文章编号：1004-4353(2023)01-0026-05

无界区域上一类带有权函数的半线性椭圆方程解的存在性

韩亮， 谢君辉
(湖北民族大学 数学与统计学院，湖北 恩施 445000)

摘要：利用 Sobolev-Hardy 不等式和变分法，证明了无界区域上一类带有权函数的半线性椭圆方程解的存在性，该结果将有界区域上解的存在性及全空间上解的存在性推广到了无界的外区域上.

关键词：无界区域；解的存在性；半线性椭圆方程；Sobolev-Hardy 不等式；变分法
中图分类号：O175.25 **文献标识码**：A

Existence of solutions for a class of semilinear elliptic equations with weight function in unbounded domains

HAN Liang， XIE Junhui
(*School of Mathematics and Statistics*, *Hubei Minzu University*, *Enshi* 445000, *China*)

Abstract: Existence of solutions for semilinear elliptic equations involving weight functions in unbounded domains is proved by using Sobolev-Hardy inequality and variational methods, which extends the existence of solution on bounded domain and in the whole space to the unbounded outer domain.

Keywords: unbounded domain; existence of solution; semilinear elliptic equation; Sobolev-Hardy inequality; variational method

0 引言

本文研究如下无界区域上的一类带有权函数的半线性椭圆方程：

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=|u|^{p-2}u,\ x\in\Omega; \\ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中：Ω 是 $\mathbf{R}^N$ $(N\geqslant 3)$ 中具有光滑边界的外区域，$0\notin\Omega$；$\mu>0$；$2<p<2^*$，2^* 是 Sobolev 嵌入的临界指数($2^*=\dfrac{2N}{N-2}$). 目前，已有许多学者基于变分法和临界点理论在有界区域情形下对问题(1)解的存在性进行了研究[1-4]. 但对于在无界区域情形下的问题(1)解的存在性，由于采用变分法和临界点理论研究时会导致其 Sobolev 嵌入失去紧性，因此一些学者探讨了其他一些方法. 例如：当区域 Ω 具有球对称性质时，研究者将球对称空间中的 $H^1_{0,r}(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^p(\Omega)$ 中，由此证明了该球存在对称解[5-6]；

收稿日期：2023-01-30
基金项目：国家自然科学基金(11761030)
第一作者：韩亮(1997—)，男，硕士研究生，研究方向为偏微分方程理论及其应用.
通信作者：谢君辉(1984—)，女(土家族)，博士，副教授，研究方向为偏微分方程理论及其应用.

对于区域不具有对称性的情形，研究者利用 P.L.Lions 提出的第一、第二集中紧性原理证明了其存在弱解[7-10].

当问题(1)中的 Ω 不包含原点时，问题(1)是带权函数的半线性椭圆方程. 文献[11]的作者用变分原理和山路引理讨论了如下无界区域上的半线性椭圆方程解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=\dfrac{\lambda}{|x|^s}|u|^{q-2}u+a(x)|u|^{r-2}u,\ x\in\Omega; \\ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

其中：$\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 3)$ 为外区域，$0\notin\Omega$；$\mu,\lambda>0$；$0<s<2$；$2^*(s)<q<2^*$；$2<r<2^*$；$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$；$2^*(s)=\dfrac{2(N-s)}{N-2}$；$a(x)\in L^{\frac{2^*}{2^*-r}}(\Omega)$，$a(x)\geqslant 0$. 文献[11]的作者在给定的条件下证明了问题(2)存在无穷多解，且其中至少有一个正解. 文献[12]的作者研究了如下外区域上的一类半线性椭圆方程解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=g(x)|u|^{q-2}u+f(x,u),\ x\in\Omega; \\ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

其中：$\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 3)$ 为外部区域，$0\notin\Omega$；$\mu\geqslant 0$；$2<q<2^*$，$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$. 作者证明了当 $f(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件和某些增长性条件以及 $g(x)\in C(\Omega,\mathbf{R})$ 满足某些有界性条件时，问题(3) 存在非平凡解和多解.

