

文章编号: 1004-4353(2022)04-0332-04

带单服务器的流水作业排序问题的复杂性

时凌, 张琼, 龙彩燕

(广州工商学院 通识教育学院, 广东 广州 510850)

摘要: 研究了一个带单服务器且加工时间相等的两机流水作业排序问题, 其目标函数是使总完工时间达到最小. 研究表明, 该流水作业排序问题是强 NP-困难的. 针对该流水作业排序问题构造了一种新的加工顺序, 并证明该加工顺序的紧界为 $7/6$.

关键词: 流水作业排序问题; 总完工时间; 单服务器; 最坏性能比

中图分类号: O223

文献标识码: A

Complexity for flow-shop scheduling problems with a single server

SHI Ling, ZHANG Qiong, LONG Caiyan

(Institute of General Education, Guangzhou College of Technology and Business, Guangzhou 510850, China)

Abstract: We consider the problem of two-machine flow-shop scheduling with a single server and equal processing times, the objective function is to minimize total completion time. We show that this problem is NP-hard in the strong sense and present a busy schedule for it with worst case ratio $7/6$, and the bound is tight.

Keywords: flow-shop scheduling problem; total completion time; a single server; worst case ratio

0 引言

根据排序问题的三元表示法^[1], 对于目标函数是最大而完工时间达到最小的这种经典流水作业排序问题可表示为 $F || C_{\max}$. 随着对排序问题的不断研究, 学者们提出了不同约束条件、不同目标函数的现代排序问题^[2-6]. 本文研究带单服务器且加工时间相等的两机流水作业排序问题. 根据文献[1], 该问题可表示为 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$, 其中目标函数是使总完工时间 $\sum_{j=1}^n C_j$ 达到最小, C_j 为最后完工工件 J_j 的完工时间. 文献[7]的作者研究了 $F2 || \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的复杂性; 文献[8]的作者证明了 $F2 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题是强 NP-困难的, 并给出了复杂度为 $O(n \log n)$ 、紧界是 $4/3$ 的启发式算法; 文献[9]的作者证明了 $F2, S1 | s_{i,j} = s | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题是强 NP-困难的, 并给出了一种新的启发式

收稿日期: 2022-08-28

基金项目: 国家自然科学基金(61763009); 广州工商学院院级科研课题立项项目(KA201831); 广州工商学院校级科研项目(KAZX2021008)

作者简介: 时凌(1959—), 男, 教授, 研究方向为组合最优化.

算法,同时还证明了该算法的紧界为 $6/5$. 在上述研究基础上,本文研究 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题,并讨论该问题的复杂性.

1 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的复杂性

假设 $C_{i,j}$ 为工件 J_j 在机器 M_i 上的完工时间. 若在机器 M_1 和机器 M_2 上不存在空闲时间,则有:

$$C_{1,1} = s_{1,1} + p_{1,1}, C_{2,1} = s_{1,1} + p_{1,1} + s_{2,1} + p_{2,1},$$

$$C_{1,j} = C_{1,j-1} + s_{1,j} + p_{1,j}, C_{2,j} = \max\{C_{2,j-1}, C_{1,j}\} + s_{2,j} + p_{2,j}, \text{ 其中 } j = 2, \dots, n.$$

定理 1 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题是强 NP-困难的.

证明 本文应用从强 NP-困难的数字匹配问题^[10] 到 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的归约来证明定理 1 中的排序问题是强 NP-困难的. 数字匹配问题可描述为: 给定两个正整数集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 以及一个目标向量集 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, 且 $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n z_i$, 则正整数集 $X \cup Y$ 能分解为 n 个不相交的子集 Z_1, Z_2, \dots, Z_n (每个子集 Z_i 中的元素 z_i 满足 $z_i = x_i + y_i (x_i \in X, y_i \in Y, i = 1, 2, \dots, n)$).

