文章编号: 1004-4353(2023)01-0001-07

一类含 CFC-分数阶导数微分方程的 Lyapunov 不等式及其解的存在唯一性

王枫， 葛琦
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究了一类含 CFC-分数阶导数的微分方程:

$$\begin{cases}({}^{\mathrm{CFC}}_{0}D^{p}x)(t)+u(t)x(t)=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1;\\ x(0)=x'(0)=0,\ ax(1)+bx'(1)=0,\ a>0,\ b>0,\ 0<\dfrac{b}{a}<1.\end{cases}$$

首先,分析了该方程所对应的格林函数的性质;其次,根据格林函数的性质得到了该微分方程的 Lyapunov 不等式;再次,将该类方程一般化,并利用 Banach 压缩映像原理建立了此类微分方程解的存在唯一性;最后,利用分数阶 Gronwall 不等式得到了微分方程 $({}^{\mathrm{CFC}}_{0}D^{p}x)(t)+f(t,x(t))=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1$ 解的 Hyers-Ulam 稳定性.

关键词: CFC-分数阶导数; Lyapunov 不等式; 存在唯一性; 分数阶 Gronwall 不等式; Hyers-Ulam 稳定性
中图分类号: O175.8　　　**文献标识码**: A

Lyapunov inequalities and existence and uniqueness of solutions for a class of differential equations with CFC-fractional derivatives

WANG Feng， GE Qi
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: A class of fractional derivative differential equations with CFC is studied:

$$\begin{cases}({}^{\mathrm{CFC}}_{0}D^{p}x)(t)+u(t)x(t)=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1;\\ x(0)=x'(0)=0,\ ax(1)+bx'(1)=0,\ a>0,\ b>0,\ 0<\dfrac{b}{a}<1.\end{cases}$$

Firstly, the properties of the Green function corresponding to this kind of equation are analyzed, and then Lyapunov inequality for the kind of differential equation is obtained according to the properties of the Green function. Then, the kind of equation is generalized, and the existence and uniqueness of the solution of this kind of differential equation is established by using the Banach contraction mapping principle. Finally, the Hyers-Ulam stability of the solution of the differential equation $({}^{\mathrm{CFC}}_{0}D^{p}x)(t)+f(t,x(t))=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1$ is obtained by using the fractional Gronwall inequality.

Keywords: CFC-fractional derivative; Lyapunov inequality; existence and uniqueness; fractional Gronwall inequality; Hyers-Ulam stability

收稿日期: 2022-12-21
基金项目: 吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH2022527KJ)
第一作者: 王枫(1997—),男,硕士研究生,研究方向为常微分方程.
通信作者: 葛琦(1975—),女,硕士,教授,研究方向为常微分方程.

0 引言

1907年,Lyapunov[1]提出了下列边值问题:

$$\begin{cases} y''(t)+q(t)y(t)=0,\ a<t<b; \\ y(a)=y(b)=0. \end{cases}$$

其中:$q(t)$是实值连续函数.若方程存在非零解,则有Lyapunov不等式$\int_a^b|q(s)\mathrm{d}s|>\frac{4}{b-a}$成立.

近年来,随着分数阶微分方程在各领域的广泛应用,学者们又定义了许多不同的分数阶导数.例如:2018年,文献[2]的作者研究了如下分数阶微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} ({}_a^{\mathrm{CF}}D^{\alpha}u)(t)+q(t)u(t)=0,\ 1<\alpha\leqslant 2,\ t\in(a,b); \\ u(a)=u(b)=0. \end{cases}$$

其中:${}_a^{\mathrm{CF}}D^{\alpha}$是$\alpha$阶Caputo-Fabrizio分数阶导数.若方程有非零解,则有Lyapunov不等式$\int_a^b|q(s)\mathrm{d}s|>\frac{4(a-1)(b-a)}{((a-1)(b-a)-2+a)^2}$成立.其他相关研究成果详见文献[3-6].受上述文献启发,本文研究以下微分方程的Lyapunov不等式:

$$({}_0^{\mathrm{CFC}}D^{p}x)(t)+u(t)x(t)=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1; \tag{1}$$