当问题(1)中的 Ω 为包含原点的区域时(系数有奇性)，称问题(1)是带有 Hardy 项的半线性椭圆方程的边值问题. 文献[13]的作者研究了如下无界区域上的一类带 Hardy 项且具有临界指数的半线性椭圆方程非平凡解的存在性：

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=|u|^{2^*-2}u+\lambda h(x)u,\ x\in\Omega; \\ u=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

其中：$\lambda>0$；$0\leqslant\mu<\left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$；$\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的无界开区域，$0\in\Omega$；$h(x)\in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ $(N\geqslant 3)$，$h(x)\geqslant 0$. 文献[13]的作者在给定条件下证明了问题(4) 至少有 p 对不同的解. 文献[14]的作者研究了如下上半空间中具有 2 个 Sobolev-Hardy 临界指数的非线性椭圆方程：

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda\dfrac{u^{2^*(s_1)-1}}{|x|^{s_1}}+\dfrac{u^{2^*(s_2)-1}}{|x|^{s_2}}=0,\ x\in\Omega; \\ u(x)>0,\ x\in\Omega; \\ u(x)=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

其中：$\Omega=\mathbf{R}^N_+(N\geqslant 3)$；$0<s_2<s_1<2$；$\lambda\in\mathbf{R}$. 文献[14]的作者研究显示，在满足一定条件下问题(5)存在一个最小能量解. 基于上述研究，本文运用变分法和 Hardy 不等式证明问题(1)存在解.

1　预备知识

对任意的 $u\in H(\Omega)$，问题(1) 所对应的能量泛函为：

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{|u|^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x,$$

其中 $H(\Omega)=\left\{u\in H_0^1(\Omega)\,|\,\dfrac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x<\infty\right\}$.

定义1 定义空间 $H(\Omega)$ 的内积为 $(u,v)=\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v-\mu\frac{uv}{|x|^2})\mathrm{d}x$,其中 $u,v\in H_0^1(\Omega)$. 因此,$H(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间,且其连续嵌入到 $H_0^1(\Omega)$ 中. 另外,由内积 $(u,v)=\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v-\mu\frac{uv}{|x|^2})\mathrm{d}x$ 导出的范数为 $\|u\|_H\triangleq\|u\|=\left[\int_{\Omega}(|\nabla u|^2-\mu\frac{|u|^2}{|x|^2})\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$.

定义2 对于 $u\in H_0^1(\Omega)$,若 $(u,v)=\int_{\Omega}|u|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x$,$\forall v\in H_0^1(\Omega)$ 成立,则称 u 是问题(1)的弱解.

引理1[3] 若 Ω 是不包含原点的外区域,则存在常数 $C=C(N)>0$,且使得对任意 $u\in H_0^1(\Omega)$ 都有 $\int_{\Omega}\frac{|u|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x\leqslant C(N)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$.

引理2 对于 $0\leqslant\mu<\bar{\mu}=\left(\frac{N-p}{p}\right)^p$,范数 $\|u\|=\left[\int_{\Omega}(|\nabla u|^2-\mu\frac{|u|^2}{|x|^2})\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$ 与标准的 Sobolev 范数 $\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left[\int_{\Omega}(|\nabla u|^2+|u|^2)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$ 等价.

证明 因为 $p>2$,所以 $\bar{\mu}=\left(\frac{N-p}{p}\right)^p<1$,于是由引理1可知引理2成立.

引理3 若存在 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 满足 $I(u_n)\to C$,$I'(u_n)\to 0$,则存在 $\{u_n\}$ 的一个子列(仍记为 $\{u_n\}$)以及某个 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $u_n\to u$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中成立.