为了证明定理 1, 构造由下面 $7n$ 个工件组成的工件组:

1) P -工件: $s_{1,i} = b, p_{1,i} = b; s_{2,i} = b + x_i, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

2) Q -工件: $s_{1,i} = 0, p_{1,i} = b; s_{2,i} = b + y_i, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

3) R -工件: $s_{1,i} = 0, p_{1,i} = b; s_{2,i} = b - z_i, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

4) U -工件: $s_{1,i} = 0, p_{1,i} = b; s_{2,i} = 0, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

5) V -工件: $s_{1,i} = 0, p_{1,i} = b; s_{2,i} = 0, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

6) W -工件: $s_{1,i} = 0, p_{1,i} = b; s_{2,i} = 0, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

7) L -工件: $s_{1,i} = 4b, p_{1,i} = b; s_{2,i} = b, p_{2,i} = b (i = 1, 2, \dots, n)$.

由以上可知, 要证明定理 1 只需证明如果 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题存在满足 $\sum_{j=1}^n C_j(S_0) \leq y =$

$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) + (77n^2 - 13n - 4)b/2$ 的工序 S_0 当且仅当数字匹配问题有解即可.

假设数字匹配问题有解, 机器在加工过程中无空闲时间, 其中机器 M_1 按工序 $\sigma (\sigma = \{\sigma_{P_{1,1}}, \sigma_{Q_{1,1}}, \sigma_{R_{1,1}}, \sigma_{U_{1,1}}, \sigma_{V_{1,1}}, \sigma_{W_{1,1}}, \sigma_{L_{1,1}}, \dots, \sigma_{P_{1,n}}, \sigma_{Q_{1,n}}, \sigma_{R_{1,n}}, \sigma_{U_{1,n}}, \sigma_{V_{1,n}}, \sigma_{W_{1,n}}, \sigma_{L_{1,n}}\})$ 加工工件, 机器 M_2 按工序 $\tau (\tau = \{\tau_{P_{2,1}}, \tau_{Q_{2,1}}, \tau_{R_{2,1}}, \tau_{U_{2,1}}, \tau_{V_{2,1}}, \tau_{W_{2,1}}, \tau_{L_{2,1}}, \dots, \tau_{P_{2,n}}, \tau_{Q_{2,n}}, \tau_{R_{2,n}}, \tau_{U_{2,n}}, \tau_{V_{2,n}}, \tau_{W_{2,n}}, \tau_{L_{2,n}}\})$ 加工工件, 如图 1 所示.

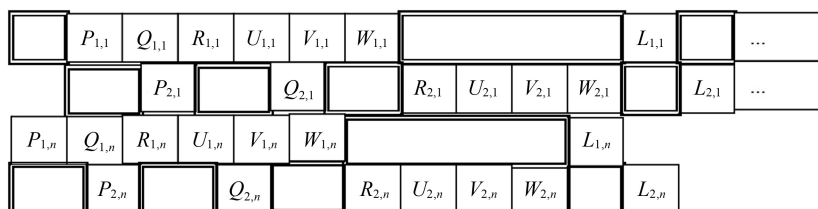


图 1 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的甘特图

由图 1 可知,工序 σ 和 τ 显然满足 $C(S) = C(\sigma, \tau) \leq y$, 即 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题存在满足条件 $C(S) \leq y$ 的加工工序 σ 和 τ . 对于机器 M_1 上的加工路径 $\{P_{1,1}, Q_{1,1}, R_{1,1}, U_{1,1}, V_{1,1}, W_{1,1}\}$ 和机器 M_2 上的加工路径 $\{R_{2,1}, U_{2,1}, V_{2,1}, W_{2,1}, L_{2,1}, \dots, R_{2,n}, U_{2,n}, V_{2,n}, W_{2,n}, L_{2,n}\}$ 有:

$$\begin{aligned} C(S) &\geq 3b + x_1 + 5b + x_1 + y_1 + 7b + x_1 + y_1 - z_1 + 8b + 9b + 10b + \dots + \\ &\quad (3 + (n-1)11)b + x_n + (5 + (n-1)11)b + x_n + y_n + (7 + (n-1)11)b + \dots + \\ &\quad (11n+1)b = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) + (77n^2 - 13n - 4)b/2 = y, \end{aligned}$$

且使得 $C(S) = y$.