$$x(0)=x'(0)=0,\ ax(1)+bx'(1)=0,\ a>0,\ b>0,\ 0<\frac{b}{a}<1. \tag{2}$$

其中:$u(t)$是定义在$[0,1]$上的实值连续函数.同时本文还将研究以下微分方程解的存在唯一性及其Hyers-Ulam稳定性:

$$({}_0^{\mathrm{CFC}}D^{p}x)(t)+f(t,x(t))=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1; \tag{3}$$

$$x(0)=x'(0)=0,\ ax(1)+bx'(1)=0,\ a>0,\ b>0,\ 0<\frac{b}{a}<1. \tag{4}$$

1 预备知识

定义1[7] 定义函数$f(t)\in L^1([0,1],\mathbf{R})$的$s$阶黎曼刘维尔(Riemann-Liouville)分数阶积分为:

$$(I_{0^+}^{s}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^t(t-\tau)^{s-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中$s>0$,$\tau>0$,$\Gamma(\cdot)$为Gamma函数.

定义2[8] 设函数f是定义在$[0,1]$上的实值函数.定义函数f的α($\alpha\in(0,1]$)阶Caputo-Fabrizio分数阶积分为$({}_0^{\mathrm{CF}}I^{\alpha}f)(t)=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t)+\frac{\alpha}{B(\alpha)}\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$,其中$B\in([0,1],\mathbf{R}^+)$,$B(0)=B(1)=1$.

定义3[9] 设$f^{(n)}$是定义在$[0,1]$的实值函数.定义f的α($\alpha\in(n,n+1]$,$n\geqslant 1$)阶Caputo-Fabrizio分数阶积分为$({}_a^{\mathrm{CF}}I^{\alpha}f)(t)=(I_0^n\,{}_a^{\mathrm{CF}}I^{\beta}f)(t)$,其中$I_0^n$为$n$阶的Riemann-Liouville分数阶积分,$\beta=\alpha-n$.

定义4[9] 设函数f是定义在$[0,1]$上的实值函数.定义函数f在左Caputo和Fabrizio意义下的α($\alpha\in(0,1]$)阶左Caputo分数阶导数(简称CFC-分数阶导数)为

$$({}_0^{\mathrm{CFC}}D^{\alpha}f)(t)=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^t f'(s)\exp\left[-\alpha\,\frac{(t-s)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]\mathrm{d}s.$$

定义5[9] 设$f^{(n)}$是定义在$[0,1]$的实值函数.定义函数f的α($\alpha\in(n,n+1]$,$n\geqslant 1$)阶CFC-分数阶导数为$({}_0^{\mathrm{CFC}}D^{\alpha}f)(t)=({}_0^{\mathrm{CFC}}D^{\beta}f^{(n)})(t)$,其中$\beta=\alpha-n$.

定义6 若存在一个正值常数K,使得对任意的$\varepsilon>0$和对所有满足不等式$|({}_0^{\mathrm{CFC}}D^{p}y)(t)+f(t,y(t))|\leqslant\varepsilon$,$t\in[0,1]$的解$y(t)\in C([0,1],\mathbf{R})$,都存在微分方程(3)的一个解$x(t)\in C([0,1],$

$\mathbf{R}$)，且使得 $|x(t)-y(t)|\leqslant K\epsilon$ 成立，则称微分方程(3) 是 Hyers-Ulam 稳定的.

性质 1[9]　设 $\alpha\in(n,n+1]$，$n\geqslant 1$，$u(t)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，则有

$$({}_0^{\mathrm{CF}}I^{\alpha}\,{}_0^{\mathrm{CFC}}D^{\alpha}u)(t)=u(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{u^{(k)}(0)}{k!}t^k.$$

引理 1[10]（分数阶 Gronwall 不等式）　设 $\beta>0$，$u(x)$ 在 $[0,h)$ $(h\leqslant+\infty)$ 上是局部可积非负函数，$g(x)$ 是定义在 $[0,h)$ 上的非负单调不减的连续有界函数. 如果 $f(x)$ 是 $[0,h)$ 上的非负局部可积函数，且满足 $f(x)\leqslant u(x)+g(x)\int_0^x(x-t)^{\beta-1}f(t)\mathrm{d}t$，则有 $f(x)\leqslant u(x)+\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(g(x)\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)}\cdot(x-t)^{k\beta-1}u(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x<h$ 成立.

