第 49 卷 第 1 期
2023 年 3 月
延边大学学报(自然科学版)
Journal of Yanbian University (Natural Science Edition)
Vol. 49 No. 1
Mar. 2023

文章编号： 1004-4353(2023)01-0016-05

(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统解的整体存在性

周羽， 金艳
（延边大学 理学院，吉林 延吉 133002）

摘要： 通过降维(1+2)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统得到了(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统，并在 Lorenz 规范条件下研究了(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统解的整体存在性. 应用 Sobolev 空间相关理论，证明了(1+1)维 Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统的解在 $H^2 \times H^1$ 上具有整体存在性，同时还验证了该系统所对应的能量函数是守恒的.

关键词： Maxwell-Chern-Simons-Higgs 系统；规范不变性；降维模型；整体解
中图分类号： O175.29　　**文献标识码：** A

Global existence of Maxwell-Chern-Simons-Higgs system in (1+1)-dimension

ZHOU Yu， JIN Yan
(*College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The (1+1)-dimensional Maxwell-Chern-Simons-Higgs system is obtained by reducing the (1+2)-dimensional Maxwell-Chern-Simons-Higgs system, and the global existence of solutions of (1+1)-dimensional Maxwell-Chern-Simons-Higgs system is studied under Lorenz gauge condition. Applying the relevant theory of Sobolev space, it is proved that the solution of the (1+1)-dimensional Maxwell-Chern-Simons-Higgs system has global existence in $H^2 \times H^1$. Verfication indicate that the corresponding energy function of the system is conservative.

Keywords: Maxwell-Chern-Simons-Higgs system; specification invariance; reduced dimension model; global solution

0 引言

1990 年，Lee 等[1]提出了如下 Maxwell-Chern-Simons-Higgs(MCSH)自对偶模型：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu\nu\rho}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{A}_{\rho} + D_{\mu}\phi\overline{D^{\mu}\phi} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}N\partial^{\mu}N - U(|\phi|^2, N), \tag{1}$$

其中：$U(|\phi|^2, N) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}|\phi|^2 + \kappa N - \mathrm{e}v^2)^2 + \mathrm{e}^2N^2|\phi|^2$，e是电子的电荷；$\kappa$ ($\kappa > 0$) 是 Chern-Simons 耦合常数；v 是非零常数；$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu\nu\rho}$ 是 Levi-Civita 张量，且 $\boldsymbol{\varepsilon}^{012} = 1$. 由于 MCSH 系统与物理学中的规范场理

收稿日期： 2022-10-09
第一作者： 周羽(1996—)，女，硕士研究生，研究方向为偏微分方程.
通信作者： 金艳(1986—)，女，硕士，助教，研究方向为金融数学.

论密切相关，因此一些学者对其进行了研究，并取得了诸多良好成果. 2002 年，Chae 等[2] 在洛伦兹规范条件下证明了(1＋2) 维 MCSH 系统的解在 $H^2 \times H^1$ 上具有整体存在性. 2014 年，Huh[3] 研究了(1＋1) 维 Chern-Simons-Higgs 系统的有限能量解的整体存在性，并应用零形式和 wave-Sobolev 空间证明了其解的局部适定性. 2021 年，Jin 等[4] 研究了带有洛伦兹规范的(1＋1)维 Maxwell-Chern-Simons-O(3)-sigma 系统解的适定性. 基于上述研究，本文在(1＋1)维 Minkowski 空间上研究 MCSH 系统，证明了该系统的有限能量解具有整体存在性，并验证了该系统所对应的能量函数是守恒的.

1　降维系统

设(1＋2) 维 MCSH 系统(式(1)) 与变量 x_2 无关. 于是将式(1) 中的符号 A_2 替换为 B 可得如下(1＋1) 维 MCSH 系统：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{01}^2 + \partial_\mu B \partial^\mu B + \partial_\mu N \partial^\mu N) + D_\mu \phi \overline{D^\mu \phi} + \frac{\kappa}{2}(\boldsymbol{A}_0 \partial_1 B - \boldsymbol{A}_1 \partial_0 B + B\boldsymbol{F}_{01}) - V. \tag{2}$$

其中：$V(|\phi|^2, N, B) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}|\phi|^2 + \kappa N - \mathrm{e}v^2)^2 + \mathrm{e}^2(N^2 + B)^2 |\phi|^2$，e 是电子的电荷；$\kappa$ ($\kappa > 0$) 是 Chern-Simons 耦合常数；v 是非零常数；希腊字母的取值范围为 0 和 1；拉丁字母的取值均为 1；$\partial_0 = \partial_t$；$\partial_1 = \partial_x$. 另外，对于式(2) 中的张量均可用(1＋1) 维 Minkowski 度规($\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1)$) 对其进行升指标和降指标.