由以上可知:如果加工顺序 S 存在这样的分解 μ , 则完工时间等于 y 的加工顺序(如图 1 所示);如果加工顺序 S 不存在这样的分解 μ , 即加工顺序 S 不是数字匹配问题的解, 则 $x_i + y_i \neq z_i (i=1, 2, \dots, n)$. 令 $\xi_i = x_i + y_i - z_i (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $\xi_i > 0$ 或者 $\xi_i < 0$ (对于 $\xi_i < 0$ 同理论). 由上述可得:

$$\sum_{j=1}^n C_j(S) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) + (77n^2 - 13n - 4)b/2 + 5 \sum_{i=1}^n \xi_i + 10 \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i + \dots + 5n \xi_1 > y,$$

该式与 $C(S) = y$ 矛盾, 证毕.

2 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的最坏性能比

为讨论 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的最坏性能比, 本文规定加工顺序为忙加工顺序(工件从开始加工工件到完成, 服务器无空闲时间).

定理 2 假设 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的工序 S_0 是一个忙加工顺序, S^* 是排序问题的最优解, 则 $\sum_{j=1}^n C(S_0) / \sum_{j=1}^n C(S^*) \leq 7/6$, 且上界是紧的.

证明 对于加工顺序 S , 记 $I_{i,j}(S) (i=1, 2; j=1, \dots, n)$ 为工件 J_j 在机器 M_i 上的总空闲时间. 如果在机器 M_1 上的加工路径为 $1, \dots, j$, 在机器 M_2 上加工的工件为 J_j , 则有:

$$C_j = \sum_{i=1}^j (s_{1,i} + p_{1,i}) + I_{1,j} + s_{2,j} + p_{2,j}. \quad (1)$$

如果在机器 M_1 上的加工工件为 J_1 , 在机器 M_2 上的加工顺序为 $1, 2, \dots, j$, 则有:

$$C_j = s_{1,1} + p_{1,1} + \sum_{i=1}^j (s_{2,i} + p_{2,i}) + I_{2,j}. \quad (2)$$

如果在机器 M_1 上的加工顺序为 $1, \dots, l$, 在机器 M_2 上的加工顺序为 l, \dots, j , 则有:

$$C_j = \sum_{i=1}^l (s_{1,i} + p_{1,i}) + I_{1,l} + \sum_{i=l}^j (s_{2,i} + p_{2,i}) + I_{2,j}. \quad (3)$$

由式(1)—式(3)有:

$$\begin{aligned} 6 \sum_{j=1}^n C_j(S_0) &= (2(\sum_{i=1}^j (s_{1,i} + p_{1,i}) + I_{1,j}) + (2(\sum_{i=1}^j (s_{2,i} + p_{2,i}) + I_{2,j}))) + \\ &\quad (2(\sum_{i=1}^l (s_{1,i} + p_{1,i}) + I_{1,l}) + \sum_{i=l}^j (s_{2,i} + p_{2,i}) + (2(s_{1,1} + p_{1,2}) + 2(s_{2,j} + p_{2,j}))) \leq \\ &\quad 7 \sum_{j=1}^n C_j(S^*). \end{aligned}$$

由上式可得 $\sum_{j=1}^n C_j(S_0) / \sum_{j=1}^n C_j(S^*) \leq 7/6$.