证明 因为 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 满足 $I(u_n)\to C$,$I'(u_n)\to 0$,所以有

$$I(u_n)=\frac{1}{2}\|u_n\|^2-\frac{1}{p}\int_{\Omega}|u_n|^p\mathrm{d}x=C+o(1),\ \langle I'(u_n),u_n\rangle=\|u_n\|^2-\int_{\Omega}|u_n|^p\mathrm{d}x=o(1).$$

由上式可得 $(\frac{p}{2}-1)\|u_n\|^2=Cp+o(1)$,故 $\|u_n\|^2\leqslant C$,即 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 因此,存在某个 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 u_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛到 u. 由上述可知,对任意的有界区域 $D\subset\Omega$,在 $L^p(D)$ 中 $u_n\to u$,其中 $2<p<2^*$,即对于 $\forall v_n\in H$ 有以下等式成立:

$$\langle I'(u_n),v_n\rangle=(u_n,v_n)-\int_{\Omega}|u_n|^{p-2}u_nv_n\mathrm{d}x=o(1),$$

$$\|u_n\|^2=\langle I'(u_n),u_n\rangle+\int_{\Omega}|u_n|^p\mathrm{d}x=o(1)+\int_{\Omega}|u_n|^p\mathrm{d}x,$$

$$\|u_n\|^2=\langle I'(u_n),u\rangle+\int_{\Omega}|u_n|^{p-2}u_nu\,\mathrm{d}x+o(1)=o(1)+\int_{\Omega}|u_n|^{p-2}u_nu\,\mathrm{d}x.$$

设 $\Omega_l=\Omega\cap B_l(0)$. 由于在 $L^p(D)$ 中 $u_n\to u$,因此当 $l>0$ 时显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega_l}|u_n|^p\mathrm{d}x=\int_{\Omega_l}|u|^p\mathrm{d}x$. 再由 Young 不等式可得 $\int_{\Omega\backslash\Omega_l}|u_n|^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{\Omega\backslash\Omega_l}|1|^{\frac{2^*}{2^*-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-p}{2^*}}\left(\int_{\Omega\backslash\Omega_l}|u_n|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2^*}}\leqslant C\|u_n\|^p\leqslant C$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega}|u_n|^p\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x$. 类似上述证明易证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega}|u_n|^{p-2}u_nu\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x$,所以在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n\to u$.

引理4[15](山路引理) 设 X 是实 Banach 空间,$I\in C^1(X,\mathbf{R})$ 且 $I(0)=0$. 若:(i) 存在 $d,l>0$ 使得 $I(u)\geqslant l>0$,$\|u\|=d$;(ii) 存在 $e\in X$,$\|e\|>d$ 使得 $I(e)\leqslant 0$. 则存在序列 $\{u_n\}\subset X$ 满足 $I(u_n)\to C$,且 $I'(u_n)\to 0$. 如果 I 满足 PS 条件,则 C 是 I 的临界值,其中 $C=\inf\limits_{r\in\Gamma}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}I(r(t))\geqslant l$,$\Gamma=\{r\in C([0,1],X);r(0)=0,r(1)=e\}$.

引理5[16](偶泛函临界点定理) 设 E 是一个无限维的 Banach 空间,偶泛函 $I\in C^1(E,\mathbf{R})$ 满足 PS

条件和以下条件：

(i) 对某个 $d>0$，$T>0$，使得在 $B_d\backslash\{0\}$ 中有 $I>0$，在 ∂B_d 上有 $I\geqslant T$，其中 $B_d=\{x\in E;\|x\|<d\}$；

(ii) 存在 E 的一个 k 维子空间 X_k 且 $A_0=\{u\in E;I(u)\geqslant 0\}$，使得 $X_k\cap A_0$ 有界且 $\sup\limits_{u\in X_k} I(u)<\infty$.

令 $b_m=\inf\limits_{K\in\Gamma_m}\sup\limits_{u\in K} I(u)$，$m\in\{1,2,\cdots,k\}$，其中：

$$\Gamma_m=\{K\subset E;K\text{ 关于 }0\text{ 是紧对称的且 }\forall h\in\Gamma_1,\psi(K\cap h(\partial B_1))\geqslant m\}.$$

上式中：$\Gamma_1=\{h;h:E\to E$ 是一个奇同胚，$h(0)=0,h(B_1)\subset A_0\}$；$B_1=\{u\in E;\|u\|<1\}$；$\psi(K)$ 为 E 中紧对称子集 K 的亏格. 根据上述满足的条件有：

1) 当 $0<T\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_k<+\infty$ 时，$b_1,\cdots,b_k$ 是 I 的临界值；

2) 若对某个 $m\in\{1,2,\cdots,k\}$ 有 $b_m=b_{m+1}$ 成立，则对于每个 b_m，泛函 I 有无穷多个临界点.