引理 2　微分方程(1) 和(2) 等价于积分方程 $x(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)x(s)\mathrm{d}s$，其中格林函数 $G(t,s)=$

$$\begin{cases}\dfrac{1-\beta}{B(\beta)}\left(\dfrac{a(1-s)+b}{a+2b}t^2-(t-s)\right)+\dfrac{\beta}{2B(\beta)}\left(\dfrac{a(1-s)^2+2b(1-s)}{a+2b}t^2-(t-s)^2\right),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\[2ex] \dfrac{1-\beta}{B(\beta)}\dfrac{a(1-s)+b}{a+2b}t^2+\dfrac{\beta}{2B(\beta)}\dfrac{a(1-s)^2+2b(1-s)}{a+2b}t^2,\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

证明　在式(1) 两边同时作用 ${}_0^{\mathrm{CF}}I^{p}$ 后再利用性质 1 和定义 4 可得：

$$x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2-({}_0^{\mathrm{CF}}I^{p}ux)(t)=c_0+c_1t+c_2t^2-\int_0^t(t-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s,\tag{5}$$

其中 $Q(s,x(s))=\frac{1-\beta}{B(\beta)}u(s)x(s)+\frac{\beta}{B(\beta)}\int_0^s u(\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$，$\beta=p-2$，$c_i(i=0,1,2)$ 为常数. 根据条件 $x(0)=0$，对式(5) 进行计算可得 $c_0=0$. 为了确定常数 c_1，计算下式：

$$x'(t)=c_1+2c_2t-\int_0^t Q(s,x(s))\mathrm{d}s.\tag{6}$$

根据条件 $x'(0)=0$，对式(6) 进行计算可得 $c_1=0$. 为了确定常数 c_2，计算下式：

$$x(1)=c_2-\int_0^1(1-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s,\ x'(1)=2c_2-\int_0^1 Q(s,x(s))\mathrm{d}s.\tag{7}$$

根据条件 $ax(1)+bx'(1)=0$，对式(7) 进行计算可得：

$$a\left(c_2-\int_0^1(1-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s\right)+b\left(2c_2-\int_0^1 Q(s,x(s))\mathrm{d}s\right)=0,$$

即

$$c_2=\frac{a\int_0^1(1-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s+b\int_0^1 Q(s,x(s))\mathrm{d}s}{a+2b}.\tag{8}$$

将式(6)—(8) 代入式(5) 可得：

$$x(t)=\frac{a\int_0^1(1-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s+b\int_0^1 Q(s,x(s))\mathrm{d}s}{a+2b}t^2-\int_0^t(t-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s.\tag{9}$$

为了将式(9) 整理成含有格林函数的形式，对其进一步计算得：

$$\int_0^1(1-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s=\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^1(1-s)u(s)x(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta}{2B(\beta)}\int_0^1(1-s)^2u(s)x(s)\mathrm{d}s,\tag{10}$$

$$\int_0^1 Q(s,x(s))\mathrm{d}s=\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^1 u(s)x(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta}{B(\beta)}\int_0^1(1-s)u(s)x(s)\mathrm{d}s,\tag{11}$$

$$\int_0^t(t-s)Q(s,x(s))\mathrm{d}s=\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^t(t-s)u(s)x(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta}{2B(\beta)}\int_0^t(t-s)^2u(s)x(s)\mathrm{d}s.\tag{12}$$

将式(10)—(12) 代入式(9) 可得：

$$x(t)=$$
$$\int_0^t\left(\frac{1-\beta}{B(\beta)}\left(\frac{a(1-s)+b}{a+2b}t^2-(t-s)\right)+\frac{\beta}{2B(\beta)}\left(\frac{a(1-s)^2+2b(1-s)}{a+2b}t^2-(t-s)^2\right)\right)u(s)x(s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_t^1\left(\frac{1-\beta}{B(\beta)}\frac{a(1-s)+b}{a+2b}+\frac{\beta}{2B(\beta)}\frac{a(1-s)^2+2b(1-s)}{a+2b}\right)t^2u(s)x(s)\mathrm{d}s=\int_0^1G(t,s)u(s)x(s)\mathrm{d}s.$$