在以下研究中，本文用重复指标表示求和记号，用 C 表示各种常量(研究系统解的局部性质时可假设 $T \leqslant 1$，由此此时可用 C 代替光滑函数 $C(T)$)，用 $A \lesssim B$ 表示估计 $A \leqslant CB$，用 $H^s \equiv H^s(\mathbf{R})$ 表示 Sobolev 空间 $W^{s,2}(\mathbf{R})$，并记 $L^2(\mathbf{R}) \equiv H^0$. 定义通常意义下的规范场强和协变导数分别为：

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \triangleq \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu,\ D_\mu \triangleq \partial_\mu - \mathrm{i}\mathrm{e}\boldsymbol{A}_\mu. \tag{3}$$

定义通常意义下的规范变换为：

$$\phi \to \phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{e}\chi}\phi,\ \boldsymbol{A}_\mu \to \boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{A}_\mu + \partial_\mu \chi,\ D_\mu \to D'_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}\mathrm{e}\boldsymbol{A}'_\mu, \tag{4}$$

其中 $\chi: \mathbf{R}^{1+2} \to \mathbf{R}$ 是光滑函数. 根据酉群定义知 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{e}\chi} \in U(1) = \{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} | \alpha \in \mathbf{R}\}$. 将式(4) 代入式(2) 计算可知，拉格朗日密度(2) 在规范变换下保持不变. 利用变分法对式(1) 进行计算得与其对应的 Euler-Lagrange 方程为：

$$\partial_1 \boldsymbol{F}_{01} + \kappa \partial_1 B + 2\mathrm{e}\,\mathrm{Im}(\phi \overline{D_0 \phi}) = 0, \tag{5}$$

$$\partial_0 \boldsymbol{F}_{01} + \kappa \partial_0 B + 2\mathrm{e}\,\mathrm{Im}(\phi \overline{D_1 \phi}) = 0, \tag{6}$$

$$\partial_0 \partial_0 B - \partial_1 \partial_1 B - \kappa \boldsymbol{F}_{01} + V_B(|\phi|^2, N, B) = 0, \tag{7}$$

$$\partial_0 \partial_0 N - \partial_1 \partial_1 N + V_N(|\phi|^2, N, B) = 0, \tag{8}$$

$$D_0 D_0 \phi - D_1 D_1 \phi + V_{\bar{\phi}}(|\phi|^2, N, B) = 0. \tag{9}$$

根据式(5)—(9) 构造的(1＋1) 维 MCSH 系统所对应的守恒能量函数为：

$$E(t) = \sum_{\mu=0,1} \int_{\mathbf{R}^2} [\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{01}^2 + |\partial_\mu B|^2 + |\partial_\mu N|^2) + |D_\mu \phi|^2 + V(|\phi|^2, N, B)]\mathrm{d}x \equiv E(0), \tag{10}$$

其中 $V_{\bar{\phi}}$、V_N 和 V_B 分别表示 $V(|\phi|^2, N, B)$ 对变量 $\bar{\phi}$、N 和 B 求偏导数. 由文献[4] 可知，有限能量解 $(\phi, N, \boldsymbol{A}_\mu, B)$ 存在如下两种可能的自然渐近条件：

1) 非拓扑边界条件：$(\phi, N, \boldsymbol{A}_\mu, B) \to (0, \mathrm{e}v^2/\kappa, 0, 0)$，$|x| \to \infty$.

2) 拓扑边界条件：$(|\phi|^2, N, \boldsymbol{A}_\mu, B) \to (v^2, 0, 0, 0)$，$|x| \to \infty$.

