

文章编号: 1004-4353(2023)01-0021-05

一类具有线性捕获和其他食物来源的 捕食-食饵模型的稳定性研究

张志扬, 李忠

(福州大学 数学与统计学院, 福州 350108)

摘要: 研究了一类具有线性捕获和其他食物来源的捕食-食饵模型平衡点的局部和全局稳定性, 并用实例验证了所得结果的正确性. 研究结果显示: 当捕食者的其他食物来源较多时, 会导致食饵种群绝灭; 当捕食者的其他食物来源较少时, 少量的捕获会保持食饵种群和捕食者种群共存, 而过度捕获则会导致食饵种群的绝灭.

关键词: 捕食-食饵模型; 线性捕获; 全局渐近稳定性; 局部稳定性

中图分类号: O29

文献标识码: A

Stability of a predator-prey model with linear harvesting and additional food source

ZHANG Zhiyang, LI Zhong

(School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: The local and global stability of the equilibrium points of a predator-prey model with linear harvesting and additional food source are studied. The correctness of the main conclusions are verified by numerical simulations. The results show that when the predator has more additional food source, it will lead to the extinction of the prey population; when the predator has less additional food source, the small harvesting will keep the coexistence of the prey and predator populations, but the excessive harvesting will lead to the extinction of the prey population.

Keywords: predator-prey model; linear harvesting; global asymptotic stability; local stability

0 引言

由于研究具有捕获的捕食-食饵模型对资源的可持续发展和合理利用具有重要的指导意义, 因此近年来许多学者对具有捕获的捕食-食饵模型进行了研究, 并取得了良好成果. 目前大部分的相关研究是针对唯一食物来源进行的, 如: Shang 等^[1] 研究了一类具有常数捕获的 Gause 型捕食-食饵模型, 并分析了模型的稳定性和一些分支现象; Christian^[2] 提出了一类不连续的具有线性捕获的捕食-食饵模型, 并以线性捕获和环境容纳量为参数讨论了模型的分支和稳定性; Mortuja 等^[3] 研究了一类具有非线性捕获和平方根功能性反应的捕食-食饵模型, 结果显示当捕获较小时, 捕食者群和食饵群将共存并保持平衡; Hu 等^[4] 讨论了一类具有非线性捕获的捕食-食饵系统的稳定性, 研究表明该系统会产生 Hopf 分

收稿日期: 2022-12-16

基金项目: 福建省自然科学基金(2021J01613)

第一作者: 张志扬(1997—), 男, 硕士研究生, 研究方向为微分方程及其应用.

通信作者: 李忠(1980—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为微分方程及其应用.

支和 Bogdanov-Takens 分支.但在实际中,由于有些捕食者还会具有其他食物来源,因此一些学者研究了具有其他食物来源的捕食-食饵模型的动力学性质.例如:Sen 等^[5]研究了一种具有 Allee 效应和其他食物来源的捕食-食饵系统,研究结果显示该模型具有双稳定性和三稳定性;Arancibia 等^[6]讨论了一类具有其他食物来源的 Leslie-Gower 捕食-食饵模型,并分析了 Allee 效应和其他食物来源对系统稳定性和分支的影响;Mondal 等^[7]研究了一种具有常数捕获和其他食物来源的捕食-食饵模型,并分析了模型的平衡点稳定性和 Hopf 分支以及时滞对系统动力学性质的影响.基于上述研究,本文研究模型(1)平衡点的局部和全局渐近稳定性,并讨论其他食物来源和捕获对种群稳定性的影响.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - exy - h_0x, \\ \frac{dy}{dt} = ny + cexy - dy^2. \end{cases} \quad (1)$$

其中: x 和 y 分别表示食饵和捕食者种群的种群密度, r 表示食饵种群的内禀增长率, k 表示食饵种群的环境容纳量, e 表示捕食者种群的捕食率, h_0 表示捕捞系数, c 表示捕食者在种间竞争的能量转化率, n 表示捕食者对其他食物来源的能量转化率, d 表示捕食者种群的种内竞争强度.

对系统(1) 进行无量纲变化,即令 $\tau = rt$, $\bar{x} = \frac{1}{k}x$, $\bar{y} = \frac{d}{r}y$, 且仍然用 x, y, t 表示 \bar{x}, \bar{y}, τ , 则系统(1) 可变为如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - py) - hx, \\ \frac{dy}{dt} = y(m + bx - y), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $p = \frac{e}{d}$, $h = \frac{h_0}{r}$, $m = \frac{n}{r}$, $b = \frac{kce}{r}$.

