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[J]. Computational Engineering in Systems Applications, 1996, 2: 963-968.

[7] DENG W, LI C, LU J. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays[J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 48(4): 409-416.

[8] 杨小京. Routh-Hurwitz判别法的一个应用[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1996, 36(2): 79-82.

[9] 陈军杰. 几个具有隔离项的传染病模型的局部稳定性和全局稳定性[J]. 生物数学学报, 2004, 19(1): 57-64.

[10] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 1-22.

[11] 崔玉美, 陈姗姗, 傅新楚. 几类传染病模型中基本再生数的计算[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2017, 14(4): 14-31.

[12] TIAN C R, LIU Y. Delay-driven Hopf bifurcation in a networked Malaria model[J]. Applied Mathematics Letters, 2022, 132: 108092.