由于讨论拓扑边界条件情形的方法与讨论非拓扑边界条件情形相似，故本文仅就非拓扑边界条件的情形进行讨论. 在讨论时，用 $\widetilde{N} \equiv N - \mathrm{e}v^2/\kappa$ 代替原系统中的 N，并仍用 N 表示 $\widetilde{N}$. 由此可得当

$|x| \to \infty$ 时有$(\phi, N, \boldsymbol{A}_\mu, B) \to (0,0,0,0)$，该解即为系统在标准 Sobolev 空间中的解. 对式(5)—(9)赋予洛伦兹规范条件$(\partial_\mu \boldsymbol{A}^\mu = \partial_0 \boldsymbol{A}_0 - \partial_1 \boldsymbol{A}_1 = 0)$，并在该条件下引入记号$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$，于是可得如下柯西问题：

$$
\begin{aligned}
&\Box \boldsymbol{A}_0 = -\kappa \partial_1 B - 2\mathrm{e}\,\mathrm{Im}(\phi \overline{D_0 \phi}),\\
&\Box \boldsymbol{A}_1 = -\kappa \partial_0 B - 2\mathrm{e}\,\mathrm{Im}(\phi \overline{D_1 \phi}),\\
&\Box B = \kappa \boldsymbol{F}_{01} - 2\mathrm{e}^2 B |\phi|^2,\\
&\Box N = -V_N(|\phi|^2, N, B),\\
&\Box \phi = 2\mathrm{i}\mathrm{e}\boldsymbol{A}_\mu \partial^\mu \phi + \mathrm{e}^2 \boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{A}^\mu \phi - V_{\bar{\phi}}(|\phi|^2, N, B).
\end{aligned} \tag{11}
$$

上述柯西问题对应的初始数据为：

$$
\begin{aligned}
&\phi(0,\cdot) = \varphi_0,\ \partial_t \phi(0,\cdot) = \varphi_1,\ \boldsymbol{A}_\mu(0,\cdot) = a_{0\mu},\ \partial_t \boldsymbol{A}_\mu(0,\cdot) = a_{1\mu},\\
&B(0,\cdot) = b_0,\ \partial_t B(0,\cdot) = b_1,\ N(0,\cdot) = n_0,\ \partial_t N(0,\cdot) = n_1.
\end{aligned} \tag{12}
$$

上述柯西问题应满足的约束方程为：

$$
\begin{aligned}
&a_{10} - \partial_1 a_{01} = 0,\\
&\partial_1 \partial_1 a_{00} - \partial_1 a_{11} - \kappa \partial_1 b_0 - 2\mathrm{e}\,\mathrm{Im}(\phi_0 \bar{\phi}_1 + \mathrm{i}\mathrm{e} a_{00} \phi_0^2) = 0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

2 主要结果及其证明

2.1 预备知识

为便于计算，本文取 Chern-Simons 耦合常数 $\kappa = 1$.

定义 1 定义空间 $H^s \times H^{s-1}$ 上的范数为$\|u(\cdot,t)\|_{H^s \times H^{s-1}} = \|u(\cdot,t)\|_{H^s} + \|\partial_0 u(\cdot,t)\|_{H^{s-1}}$，记$u_0 \equiv u(\cdot,t)$，$u_1 \equiv \partial_t u(\cdot,t)$，则$\|u_0\|_{H^2 \times H^1} = \|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{H^1}$.

引理 1[5] 设 $s \geqslant 1$，$(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$，$h \in L^1([0,T], H^{s-1})$，则线性波动方程的柯西问题 $\begin{cases} \Box u = h(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x) \end{cases}$ 存在唯一解，且该解满足 $u \in C([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1})$. 另外，对于每个 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有下式成立：

$$
\|u(\cdot,t)\|_{H^s \times H^{s-1}} \leqslant C(1+t)\left(\|u_0\|_{H^s \times H^{s-1}} + \int_0^t \|h(\cdot,\tau)\|_{H^{s-1}} \mathrm{d}\tau\right).
$$

2.2 解的整体存在性及其证明

定理 1 设初始数据(12)的存在空间为 $\varphi_0 \in H^2$，$\varphi_1 \in H^1$，$a_{0\mu} \in H^2$，$a_{1\mu} \in H^1$，$b_0 \in H^2$，$b_1 \in H^1$，$n_0 \in H^2$，$n_1 \in H^1$，且该初始数据满足约束条件(13)，则系统(11)—(12)存在唯一的整体解，且该解满足 $\phi, \boldsymbol{A}_\mu, B, N \in C([0,\infty), H^2(\mathbf{R})) \cap C^1([0,\infty), H^1(\mathbf{R}))$.