2 主要结论及其证明

引理 3 由引理 1 所定义的格林函数 $G(t,s)$ 满足如下不等式:

$$|G(t,s)|\leqslant\frac{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}{4\delta(\delta+1)B(\beta)},\ \delta=\frac{b}{a}.$$

证明 记 $g_1(t,s)=\dfrac{(1-s)+\delta}{1+2\delta}t^2-(t-s)$, $g_2(t,s)=\dfrac{(1-s)^2+2\delta(1-s)}{1+2\delta}t^2-(t-s)^2$.

1) 当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时, $G(t,s)=\dfrac{1-\beta}{B(\beta)}\dfrac{(1-s)+\delta}{1+2\delta}t^2+\dfrac{\beta}{2B(\beta)}\dfrac{(1-s)^2+2\delta(1-s)}{1+2\delta}t^2$. 由于 $\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}>0$, 因此 $G(t,s)$ 在 $t\in[0,s]$ 上单调递增,于是有 $G(0,s)\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s)$, 即

$$0\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{1-\beta}{B(\beta)}\frac{(1-s)+\delta}{1+2\delta}s^2+\frac{\beta}{2B(\beta)}\frac{(1-s)^2+2\delta(1-s)}{1+2\delta}s^2\leqslant$$
$$\frac{1-\beta}{B(\beta)}\frac{4(1+\delta)^3}{27(1+2\delta)}+\frac{\beta}{2B(\beta)}\frac{2+8\delta}{27(1+2\delta)}.\tag{13}$$

2) 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时, $G(t,s)=\dfrac{1-\beta}{B(\beta)}g_1(t,s)+\dfrac{\beta}{2B(\beta)}g_2(t,s)$. 首先研究函数 $g_1(t,s)$. ① $0\leqslant s\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的情况. 对 $\dfrac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}$ 进行计算可知, 当 $t\in(s,\dfrac{1+2\delta}{2(1-s)+2\delta})$ 时, $\dfrac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}<0$; 当 $t\in(\dfrac{1+2\delta}{2(1-s)+2\delta},1)$ 时, $\dfrac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}>0$. 因此,有 $\min\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_1(t,s)=g_1\left(\dfrac{1+2\delta}{2(1-s)+2\delta},s\right)=-\dfrac{1+2\delta}{4(1-s)+4\delta}+s\leqslant 0$. 又由于 $g_1(1,s)=\dfrac{\delta(2s-1)}{1+2\delta}\leqslant 0$, $g_1(s,s)=\dfrac{1-s+\delta}{1+2\delta}s^2\geqslant 0$, 因此有 $\max\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_1(t,s)=\{g_1(s,s)\}$. 由上述可知:

$$|g_1(t,s)|\leqslant\max\left\{g_1(s,s),\left|g_1\left(\frac{1+2\delta}{2(1-s)+2\delta},s\right)\right|\right\}.\tag{14}$$

② $\dfrac{1}{2}<s\leqslant 1$ 的情况. 对 $\dfrac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}$ 进行计算可知, 当 $t\in(s,1)$ 时, $\dfrac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}<0$, 因此有 $\min\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_1(t,s)=g_1(1,s)=\dfrac{(1-s)+\delta}{1+2\delta}-(1-s)>0$, $\max\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_1(t,s)=g_1(s,s)$. 由上述可知:

$$|g_1(t,s)|\leqslant g_1(s,s).\tag{15}$$

由式(14)和式(15)可得,当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时,有:

$$|g_1(t,s)|\leqslant\max\left\{g_1(s,s),\left|g_1\left(\frac{1+2\delta}{2(1-s)+2\delta},s\right)\right|\right\}.\tag{16}$$

