

文章编号: 1004-4353(2022)04-0336-03

一类带收获率的捕食者-食饵扩散模型的稳定性

张丽丽, 麻作军

(陇东学院 数学与统计学院, 甘肃 庆阳 745000)

摘要: 研究了一类带收获率的 Lotka-Volterra 捕食者-食饵扩散模型的稳定性, 并应用线性化方法证明了线性自扩散不会影响模型的稳定性. 数值模拟计算表明, 所得结果正确.

关键词: Lotka-Volterra 捕食者-食饵模型; 收获率; 扩散; 稳定性

中图分类号: O175.26

文献标识码: A

Stability in a Lotka-Volterra predator-prey model with diffusion and harvesting rate

ZHANG Lili, MA Zuojun

(School of Mathematics and Statistics, Longdong University, Qingyang 745000, China)

Abstract: In this paper, the stability of a Lotka-Volterra predator-prey model with diffusion and harvesting rate is studied, and the linearization method is used to prove that linear self-diffusion does not affect the stability of the model. The numerical simulation results show that the results are correct.

Keywords: Lotka-Volterra predator-prey models; harvesting rate; diffusion; stability

0 引言

自 Lotka 和 Volterra 提出经典的捕食者-食饵模型以来, 许多学者利用该模型提出了不同的反应函数. 在实际生产中, 为了兼顾物种的长期存活以及自然生物链的不间断和最大收获, 一些学者还建立了带有收获项的捕食者-食饵系统. 例如: 1999 年, Xiao 等^[1]对带有常数食饵收获项的捕食者-食饵系统的分支进行了分析, 并给出了系统在 Bogdanov-Takens 分支下的临界条件; 2013 年, Gupta 等^[2]对带有 Michaelis-Menten 型食饵收获项的捕食者-食饵系统的稳定性和分支进行了分析; 其他收获率捕食模型的研究参看文献[3-7]. 基于上述研究, 本文考虑如下带收获率 $\Gamma h > 0$ 的 Lotka-Volterra 捕食者-食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = \Gamma u(r - \gamma u - v), \\ \frac{d}{dt}v = \Gamma v(-1 + u) - \Gamma h v. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别表示食饵和捕食者在时刻 t 的种群密度; Γ 、 r 、 γ 和 h 都是正参数, 其具体生态意义见文献[8].

在自然条件及外界因素的影响下, 固有有界区域内的不同空间位置上的捕食者和食饵的分布是不

收稿日期: 2022-03-24

基金项目: 甘肃省高等学校创新基金(2021B-262)

作者简介: 张丽丽(1985—), 女, 硕士, 讲师, 研究方向为生物数学与偏微分方程.

均匀的,且每个物种都会有扩散到较小密度区域的自然倾向.为了准确描述种群的这种空间分布的复杂性,一些学者们建立了带有扩散的捕食者-食饵系统^[9-12].模型(1)的线性自扩散模型为:

$$\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = \Gamma u(r - \gamma u - v), & x \in \Omega, t > 0; \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = \Gamma v(-1 + u) - \Gamma h v, & x \in \Omega, t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

其中: Ω 是 \mathbf{R}^N 中边界光滑的有界区域; \mathbf{n} 为边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; d_1 ($d_1 > 0$) 和 d_2 ($d_2 > 0$) 是扩散系数,分别表示 2 个种群由高密度区向低密度区迁移; $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 为非负不恒为零的连续函数,分别表示 2 个种群的初始密度.本文讨论模型(2)的正平衡点的稳定性.

1 半线性反应扩散模型的稳定性

为方便计算,取 $\Omega = (0, l\pi)$, $l > 0$. 对系统(2)的平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 作扰动 $u(u = u_* + \tilde{u}, v = v_* + \tilde{v})$, 其中仍用 u 和 v 代替 \tilde{u} 和 \tilde{v} , 于是可得:

$$\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = \Gamma(u + u_*)[r - \gamma(u + u_*) - (v + v_*)], \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = \Gamma(v + v_*)[-1 + (u + u_*)] - \Gamma h(v + v_*). \end{cases} \quad (3)$$

对系统(3)在 $(0, 0)$ 处线性化可得如下近似方程:

$$\begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 $J = \begin{pmatrix} -\Gamma\gamma(h+1) & -\Gamma(h+1) \\ -\Gamma[r - \gamma(h+1)] & 0 \end{pmatrix}$. 假设 $L_1(h) = J + D_1 \Delta$, 这里 $D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $\Delta =$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$, 则方程(4)可变为:

$$\begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t v \end{pmatrix} = L_1(h) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中 $L_1(h) = \begin{pmatrix} -\Gamma\gamma(h+1) + d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\Gamma(h+1) \\ -\Gamma[r - \gamma(h+1)] & d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$. 由分离变量法知,系统(5)有以下解:

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} e^{\lambda t} \cos kx. \quad (6)$$

将式(6)代入系统(5)中可得 $\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} \cos kx = \sum_{k=0}^{\infty} L_1(h) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} e^{\lambda t} \cos kx$. 对上式进行整理得 $(\lambda I -$

$L_{1k}) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k=0, 1, 2, \dots$. 其中 $L_{1k} = \begin{pmatrix} -\Gamma\gamma(h+1) - k^2 d_1 & -\Gamma(h+1) \\ \Gamma[r - \gamma(h+1)] & -d_2 k^2 \end{pmatrix}$, λ 为特征根当且仅当