证明 由定义 1 可知，若要证明 MCSH 系统的柯西问题解的整体存在性，只需找到如下定义量$E(t) \triangleq \|\phi(\cdot,t)\|_{H^2 \times H^1} + \|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{H^2 \times H^1} + \|B(\cdot,t)\|_{H^2 \times H^1} + \|N(\cdot,t)\|_{H^2 \times H^1}$ 的控制界限即可. 为书写简便，记 $E_0 \equiv E(0)$，用 P 表示关于 $E(0)$、E_0、$E_0^{\frac{1}{2}}$ 和 $E_0^{\frac{3}{2}}$ 的多项式. 以下分 3 步对系统解的 $H^2 \times H^1$-范数进行估计.

1) 利用初始数据(12)和能量 E_0 对$\|\phi(\cdot,t)\|_{L^2}$、$\|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{L^2}$、$\|B(\cdot,t)\|_{L^2}$ 和$\|N(\cdot,t)\|_{L^2}$ 进行估计. 首先考虑 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 的 L^2-范数估计：

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|\phi(\cdot,t)\|_{L^2} \|D_0 \phi(\cdot,t)\|_{L^2} \leqslant E_0^{\frac{1}{2}} \|\phi(\cdot,t)\|_{L^2},
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{L^2} \|\boldsymbol{F}_{01}(\cdot,t)\|_{L^2} \leqslant \sqrt{2} E_0^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{L^2},
$$

其中$\|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{L^2}^2=\int_{\mathbf{R}^2}(\boldsymbol{A}_0^2(x,t)+\boldsymbol{A}_1^2(x,t))\mathrm{d}x$. 根据洛伦兹规范条件$\partial_0\boldsymbol{A}_0-\partial_1\boldsymbol{A}_1=0$可得$\phi$和$\boldsymbol{A}$的$L^2$-范数估计为:

$$\|\phi(\cdot,t)\|_{L^2}\leqslant\|\varphi_0\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}}t,\ \|\boldsymbol{A}(\cdot,t)\|_{L^2}\lesssim\sum_{\mu=0,1}\|a_{0\mu}\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}}t.$$

类似上述方法还可得B和N的L^2-范数估计为$\|B(\cdot,t)\|_{L^2}\lesssim\|b_0\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}}t$和$\|N(\cdot,t)\|_{L^2}\lesssim\|n_0\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}}t$. 利用协变 Gagliardo-Nirenberg 不等式[6]对ϕ进行L^∞-范数估计可得:

$$\|\phi(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leqslant C\|\phi(\cdot,t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|D_1\phi(\cdot,t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\lesssim(\|\varphi_0\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}})(1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

由上式进一步可得$\partial_\mu\phi$的L^2-范数估计为:

$$\|\partial_\mu\phi(\cdot,t)\|_{L^2}\lesssim E_0^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{\mu=0,1}\|a_{0\mu}\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}}t\Big)(\|\varphi_0\|_{L^2}+E_0^{\frac{1}{2}})(1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

2) 对$\|B\|_{H^2\times H^1}$和$\|N\|_{H^2\times H^1}$进行估计. 根据 Sobolev 嵌入定理(空间H^1嵌入L^∞)可得:

$$\|B\|_{H^2\times H^1}\lesssim(1+t)[\|b_0\|_{H^2\times H^1}+P(\|\varphi_0\|_{L^2},\|b_0\|_{L^2},E_0^{\frac{1}{2}},E_0,E_0^{\frac{3}{2}})t(1+t)^2],$$

$$\|N\|_{H^2\times H^1}\lesssim(1+t)[\|n_0\|_{H^2\times H^1}+P(\|\varphi_0\|_{L^2},\|n_0\|_{L^2},E_0^{\frac{1}{2}},E_0,E_0^{\frac{3}{2}})t(1+t)^2].$$

