文章编号： 1004-4353(2022)04-0327-05

一类含不定非线性项椭圆方程的正解

林美琳

(应用数学福建省高校重点实验室(莆田学院)，福建 莆田 351100)

摘要： 研究了一类带权的含有不定非线性项的椭圆方程，并利用约束极小问题和精确的能量估计以及集中紧性原理和强极值原理证明了这类方程在加权情况下也存在正解。该结果拓展了奇异椭圆方程的相关结果。

关键词： 正解；不定非线性项；椭圆方程

中图分类号： O175.25　　　　**文献标识码：** A

Positive solution for an elliptic equation with indefinite nonlinearity

LIN Meilin

(*Key Laboratory of Applied Mathematics of Fujian Province University (Putian University), Putian* 351100, *China*)

Abstract: Via constraint minimization argument and delicate energy estimates, we show the existence of a positive solution for an elliptic equation with indefinite nonlinearity. The solution is obtained by concentration compactness principle and strong maximum principle. This result extends the related results of singular elliptic equations.

Keywords: positive solution; indefinite nonlinearity; elliptic equation

0　引言

本文考虑如下一类带权的含有不定非线性项椭圆方程正解的存在性问题：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\dfrac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}=K(x)|x|^{-bp}u^{p-2}u+\mu u,\ x\in\Omega\backslash\{0\}; \\ u(x)=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$0\in\Omega$ 是 $\mathbf{R}^N(N\geqslant 3)$ 中具有光滑边界的有界区域，$0\leqslant a<\dfrac{N-2}{2}$，$a\leqslant b<a+1$，$p=\dfrac{2N}{N-2(1+a-b)}$，$0\leqslant\mu<\Lambda=(\dfrac{N-2-2a}{2})^2$，$\mu>0$. $K(x)\in L^{\infty}(\Omega)$，$K(x)=K_+-K_-$，$K_+=\max\{K(x),0\}\neq 0$，$K_-=\max\{-K(x),0\}\neq 0$，且 $k(x)$ 满足下列条件：

(A)　$0<K(0)=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}|K(x)|$，$R>0$，对于 $x\in B(0,2R)$ 有 $K(x)=K(0)+O(|x|^{\delta})$，其中 $\delta\in(2,p\sqrt{\Lambda-\lambda})$.

收稿日期： 2022－06－21

基金项目： 国家自然科学基金(11971253)；福建省中青年教师教育科研项目(JAT190582)

作者简介： 林美琳(1982—)，女，硕士，副教授，研究方向为非线性分析.

由于本文采用变分方法来求解方程的解,因此首先给出下列 Euler-Lagrange 泛函:

$$J_\mu(u)=\frac{1}{2}\int(|x|^{-2a}|\nabla u|^2-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}u^2-\mu u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int K(x)|x|^{-bp}|u|^p\mathrm{d}x.$$

由变分方法可知,方程(1) 的弱解与 J_μ 在 $H^1_{0,a}(\Omega)$ 上的临界点是一一对应的. 若 $u\in H^1_{0,a}(\Omega)$ 是方程(1) 的一个弱解,则对任意的 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ 均有

$$\int(|x|^{-2a}\nabla u\nabla\psi-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}u\psi-\mu u\psi)\mathrm{d}x-\int K(x)|x|^{-bp}|u|^{p-2}u\psi\mathrm{d}x=0$$

成立. 于是再由椭圆正则性估计可知, $u\in C^2(\Omega\backslash\{0\})$.

对于方程(1),已有学者对 $a=b=0$ 的情况进行了较多研究. 当 $K(x)\equiv 1$ 时,文献[1-2] 的作者证明了方程(1) 存在正解;当 $0\leqslant\lambda<\Lambda-1$ 时,文献[3] 的作者证明了方程(1) 存在一个正解;当 $p=2^*(s)=\frac{2(N-s)}{N-2}$ 时,文献[4] 的作者证明了方程(1) 存在正解. 基于上述研究,本文证明了方程(1) 在加权情况下也存在正解,即证明了如下定理 1 成立:

定理 1 若条件(A) 成立,且 $\mu\in(0,\mu_1)$, $0\leqslant\lambda<\Lambda-(1+a)^2$,则方程(1) 至少存在 1 个正解.