1 平衡点的局部稳定性及其证明

若系统(2) 中的 $(x(t), y(t))$ 满足初值条件 $x(0) \geq 0$ 和 $y(0) \geq 0$, 则有如下定理:

定理 1 系统(2) 的解是恒正和有界的.

证明 由系统(2) 的初值条件可知, 系统(2) 的解是恒正的. 由系统(2) 的第 1 个方程可得

$\frac{dx}{dt} \leq x(1 - x)$, 因此 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1$; 由系统(2) 的第 2 个方程可得 $\frac{dy}{dt} \leq y(m + b - y)$, 因此 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq m + b$. 综上可知系统(2) 的解是有界的, 证毕.

令 $P(x, y) = x(1 - x - py) - hx$ 和 $Q(x, y) = y(m + bx - y)$, 于是由 $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ 可得如下引理:

引理 1 系统(2) 总存在 2 个边界平衡点 $E_0(0, 0)$ 和 $E_1(0, m)$. 当 $h < 1$ 时, 系统(2) 存在边界平衡点 $E_2(1 - h, 0)$. 当 $h < 1 - pm$ 时, 系统(2) 存在 1 个正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 其中 $x^* = \frac{1 - h - pm}{1 + bp}$, $y^* = m + bx^*$.

证明 当 $x = 0$ 时, 显然有 $P(0, y) = 0$, 且对 $Q(0, y) = 0$ 进行计算得其有 2 个根, 分别为 $y_1 = 0$ 和 $y_2 = m$, 所以系统(2) 存在 2 个边界平衡点 $E_0(0, 0)$ 和 $E_1(0, m)$. 当 $y = 0$ 时, 显然有 $Q(x, 0) = 0$, 且对 $P(x, 0) = 0$ 进行计算得其有 1 个根, 为 $x_1 = 1 - h$. 由以上可知, 当 $h < 1$ 时, 系统(2) 存在边界平衡点 $E_2(1 - h, 0)$. 下证系统(2) 的正平衡点的存在性. 由 $Q(x, y) = 0$ 可知 $y = m + bx$. 将 $y = m + bx$ 代入 $P(x, y) = 0$ 中可得 $(1 + bp)x - (1 - h - pm) = 0$. 由以上可知, 当 $h < 1 - pm$ 时系统(2) 存在 1 个

正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 其中 $x^* = \frac{1-h-pm}{1+bp}$, $y^* = m + bx^*$. 证毕.

引理 2 当 $h \leq 1$ 时, $E_0(0, 0)$ 是不稳定的. 当 $h > 1$ 时, $E_0(0, 0)$ 是鞍点.

证明 对系统(2)的右端求偏导, 可得平衡点 E_0 的雅可比矩阵 $J_{E_0} = \begin{pmatrix} 1-h & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, 即平衡点 E_0 有 2 个特征根, 分别为 $\lambda_1 = 1-h$ 和 $\lambda_2 = m$. 由 λ_1 的正负可知: 当 $h < 1$ 时, $E_0(0, 0)$ 为不稳定的结点; 当 $h > 1$ 时, $E_0(0, 0)$ 为鞍点; 当 $h = 1$ 时, $\lambda_1 = 0$.

为了讨论 E_0 的稳定性, 将系统(2)在平衡点 E_0 处展开可得:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 - pxy, \\ \frac{dy}{dt} = my + bxy - y^2. \end{cases} \quad (3)$$

由于系统(3)中 x^2 项的系数是负的, 所以由文献[8]中的定理 7.1 可知: $E_0(0, 0)$ 是排斥的鞍结点; 当 $h = 1$ 时, 平衡点 E_0 是不稳定的. 证毕.

引理 3 ① 若 $pm \geq 1$, 则 $E_1(0, m)$ 是局部稳定的. ② 若 $pm < 1$, 则: 当 $h < 1 - pm$ 时, $E_1(0, m)$ 是鞍点; 当 $h = 1 - pm$ 时, $E_1(0, m)$ 是吸引的鞍结点; 当 $h > 1 - pm$ 时, $E_1(0, m)$ 是局部稳定的.