3) 对$\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}$和$\|\phi\|_{H^2\times H^1}$进行估计. 首先,考虑$\|D_\mu D_1\phi\|_{L^2}$的估计. 利用协变Gagliardo-Nirenberg不等式[6]对$D_\mu\phi$进行L^∞-范数估计可得:

$$\|D_\mu\phi\|_{L^\infty}\leqslant C\|D_\mu\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|D_1D_\mu\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\lesssim E_0^{\frac{1}{4}}\|D_1D_\mu\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

用协变导数算符D_1作用于式(9)的两端可得:

$$\begin{aligned}0=&D_1(D_0D_0\phi-D_1D_1\phi+V_{\bar\phi})=D_1D_0D_0\phi-D_1D_1D_1\phi+D_1V_{\bar\phi}=\\&D_0D_0D_1\phi-D_1D_1D_1\phi+\mathrm{i}\mathrm{e}\phi\partial_0\boldsymbol{F}_{01}+2\mathrm{i}\mathrm{e}\boldsymbol{F}_{01}D_0\phi+\mathrm{e}\phi\partial_1(\mathrm{e}|\phi|^2+N)+\\&\mathrm{e}(\mathrm{e}|\phi|^2+N)D_1\phi+\mathrm{e}^2[B^2+(N+\mathrm{e}v^2)^2]D_1\phi+\mathrm{e}^2\phi\partial_1[B^2+(N+\mathrm{e}v^2)^2].\end{aligned}\tag{14}$$

用$\overline{D_0D_1\phi}$乘以式(14)后,在所得等式的两边取其实部,并对所得的等式在区域$\mathbf{R}$上对x进行积分可得:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}(D_0D_0-D_1D_1)D_1\phi\overline{D_0D_1\phi}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}[\mathrm{e}\phi\overline{D_0D_1\phi}\,\partial_1(\mathrm{e}|\phi|^2+N)+\\&\mathrm{e}(\mathrm{e}|\phi|^2+N)D_1\phi\overline{D_0D_\nu\phi}+\mathrm{e}^2(B^2+(N+\mathrm{e}v^2)^2)D_1\phi\overline{D_0D_1\phi}+\\&\mathrm{e}^2\partial_1(B^2+(N+\mathrm{e}v^2)^2)\phi\overline{D_0D_1\phi}\ ]\mathrm{d}x+\mathrm{e}\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}(\phi\overline{D_0D_1\phi}\,\partial_0\boldsymbol{F}_{01}+2\boldsymbol{F}_{01}D_0\phi\overline{D_0D_1\phi})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由上式可得$D_\mu D_1\phi$的L^2-范数估计为:

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=0,1}\|D_\mu D_1\phi\|_{L^2}\lesssim\sum_{\mu=0,1}\|D_\mu D_1\phi(0,x)\|_{L^2}+[\|\phi\|_{L^\infty}^2E_0^{\frac{1}{2}}+\|\phi\|_{L^\infty}E_0^{\frac{1}{2}}+\|N\|_{L^\infty}E_0^{\frac{1}{2}}+\\&(\|B\|_{H^2\times H^1}^2+\|N\|_{H^2\times H^1}^2+\|N\|_{H^2\times H^1}+1)E_0^{\frac{1}{2}}+\|B\|_{H^2\times H^1}\|\phi\|_{L^\infty}E_0^{\frac{1}{2}}+\\&(\|N\|_{H^2\times H^1}+1)\|\phi\|_{L^\infty}E_0^{\frac{1}{2}}+(1+\|\phi\|_{L^\infty})E_0^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L^\infty}+(1+\|\phi\|_{L^\infty})E_0]t.\end{aligned}$$

由上式进一步可得$\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}$的估计为:

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}\lesssim(1+t)\sum_{\mu=0,1}\|a_{0\mu}\|_{H^2\times H^1}+\int_0^t(E_0^{\frac{1}{2}}+\|\phi\|_{L^\infty}E_0^{\frac{1}{2}}+\|B\|_{H^2\times H^1}+\|D_\mu\phi\|_{L^\infty}\|\partial_1\phi\|_{L^2}+\\&\|\phi\|_{L^\infty}\|D_1D_\mu\phi\|_{L^2}+\|\phi\|_{L^\infty}\|D_\mu\phi\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{A}\|_{L^2})\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