其次研究函数 $g_2(t,s)$. 因 $g_2(t,s)=\dfrac{(1-s)^2+2\delta(1-s)}{1+2\delta}t^2-(t-s)^2=s\left(\dfrac{s-2\delta-2}{1+2\delta}t^2+2t-s\right)$, 所以对 $\dfrac{\partial g_2(t,s)}{\partial t}$ 进行计算可知: 当 $t\in(s,\dfrac{1+2\delta}{2\delta+2-s})$ 时, $\dfrac{\partial g_2(t,s)}{\partial t}>0$; 当 $t\in(\dfrac{1+2\delta}{2\delta+2-s},1)$ 时, $\dfrac{\partial g_2(t,s)}{\partial t}<0$. 因此,有 $\max\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_2(t,s)=g_2\left(\dfrac{1+2\delta}{2\delta+2-s},s\right)$, $\min\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_2(t,s)=\min\{g_2(s,s),g_2(1,s)\}$. 又

由于 $g_2(s,s)=\dfrac{(1-s)^2+2\delta(1-s)}{1+2\delta}s^2>0$, $g_2(1,s)=s\dfrac{2\delta-2\delta s}{1+2\delta}>0$,因此有 $\min\limits_{s\leqslant t\leqslant 1}g_2(t,s)>0$. 由上述可知:

$$|g_2(t,s)|\leqslant g_2\left(\frac{1+2\delta}{2\delta+2-s},s\right)=\frac{(1-s)(2\delta+1-s)}{2\delta+2-s}. \tag{17}$$

由于 $g_1(s,s)=\dfrac{(1-s)+\delta}{1+2\delta}s^2\leqslant\dfrac{4(\delta+1)^3}{27(1+2\delta)}\leqslant\dfrac{1+2\delta}{4\delta}$, $\left|g_1\left(\dfrac{1+2\delta}{2(1-s)+2\delta},s\right)\right|=\dfrac{|(1-2s)(2s-1-2\delta)|}{4(1-s)+4\delta}\leqslant\dfrac{1+2\delta}{4\delta}$, $g_2\left(\dfrac{1+2\delta}{2\delta+2-s},s\right)=\dfrac{(1-s)(2\delta+1-s)}{2\delta+2-s}\leqslant\dfrac{2\delta+1}{2\delta+2}$,因此根据式(16) 和式(17) 可知,当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时,有 $|G(t,s)|\leqslant\dfrac{1-\beta}{B(\beta)}\dfrac{1+2\delta}{4\delta}+\dfrac{\beta}{2B(\beta)}\dfrac{2\delta+1}{2\delta+2}$. 于是,再由式(13) 可得 $|G(t,s)|\leqslant\dfrac{1-\beta}{B(\beta)}\dfrac{1+2\delta}{4\delta}+\dfrac{\beta}{2B(\beta)}\dfrac{2\delta+1}{2\delta+2}=\dfrac{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}{4\delta(\delta+1)B(\beta)}$. 证毕.

定理 1　若微分方程(1) 和方程(2) 存在非零解,则如下 Lyapunov 不等式成立:

$$\int_0^1|u(s)|\mathrm{d}s\geqslant\frac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}.$$

证明　若 $x(t)\in C[0,1]$ 为微分方程(1) 和微分方程(2) 的非零解,则由引理 1 可知 $x(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)x(s)\mathrm{d}s$. 记 $S=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$,于是由引理 2 可知

$$S\leqslant\int_0^1\frac{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}{4\delta(\delta+1)B(\beta)}|u(s)|S\mathrm{d}s,$$

即 $\displaystyle\int_0^1|u(s)|\mathrm{d}s\geqslant\frac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}$,证毕.

推论 1　若 $\displaystyle\int_0^1|u(s)|\mathrm{d}s<\frac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}$,则微分方程(1) 和方程(2) 在 $C[0,1]$ 上不存在非零解.

考虑如下特征值问题:

$$({}^{\mathrm{CFC}}_{0}D^{p}x)(t)+\lambda x(t)=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1; \tag{18}$$

$$x(0)=x'(0)=0,\ ax(1)+bx'(1)=0,\ a>0,\ b>0,\ 0<\frac{b}{a}<1. \tag{19}$$

由推论 1 可知,如下推论 2 成立.

推论 2　若 $-\dfrac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}<\lambda<\dfrac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}$,则特征值问题(18) 和(19) 均不存在特征函数.