2　主要结果及其证明

定理 1　假设 $N\geqslant 3$，$2<p<2^*$，$0<\mu<\bar{\mu}$，$\bar{\mu}$ 在定义 1 中已给出，则问题(1) 有无穷多个解，其中至少存在一个非负解.

证明　首先证明问题(1) 有一个正解. 对于 $u\in H_0^1(\Omega)$，由于 $2<p<2^*$，且 $H_0^1(\Omega)$ 嵌入到 $L^p(\Omega)$ 中，因此对于问题(1) 的能量泛函 $I(u)$ 有下式成立：

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2})\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-C\|u\|^p\geqslant\|u\|^2(\frac{1}{2}-C\|u\|^{p-2}).$$

由上式可知，存在 $d,z>0$ 使得对于 $u\in\{u\in H_0^1(\Omega),\|u\|=d\}$ 有 $I(u)\geqslant z>0$. 因此，当 $u\in H_0^1(\Omega)$ 和 $t>0$ 时有 $I(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^p}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x$，且当 $t\to+\infty$ 时有 $I(tu)\to-\infty$. 由此可知存在 $e=t_0u$，$t_0>0$ 使得 $I(e)<0$，$\|e\|>d$. 定义 $\Sigma=\{v\in C([0,1],W);v(0)=0,v(1)=e\}$，$C_0=\inf\limits_{v\in\Sigma}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} I(v(t))$. 由定义可得 $C_0>z>0$. 再由山路引理可知，$I(u)$ 在临界点 u_0 处的临界值 $I(u_0)=C_0$. 又因为当 $F(x,u)=F(x,-u)$ 时，I 为偶泛函，即 $I(u_0)=I(|u_0|)$，因此可设 $u_0\geqslant 0$. 于是由极大值原理[17] 知，$u_0>0$ 在 Ω 中几乎处处成立，故 u_0 为问题(1) 的一个正解.

下面证明问题(1) 有无穷多个解. 由上述证明可知，I 在空间 H 中满足引理 5 的条件(i). 给定 $k\in\mathbf{N}$，并取 $\eta_i\in C_0^\infty(\Omega)$，$\eta_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,k)$，由此可得对于任意的 $i\neq j$ 有 $\sup p\eta_i\cap\sup p\eta_j=\varnothing$. 由于 $I(t\eta_i)=\frac{t^2}{2}\|\eta_i\|^2-\frac{t^p}{p}\int_\Omega|\eta_i|^p$，所以有 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t\eta_i)=-\infty$. 对于 E 的一个 k 维子空间 X_k，给定 $k\in\mathbf{N}$，并取 $X_k=\mathrm{span}\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\}$，则由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$ 的支集两两不相交可知，$I(\sum\limits_{i=1}^k t_i\eta_i)=\sum\limits_{i=1}^k I(t_i\eta_i)$. 由此根据引理 5 中的条件(i) 的证明易证引理 5 的条件(ii) 也满足，由此可得问题(1) 至少存在 k 个解. 由于 k 是任意整数，因此可知问题(1) 有无穷多个解. 证毕.

参考文献：

[1]　GARCÍA A J P, PERAL A I. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems[J]. J Differential Equations, 1998, 144(2): 441-476.

[2]　JANNELLI E. The role played by space dimension in elliptic critical problems[J]. J Differential Equations, 1999, 156(2): 407-426.

[3]　GHOUSSOUB N, YUAN C. Multiple solutions for quasi-linear PDES involving the critical Sobolev and Hardy exponents[J]. Trans Amer Math Soc, 2000, 352(12): 5703-5743.