综上,由定义 1 可知,若要估计$\|\phi\|_{H^2\times H^1}$,只需对$\partial_1\partial_1\phi$和$\partial_1\partial_0\phi$的L^2-范数($\|\partial_\mu\partial_1\phi\|_{L^2}\lesssim\|D_\mu D_1\phi\|_{L^2}+\|\phi\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}+\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}\|\partial_\mu\phi\|_{L^2}+\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}\|\partial_1\phi\|_{L^2}+\|\boldsymbol{A}\|_{H^2\times H^1}^2\|\phi\|_{L^2}$)进行估计即可. 证毕.

3 系统所对应的能量函数守恒的验证

为验证能量函数 $E(t)$ 关于时间是守恒的,本文对 $E(t)$ 关于 t 求偏导数后再结合式(6)—(9) 进行计算得:

$$\partial_0 E(t) = \partial_0 \left[\sum_{\mu=0,1} \int_{\mathbf{R}^2} (\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{01}^2 + |\partial_\mu B|^2 + |\partial_\mu N|^2) + |D_\mu \phi|^2 + V(|\phi|^2, N, B))\mathrm{d}x \right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}} (-2\mathrm{e}\boldsymbol{F}_{01}\mathrm{Im}(\phi\overline{D_1\phi}) - V_B\partial_0 B - V_N\partial_0 N)\mathrm{d}x - 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}} V_{\bar{\phi}}\overline{D_0\phi}\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}\boldsymbol{F}_{01}\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}(\phi\overline{D_1\phi})\,\mathrm{d}x +$$

$$\int_{\mathbf{R}} (2\mathrm{Re}(V_{\bar{\phi}} D_0\bar{\phi}) + V_N\partial_0 N + V_B\partial_0 B)\mathrm{d}x = 0,$$

其中 $V(|\phi|^2, N, B) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}|\phi|^2 + \kappa N)^2 + \mathrm{e}^2 B^2|\phi|^2 + \mathrm{e}^2\left(N + \frac{\mathrm{e}v^2}{\kappa}\right)^2|\phi|^2$. 由上式可知 $E(t) \equiv E(0)$,即系统所对应的能量函数关于时间是守恒的,证毕.

参考文献:

[1] LEE C, LEE K, MIN H. Self-dual Maxwell-Chern-Simons solitons[J]. Phys Lett B, 1990,252:79-83.

[2] CHAE D, CHAE M. The global existence in the Cauchy problem of the Maxwell-Chern-Simons-Higgs system[J]. J Math Phys, 2002,43:5470-5482.

[3] HUH H. Global energy solution of Chern-Simons-Higgs equations in one space dimension[J]. J Math Anal Appl, 2014,420(1):781-791.

[4] JIN G, MOON B. Local and global solutions to the O(3)-sigma model with the Maxwell and the Chern-Simons gauges in R^{1+1}[J]. J Math Anal Appl, 2021,495:124715.

[5] SOGGE C D. Lectures on nonlinear wave equations[M]. Boston MA: International Press, 1995.

[6] GINIBRE J, VELO G. The Cauchy problem for coupled Yang-Mills and scalar fields in the temporal gauge[J]. Comm Math Phys, 1981,82(1):1-28.

[7] HUH H. Cauchy problems of the gauged sigma model[J]. J Math Phys, 2005,46(5):052303.

[8] YUAN J. Well-posedness of Maxwell-Chern-Simons-Higgs system in the Lorenz gauge[J]. Discrete Contin Dyn Syst Ser A, 2014,34(5):2389-2403.

[9] CHERN S, SIMONS J. Characteristic forms and geometric invariants[J]. Ann Math, 1974,99(1):48-69.

[10] WITTEN E. Quantum field theory and the jones polynomial[J]. Comm Math Phys, 1989,121(3):351-399.

[11] HUH H, JIN G. Remarks on Chern-Simons gauged O(3) sigma model in one space dimension[J]. J Math Phys, 2019,60:021508.

[12] HAN J, SONG K. Topological solutions of the self-dual equations for the generalized Maxwell-Chern-Simons-Higgs model[J]. J Math Anal Appl, 2021,504:125327.