证明 对系统(2)的右端求偏导可得平衡点 E_1 的雅可比矩阵为 $J_{E_1} = \begin{pmatrix} 1-h-pm & 0 \\ bm & -m \end{pmatrix}$, 由此可知平衡点 E_1 有 2 个特征根, 分别为 $\lambda_1 = 1-h-pm$ 和 $\lambda_2 = -m$. 由 λ_1 的正负可知, 当 $pm \geq 1$ 时, $\lambda_1 < 0$, 即 $E_1(0, m)$ 是局部稳定的. 当 $pm < 1$ 时: 如果 $h < 1 - pm$, 则 $E_1(0, m)$ 是鞍点; 如果 $h > 1 - pm$, 则 $E_1(0, m)$ 是局部稳定的; 如果 $h = 1 - pm$, 则 $\lambda_1 = 0$, 即 $E_1(0, m)$ 为退化的平衡点.

下面讨论退化平衡点 $E_1(0, m)$ 的稳定性. 对系统(2)作变换, 即令 $x = X$, $y = Y + m$, 则系统(2)可变为:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -X^2 - pXY, \\ \frac{dY}{dt} = bmX - mY + bXY - Y^2. \end{cases} \quad (4)$$

对系统(4)作变换, 即令 $X = u$, $Y = bu + v$, $dt = -\frac{1}{m}d\tau$, 则系统(4)可变为:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{1+bp}{m}u^2 + \frac{p}{m}uv, \\ \frac{dv}{d\tau} = v + \frac{b}{m}uv + \frac{1}{m}v^2. \end{cases} \quad (5)$$

由于系统(5)中的负向时间变换和 u^2 项的系数是正的, 因此当 $h = 1 - pm$ 时, 根据文献[8]中的定理 7.1 可知 $E_1(0, m)$ 是吸引的鞍结点, 即在第一象限内 $E_1(0, m)$ 是稳定的. 证毕.

引理 4 当 $h < 1$ 时, $E_2(1-h, 0)$ 是鞍点.

证明 对系统(2)的右端求偏导可得平衡点 E_2 的雅可比矩阵为 $J_{E_2} = \begin{pmatrix} h-1 & -p(1-h) \\ 0 & m+b(1-h) \end{pmatrix}$, 由此可知平衡点 E_2 有 2 个特征根, 分别为 $\lambda_1 = h-1$ 和 $\lambda_2 = m+b(1-h)$. 由 λ_1 和 λ_2 的正负可知, 当 $h < 1$ 时, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, 由此可知 $E_2(1-h, 0)$ 是鞍点. 证毕.

引理 5 当 $h < 1 - pm$ 时, 正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部稳定的.

证明 对系统(2)的右端求偏导, 可得平衡点 E^* 的雅可比矩阵 $J_{E^*} = \begin{pmatrix} -x^* & -px^* \\ by^* & -y^* \end{pmatrix}$. 对雅可比矩阵 J_{E^*} 进行计算易得 $\lambda_1 \lambda_2 = x^* y^* (1+bp) > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = -x^* - y^* < 0$. 由此可知, 当 $h < 1 - pm$ 时 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, 进而可得 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部稳定的. 证毕.

2 平衡点的全局渐近稳定性及其证明

定理 2 当 $pm \geq 1$ 时, 边界平衡点 $E_1(0, m)$ 是全局渐近稳定的.

证明 由引理 1 可知: 当 $pm \geq 1$ 时, 系统(2) 不存在正平衡点 E^* , 因此系统(2) 在第一象限内不存在极限环; 当 $pm \geq 1$ 且 $h < 1$ 时, 系统(2) 存在 3 个边界平衡点 E_0 、 E_1 和 E_2 . 于是由引理 2—4 可知, $E_0(0, 0)$ 是不稳定的, $E_1(0, m)$ 是局部稳定的, $E_2(1-h, 0)$ 是鞍点. 再由定理 1 进一步可知, 系统(2) 的解是有界的. 由于第一象限内不存在极限环, 所以可得边界平衡点 $E_1(0, m)$ 是全局渐近稳定的.

另外, 由引理 1 还可知, 当 $pm \geq 1$ 且 $h \geq 1$ 时, 系统(2) 存在 2 个边界平衡点 E_0 和 E_1 . 于是由引理 2 和引理 3 可知: $E_0(0, 0)$ 是不稳定的, $E_1(0, m)$ 是局部稳定的. 类似上面的分析可知, 边界平衡点 $E_1(0, m)$ 是全局渐近稳定的, 证毕.