为了证明上界的紧性,本文构造了如下2种工件:

1) P -工件: $s_{1,i} = 2b$, $p_{1,i} = b$, $s_{2,i} = 2b$, $p_{2,i} = b$ ($i = 1, 2$);

2) Q -工件: $s_{1,i} = 0$, $p_{1,i} = b$, $s_{2,i} = 0$, $p_{2,i} = b$ ($i = 3, 4$).

其中忙加工顺序 S_0 为(1,2,3,4), 最优加工顺序 S^* 为(1,3,2,4). 图2和图3分别表示忙加工顺序的总完工时间和最优加工顺序的总完工时间. 由图2和图3可知, $\sum_{j=1}^4 C_j(S_0) / \sum_{j=1}^4 C_j(S^*) = \frac{35b}{30b} = 7/6$, 即该忙加工顺序上界是紧的. 证毕.

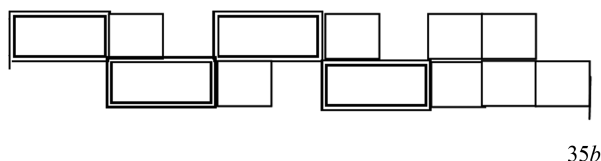


图2 忙加工顺序 S_0 的总完工时间 $\sum_{j=1}^4 C_j(S_0)$

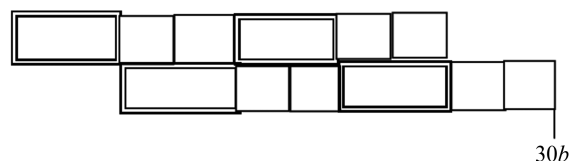


图3 最优加工顺序 S^* 的总完工时间 $\sum_{j=1}^4 C_j(S^*)$

3 结语

本文证明了 $F2, S1 | p_{i,j} = p | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题的复杂性, 并引入了一种新的加工顺序(该加工顺序的紧界为 $7/6$). 对该问题需进一步讨论的是: ① 如何解决不同服务时间和加工时间时的流水作业排序问题, 即需要研究 $F2, S1 | s_{i,j}, p_{i,j} | \sum_{j=1}^n C_j$ 排序问题; ② 如何将流水作业排序问题的相关方法推广到自由作业排序问题中.

参考文献:

- [1] LAWLER E L, LENSTRA J K, RINNOOY KAN A H G, et al. Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity[C]//Handbooks in Operation Research and Management Science. Amsterrdem: Logistics of Production and Inventory, 1993, 4:445-522.
- [2] LENSTRA J K, RINNOOY KAN A H G, BRUCKER P. Complexity of machine scheduling problem[J]. Annual of Discrete Mathematics, 1977, 1:343-362.
- [3] LIM A, RODRIGUES B, WANG C X. Two-machine flow shop problems with a single server[J]. Journal of Scheduling, 2006, 9:515-543.
- [4] CHENG T C E, KOWLOON H K, KOVALYOV M Y, et al. Scheduling a single server in a two-machine flow shop[J]. Computing, 2014, 70:167-180.
- [5] 苏纯洁, 姚恩瑜. 带服务器的 Flow shop 问题[J]. 浙江大学学报(理学版), 2000, 27(4):382-387.
- [6] 陈荣军, 唐国春. 费用有限的柔性两机自由作业与流水服务业排序[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(4):12-18.
- [7] GAREY M R, JOHNSON D S, SETHI R. The complexity of flowshop and jobshop scheduling[J]. Mathematical Operation Research, 1976, 1(2):117-129.
- [8] BRUCKER P, KNUST S, WANG G Q, et al. Complexity of results for flow-shop problems with a single server[J]. European Journal Operation Research, 2005, 165(2):398-407.
- [9] 时凌, 龙彩燕, 张琼. 使总完工时间达到最小的流水作业排序问题[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2020, 45(6):638-642.
- [10] GILMORE P C, GOMORY R E. Sequencing a one-state variable machine: A solvable case of the traveling salesman problem[J]. Operations Research, 1996, 12:655-679.