定理 2　设 $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数,且对任意的 $(t,x),(t,y)\in[0,1]\times\mathbf{R}$ 存在常数 $L>0$,使得 $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|$ 成立. 若 $L<\dfrac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}$,则微分方程(3) 和(4) 存在唯一解.

证明　记空间 $E=C[0,1]$,其范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$. 显然可知空间 E 为 Banach 空间. 于是由引理 1 可得微分方程(3) 和(4) 的等价积分方程为 $x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$. 定义算子 $T:Tx=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$,于是由 f 和 G 的连续性可知 T 是 $E\to E$ 的. 对于 $\forall x,y\in E$,由引理 2 可得:

$$|Tx-Ty|=\left|\int_0^1 G(t,s)(f(s,x(s))-f(s,y(s)))\mathrm{d}s\right|\leqslant L\|x-y\|\int_0^1|G(t,s)|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$L\frac{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}{4\delta(\delta+1)B(\beta)}\|x-y\|<\|x-y\|,$$

因此 T 为压缩算子. 再由 Banach 压缩映像原理可知,存在不动点 x^*,使得 $Tx^*=x^*$. 由此可知,微分方程(3) 和(4) 存在唯一解,证毕.

下面考虑如下含 CFC-分数阶导数非线性微分方程解的 Hyers-Ulam 稳定性:

$$({}_{0}^{\mathrm{CFC}}D^{p}x)(t)+f(t,x(t))=0,\ 2<p<3,\ 0<t<1, \tag{20}$$

其中 $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数,且对任意的 (t,x), $(t,y)\in[0,1]\times\mathbf{R}$ 存在常数 $L>0$,使得 $|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|$ 成立.

定理 3 非线性微分方程(20) 的解是 Hyers-Ulam 稳定的.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$ 有如下不等式成立: $|({}_{0}^{\mathrm{CFC}}D^{p}y)(t)+f(t,y(t))|\leqslant\varepsilon$, $t\in(0,1)$. 令 $g(t)=({}_{0}^{\mathrm{CFC}}D^{p}y)(t)+f(t,y(t))$,于是有 $|g(t)|\leqslant\varepsilon$. 再由性质 1 和定义 2 可得:

$$y(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+I^2\left(\frac{1-\beta}{B(\beta)}(g(t)-f(t,y(t)))+\frac{\beta}{B(\beta)}\int_0^t(g(s)-f(s,y(s)))\mathrm{d}s\right)=$$

$$c_0+c_1t+c_2t^2+\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^t(t-s)(g(s)-f(s,y(s)))\,\mathrm{d}s+$$

$$\frac{\beta}{2B(\beta)}\int_0^t(t-s)^2(g(s)-f(s,y(s)))\,\mathrm{d}s,$$

$$x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+I^2\left(\frac{1-\beta}{B(\beta)}(-f(t,x(t)))+\frac{\beta}{B(\beta)}\int_0^t(-f(s,x(s)))\mathrm{d}s\right)=$$

$$c_0+c_1t+c_2t^2+\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^t(t-s)(-f(s,x(s)))\,\mathrm{d}s+\frac{\beta}{2B(\beta)}\int_0^t(t-s)^2(-f(s,x(s)))\,\mathrm{d}s,$$

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\left|\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^t(t-s)(f(s,y(s))-f(s,x(s))-g(s))\,\mathrm{d}s\right|+$$

$$\left|\frac{\beta}{2B(\beta)}\int_0^t(t-s)^2(f(s,y(s))-f(s,x(s))-g(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\frac{1-\beta}{B(\beta)}\int_0^t(t-s)(L|x(t)-y(t)|+\varepsilon)\,\mathrm{d}s+\frac{\beta}{2B(\beta)}\int_0^t(t-s)^2(L|x(t)-y(t)|+\varepsilon)\,\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1-\beta}{B(\beta)}\left(\frac{t^2\varepsilon}{2}+L\int_0^t(t-s)|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}s\right)+\frac{\beta}{2B(\beta)}\left(\frac{t^3\varepsilon}{3}+L\int_0^t(t-s)^2|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}s\right).$$