定理 3 ① 当 $pm < 1$ 和 $h < 1 - pm$ 时, 正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的. ② 当 $pm < 1$ 和 $h \geq 1 - pm$ 时, 边界平衡点 $E_1(0, m)$ 是全局渐近稳定的.

证明 1) 由引理 1 可知, 当 $pm < 1$ 和 $h < 1 - pm$ 时, 系统(2) 存在 3 个边界平衡点 E_0 、 E_1 、 E_2 和 1 个正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$. 于是由引理 2—5 可知: $E_0(0, 0)$ 是不稳定的, $E_1(0, m)$ 和 $E_2(1-h, 0)$ 是鞍点, $E^*(x^*, y^*)$ 是局部稳定的. 由上述可知, 只要证明系统(2) 不存在极限环, 即可得 $E^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的. 在 $\frac{\partial(PB)}{\partial x} + \frac{\partial(QB)}{\partial y}$ 中取 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$ 进行计算得 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0$. 于是由文献[8] 中的定理 1.7 可知, 系统(2) 不存在极限环, 即 $E^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的.

2) 由引理 1 可知, 当 $pm < 1$ 和 $1 - pm \leq h < 1$ 时, 系统(2) 存在 3 个边界平衡点 E_0 、 E_1 和 E_2 , 其中 $E_0(0, 0)$ 是不稳定的, $E_1(0, m)$ 是局部稳定的, $E_2(1-h, 0)$ 是鞍点. 由定理 1 可知, 此时系统(2) 的解是有界的, 且在第一象限内不存在极限环, 所以边界平衡点 $E_1(0, m)$ 是全局渐近稳定的. 另外, 由引理 1 还可知, 当 $pm < 1$ 和 $h \geq 1$ 时, 系统(2) 存在 2 个边界平衡点 E_0 和 E_1 , 其中 $E_0(0, 0)$ 是鞍点, $E_1(0, m)$ 是局部稳定的. 于是类似于 $pm < 1$ 和 $1 - pm \leq h < 1$ 时的分析可知, $E_1(0, m)$ 是全局渐近稳定的.

3 数值模拟

例 1 考虑如下系统的稳定性:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x-y) - 0.5x, \\ \frac{dy}{dt} = y(1.5+x-y), \end{cases} \quad (6)$$

其中 $p=1, b=1, m=1.5, h=0.5$. 由于 $h=0.5 < 1$, 因此由引理 1 可知: 系统(6) 有 3 个边界平衡点, 分别为 $E_0(0, 0)$ 、 $E_1(0, 1.5)$ 和 $E_2(0.5, 0)$.

对系统(6) 的系数进行计算可得 $pm=1.5 > 1$, 于是由引理 2—4 和定理 2 可知: $E_0(0, 0)$ 是不稳定的, $E_2(0.5, 0)$ 是鞍点, $E_1(0, 1.5)$ 是全局渐近稳定的. 图 1

为系统(6) 的相图. 由图 1 可以看出, 系统(6) 的解均趋向于平衡点 $E_1(0, 1.5)$, 即食饵绝灭, 捕食者生存.

例 2 考虑如下系统的稳定性:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x-y) - hx, \\ \frac{dy}{dt} = y(0.5+x-y), \end{cases} \quad (7)$$

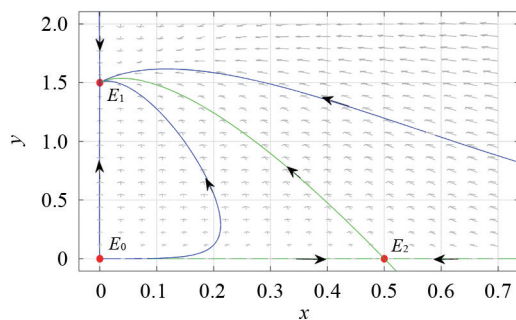


图 1 系统(6) 的相图

其中 $p = 1$, $b = 1$, $m = 0.5$, 且 $pm = 0.5 < 1$.