$\det(\lambda I - L_{1k}) = 0$, 即:

$$\lambda^2 - T_1(k)\lambda + H_1(k^2) = 0, \quad (7)$$

其中 $T_1(k) = \text{tr}(L_{1k}) = -\Gamma(h+1) - (d_1 + d_2)k^2$,

$$H_1(k^2) = \det(L_{1k}) = [\Gamma\gamma(h+1) + d_1 k^2]d_2 k^2 + \det J. \quad (8)$$

由二次方程的求根公式知,方程(7)有 2 个根 $\lambda_{1,2} = (T_1(k) \pm \sqrt{(T_1(k))^2 - 4H_1(k^2)})/2$. 由此可知

$T_1(k) < 0, H_1(k^2) > 0, k = 0, 1, 2, \dots$. 根据上述内容可得如下定理:

定理 1 由于 $T_1(k) \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots$, 线性自扩散模型(2) 不会出现 Hopf 分支.

定理 2 当 $r > \gamma(h+1)$ 时, 模型(2) 的唯一正平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 是局部渐近稳定的.

定理 3 线性自扩散模型(2) 不会诱导 Turing 不稳定性.

2 数值模拟与讨论

为验证所得定理的正确性, 在模型(2) 中取 $r = 4.8, \gamma = 1, \Gamma = 5, h = 3, d_1 = 1, d_2 = 4$. 经计算, 该取值满足定理条件 $r > \gamma(h+1)$, 且模型(2) 存在唯一正平衡点 $E_*(4, 0.8)$. 由定理 2 可知该正平衡点是局部渐近稳定的. 根据上述取值绘制的食饵和捕食者的种群密度随时间和空间的变化趋势如图 1 和图 2 所示. 由图 1 和图 2 也可以看出, 正平衡点 $E_*(4, 0.8)$ 是渐近稳定的. 由此进一步表明, 线性自扩散不会改变 Lotka-Volterra 捕食者-食饵模型的稳定性.

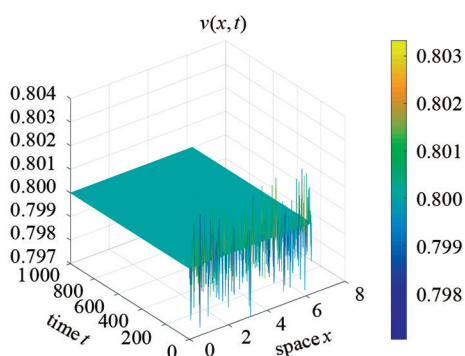


图 1 食饵种群密度随时间和空间的变化趋势

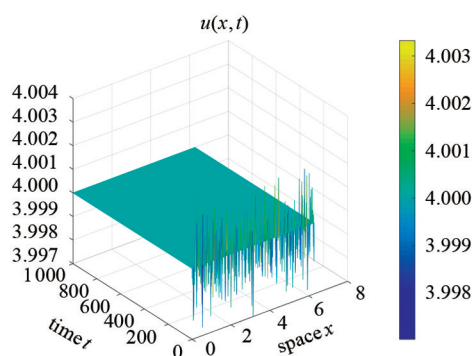


图 2 捕食者种群密度随时间和空间的变化趋势

参考文献:

- [1] XIAO D, RUAN S. Bogdanov-Takens bifurcations in predator-prey systems with constant-rate harvesting[J]. Fields Institute Communications, 1999, 21: 493-506.
- [2] GUPTA R P, CHANDRA P. Bifurcation analysis of modified Leslie-Gower predator-prey model with Michaelis-Menten type prey harvesting[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2013, 398(1): 278-295.
- [3] SEN M, SRINIVASU P D N, BANERJEE M. Global dynamics of an additional food provided predator-prey system with constant harvest in predators[J]. Applied Mathematics & Computation, 2015, 250: 193-211.
- [4] LEE J, BAEK H. Dynamics of a Beddington-DeAngelis type predator-prey system with constant rate harvesting[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2017, 2017(1): 1-20.
- [5] JANA S, GURIA S, DAS U, et al. Effect of harvesting and infection on predator in a prey-predator system[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(1/2): 1-14.
- [6] BAEK H. Spatiotemporal dynamics of a predator-prey system with linear harvesting rate[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014(3): 1-9.
- [7] WEI C, CHEN L. Periodic solution and heteroclinic bifurcation in a predator-prey system with Allee effect and impulsive harvesting[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(2): 1109-1117.
- [8] TULUMELLO E, LOMBARDO M C, SAMMARTINO M. Cross-Diffusion driven instability in a predator-prey system with Cross-Diffusion[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2014, 132(1): 621-633.
- [9] FARIA T. Hopf bifurcation for a delayed predator-prey model and the effect of diffusion[J]. Birkhäuser Boston, 2001, 254(2): 433-463.
- [10] 许生虎, 伏升茂. 带 Beddington-DeAngelis 功能反应项的捕食者-食饵扩散模型的稳定性[J]. 应用数学, 2008, 25(2): 311-319.
- [11] 伏升茂, 李红金. 一类食饵带传染病的捕食者-食饵扩散模型的稳定性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2009, 6(1): 178-187.
- [12] 吴耀冲, 温洁嫦. 一类带时滞和收获率的捕食者-食饵系统的稳定性[J]. 佛山科学技术学院学报, 2021, 91(4): 421-429.