(下转第 88 页)

mined by high-performance thin-layer chromatography[J]. Acta Parasitol, 2016,61(1):108-112.
[6] 周贤婧,师彦平. 毛细管电泳-间接紫外检测法测定蜂蜜中的氨基酸[J]. 色谱,2013,31(7):661-666.
[7] XU W H, ZHONG C C, ZOU C P, et al. Analytical methods for amino acid determination in organisms[J]. Amino Acids, 2020,52(8):1071-1088.
[8] 邓红英,张永文,李永贵. 柱前衍生高效液相色谱法测定复方氨基酸注射液中氨基酸的含量[J]. 药学研究,2020,39(1):27-30.
[9] KLIKAROV J, ESLOV L, FISCHER J. Rapid analysis of phenyl isothiocyanate derivatives of amino acids present in Czech meads[J]. Journal of Chromatography A, 2021,1644(13):462134.
[10] 翁燕,刘丽娜,周小燕,等. 建立 UPLC 法测定复方氨基酸胶囊(9-5)中氨基酸的含量[J]. 实用药物与临床,2017,20(2):202-207.
[11] 游景水,王德伟. 柱前在线衍生-反相高效液相色谱法测定羊胎盘枸杞胶囊中 16 种氨基酸的含量[J]. 食品安全质量检测学报,2015,6(11):4671-4676.
[12] 郭华,朱智甲,周晓雅,等. 柱前衍生液相色谱-串联质谱法测定珍珠粉中氨基酸[J]. 分析科学学报,2015,31(6):855-858.
[13] LI N N, LIU Y, ZHAO Y, et al. Simultaneous HPLC determination of amino acids in tea infusion coupled to pre-column derivatization with 2,4-dinitrofluorobenzene[J]. Food Analytical Methods, 2016,9(5):1307-1314.
[14] 赵英莲,牟德华,李艳. 2,4-二硝基氟苯柱前衍生 HPLC 检测树莓中游离氨基酸[J]. 食品科学,2015,36(6):178-182.
[15] MOTTISHAW J D, ERCK A R, KRAMER J H, et al. Electrostatic potential maps and natural bond orbital analysis: visualization and conceptualization of reactivity in sanger's reagent[J]. Journal of Chemical Education, 2015,92(11):1846-1852.
[16] KOLLER M, ECKERT H. Derivatization of peptides for their determination by chromtographic methods[J]. Analytica Chimica Acta, 1997, 352(1):31-59.
[17] NISHIO T, HIGASHI T, FUNAISHI A, et al. Development and application of electrospray-active derivatization reagents for hydroxysteroids[J]. Journal of Pharmaceutical & Biomedical Analysis, 2007,44(3):786-795.

(上接第 29 页)

[4] KANG D S, DENG Y B. Existence of solution for a singular critical elliptic equation[J]. J Math Anal Appl, 2003, 284(2):724-732.
[5] COFFMAN C V. Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions[J]. Arch Rat Mech Anal, 1972,46(2):81-95.
[6] STRAUSS W A. Existence of solitary waves in higher dimensions[J]. Comm Math Phys, 1977,55:149-162.
[7] LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The locally compact case: Part 1[J]. Ann Inst H Poincare Anal Non Lineaire, 1984,1(2):109-145.
[8] LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The locally compact case: Part 2[J]. Ann Inst H Poincare Anal Non Lineaire, 1984,1(4):223-283.
[9] LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case: Part 1[J]. Rev Mat Iberoam, 1985,1(1):145-201.
[10] LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case: Part 2[J]. Rev Mat Iberoam, 1985,1(2):45-121.
[11] 康东升,朱小琨. 外部区域上半线性椭圆方程的多解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2003,37(1):3-5.
[12] 郭竹梅,姚妙新. 外部区域上一类半线性椭圆型方程解的存在性[J]. 天津师范大学学报(自然科学版),2006,26(3):34-38.
[13] 杨敏波,沈自飞. 无界区域上具有 Hardy 临界指数项的半线性椭圆方程的多解性[J]. J Sys Sci Math Scis, 2007,27(2):229-238.
[14] LI Y Y, LIN C S. A nonlinear elliptic PDE with two Sobolev-Hardy critical exponents[J]. Arch Ration Mech Anal, 2012,203(3):943-968.
[15] 陆文端. 微分方程中的变分法[M]. 北京:科学出版社,2002:56-67.
[16] GOULD S H. Variational Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1995:104-122.
[17] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Boston: Birkhäuser Boston, 1996:7-36.