记 $m=\max\left\{\frac{1-\beta}{2B(\beta)},\frac{\beta}{6B(\beta)}\right\}$, $n=\max\left\{\frac{1-\beta}{B(\beta)},\frac{\beta}{2B(\beta)}\right\}$,于是由上式可和:

$$|x(t)-y(t)|\leqslant 2mt^2\varepsilon+2nL\int_0^t(t-s)|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}s.$$

再由引理 1 可得:

$$|x(t)-y(t)|\leqslant 2mt^2\varepsilon+2m\varepsilon\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2nL)^k}{\Gamma(2k)}(t-s)^{2k-1}s^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$2m\varepsilon+2m\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2nL)^k}{\Gamma(2k)}B(2k,3)\leqslant 2m\varepsilon+2\Gamma(3)m\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2nL)^k}{\Gamma(2k+3)}=2m\varepsilon+2\Gamma(3)m\varepsilon E_{2,3}(2nL),$$

其中 $E_{\alpha,\beta}(x)$ 为广义的 Mittag-Leffler 函数, $E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$. 令 $2m+2\Gamma(3)mE_{2,3}(2nL)=K$,由此可得 $|x(t)-y(t)|\leqslant K\varepsilon$,证毕.

3 具体算例

考虑如下微分方程:

$$({}^{\mathrm{CFC}}_{0}D^{\frac{5}{2}}x)(t)+\frac{\cos^2(x(t))}{4t^2+3}-4t^3-t+1=0; \tag{21}$$

$$x(0)=x'(0),\ 2x(1)+x'(1)=0, \tag{22}$$

其中$a=2$，$b=1$. 令 $B(x)=\sin(\pi x)+1$. 根据定理 2 对 $\frac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}$、$\beta$、$\delta$ 进行计算可得：$\frac{4\delta(\delta+1)B(\beta)}{(1-\beta)(2\delta^2+3\delta+1)+\beta(2\delta^2+\delta)}=3$，$\beta=\frac{1}{2}$，$\delta=\frac{1}{2}$. 于是可得 $|f(t,x)-f(t,y)|=\frac{|(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)|}{4t^2+3}\leqslant\frac{2}{3}|x-y|$，由于 $\frac{2}{3}<3$，因此由定理 2 可知微分方程(21)和(22)存在唯一解.

参考文献：

[1] LYAPUNOV A M. Probleme general de la stabilite du movement[J]. Ann Fac Sci Univ Toulouse，1907，9：203-474.

[2] KIRANE M，TOREBEK B T. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem with Caputo-Fabrizio derivative[J]. J Math Inequal，2018，12(4)：1005-1012.

[3] LIU Y，XIE D P，YANG D D，et al. Two generalized Lyapunov-type inequalities for a fractional p-Laplacian equation with fractional boundary conditions[J]. J Inequal Appl，2017，2017：98.

[4] JIELI M，SAMET B. A Lyapunov-type inequalities for a fractional q-difference boundary value problem[J]. J Nonlinear Sci Appl，2016，9(5)：1965-1976.

[5] ALKAHTANI B S T，ATANGANA A. Controlling the wave movement on the surface of shallow water with the Caputo-Fabrizio derivative with fractional order[J]. Chaos Solitons Fractals，2016，89：539-546.

[6] JARRAH A M，AI-REFAI M. Fundamental results on weighted Caputo-Fabrizio fractional derivative[J]. Chaos Solition Fract，2019，126：7-11.

[7] 吴强，黄建华. 分数阶微积分[M]. 北京：清华大学出版社，2016：28-35.

[8] CAPUTO M，FABRIZIO M. A new definition of fractional derivative without singular Kernel[J]. Progress in Fractional Differentiation & Applications，2015，1(2)：73-85.

[9] ABDELJAWAD T. Fractional operators with exponential Kernels and a Lyapunov type inequality[J]. Adv Differ Equ，2017，2017：313.

[10] 郑安利，冯育强，王蔚敏. 分数阶微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 中国科技论文在线精品论文，2016，9(1)：64-70.

[11] 王枫，葛琦. 一类非线性分数阶微分方程多重正解存在的充分条件[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2022，48(3)：189-195.

[12] 甘亦苗，侯成敏. 一类 Hilfer 型分数阶微分方程解的存在和唯一性[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2020，46(2)：95-100.