1) 在式(7)中取 $h = 0.3$, 并对系统(7)的系数进行计算可得 $h < 1 - pm = 0.5$. 于是由引理1可知, 系统(7)有3个边界平衡点($E_0(0,0)$ 、 $E_1(0,0.5)$ 、 $E_2(0.7,0)$)和1个正平衡点($E^*(0.1,0.6)$). 再由引理2—5和定理3可知: $E_0(0,0)$ 是不稳定的, $E_1(0,0.5)$ 是鞍点, $E_2(0.7,0)$ 是鞍点, $E^*(0.1,0.6)$ 是全局渐近稳定的. 图2为 $h = 0.3$ 时系统(7)的相图. 由图2可以看出, 系统(7)的解均趋向于平衡点 $E^*(0.1,0.6)$, 即食饵和捕食者共存.

2) 在式(7)中取 $h = 0.7$, 并对系统(7)的系数进行计算可得 $1 - pm = 0.5 < h < 1$. 于是由引理1可知, 系统(7)有3个边界平衡点 $E_0(0,0)$ 、 $E_1(0,0.5)$ 和 $E_2(0.3,0)$. 再由引理2—4和定理3可知: $E_0(0,0)$ 是不稳定的, $E_2(0.3,0)$ 是鞍点, $E_1(0,0.5)$ 是全局渐近稳定的. 图3为 $h = 0.7$ 时系统(7)的相图. 由图3可以看出, 系统(7)的解均趋向于平衡点 $E_1(0,0.5)$, 即食饵绝灭, 捕食者生存.

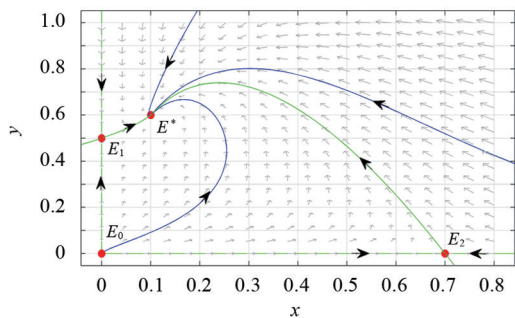


图2 $h = 0.3$ 时系统(7)的相图

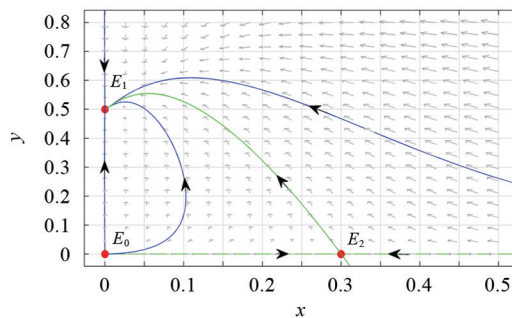


图3 $h = 0.7$ 时系统(7)的相图

4 结论

本文对一类具有线性捕获和其他食物来源的捕食-食饵模型的稳定性进行研究表明:当捕食者的其他食物来源较多时,捕食者的种群数量会增多,从而导致食饵种群绝灭;当捕食者的其他食物来源较少时,食饵种群的捕获率会改变系统的稳定性,即少量的捕获会保持食饵和捕食者种群的共存,而过度捕获则会导致食饵种群的绝灭. 本文仅对系统(1)线性捕获的情形进行了研究,在今后研究中我们将对系统(1)的常数捕获及非线性捕获情形进行研究.

参考文献:

- [1] SHANG Z C, QIAO Y H, DUAN L J, et al. Bifurcation analysis in a predator-prey system with an increasing functional response and constant-yield prey harvesting[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021,190: 976-1002.
- [2] CHRISTIAN C G. Bifurcations on a discontinuous Leslie-Grower model with harvesting and alternative food for predators and Holling II functional response[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2023,116:106800.
- [3] MORTUJA M G, CHAUBE M K, KUMAR S. Dynamic analysis of a predator-prey system with nonlinear prey-harvesting and square root functional response[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2021,148:111071.
- [4] HU D P, CAO H J. Stability and bifurcation analysis in a predator-prey system with Michaelis-Menten type predator harvesting[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2017,33:58-82.
- [5] SEN G, GHORAI S, SHARMA S, et al. Allee effect in prey's growth reduces the dynamical complexity in prey-predator model with generalist predator[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021,91:768-790.
- [6] ARANCIBIA C, FLORES J. Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with Holling type II functional response, Allee effect and a generalist predator[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021,188:1-22.
- [7] MONDAL S, SAMANTA G P. Dynamics of an additional food provided predator-prey system with prey refuge dependent on both species and constant harvest in predator[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019,534:122301.
- [8] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985.