1 预备知识

首先给出一些记号. E^{-1} 表示 Banach 空间的对偶空间; $D_a^{1,2}(R^N)$ 表示 $C_0^\infty(R^N)$ 在范数 $\|u\|^2=\int_{R^N}|x|^{-2a}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 下的闭包; $H^1_{0,a}(\Omega)$ 和 $L^t(\Omega)$ 均是标准的 Sobolev 空间,其范数分别用 $\|\cdot\|$ 和 $|\cdot|_t$ 表示. 空间 $H^1_{0,a}(\Omega)$ 的范数为 $\|u\|_\lambda^2=\int(|x|^{-2a}|\nabla u|^2-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}u^2)\mathrm{d}x$,该范数 $\|\cdot\|_\lambda$ 与通常的范数 $\|\cdot\|$ 是等价的(利用 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式可推出); $H^1_{0,a}(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_\lambda$ 下为 H_a. 空间 $L^t(\Omega)$ 的范数为 $|u|_t^t=\int_\Omega|u|^t\mathrm{d}x$.

本文考虑如下极小问题:

$$S(a,b,\lambda)=\inf\left\{\int_{\mathbf{R}^N}(|x|^{-2a}|\nabla u|^2-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}u^2)\mathrm{d}x;u\in D_a^{1,2}(\mathbf{R}^N),\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-bp}|u|^p\mathrm{d}x=1\right\}.$$

由于 S_0 是 Sobolev 嵌入的最佳常数,因此由文献[5-8] 可知 $S(a,b,\mu)$ 的一组达到函数为:

$$U_\varepsilon(x)=\frac{[2p(\Lambda-\lambda)\varepsilon^2]^\beta}{|x|^{\gamma'}(\varepsilon^2+|x|^{\frac{\sqrt{\Lambda-\lambda}}{\beta}})^{2\beta}},\ \varepsilon>0. \tag{2}$$

其中 $p=\frac{2N}{N-2(1+a-b)}$, $\Lambda=(\frac{N-2-2a}{2})^2$, $\gamma'=\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\Lambda-\lambda}$, $\beta=\frac{N-2(1+a-b)}{4(1+a-b)}$,而且在 $\mathbf{R}^N\backslash\{0\}$ 中有下式成立:

$$-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla U_\varepsilon)-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}U_\varepsilon=|x|^{-bp}|U_\varepsilon|^{p-2}U_\varepsilon,$$

$$\int_{R^N}(|x|^{-2a}|\nabla U_\varepsilon|^2-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}U_\varepsilon^2)\mathrm{d}x=\int_{R^N}|x|^{-bp}|U_\varepsilon|^p\mathrm{d}x=S(a,b,\lambda)^{\frac{p}{p-2}}.$$

定义一个截断函数为 $\phi(x)\in C_0^1(\Omega)$,使得当 $|x|\leqslant r$ 和 $|x|\geqslant 2r$ 时, $\phi(x)=1$. 记 $v_\varepsilon(x)=\phi(x)U_\varepsilon(x)$,于是由文献[9] 可知,对充分小的 $\varepsilon>0$ 有如下估计:

$$\int(|x|^{-2a}|\nabla v_\varepsilon|^2-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}v_\varepsilon^2)\mathrm{d}x=S(a,b,\lambda)^{\frac{p}{p-2}}+O(\varepsilon^{2\beta p})+O(\varepsilon^{4\beta}), \tag{3}$$

$$\int|x|^{-bp}|v_\varepsilon|^p\mathrm{d}x=S(a,b,\lambda)^{\frac{p}{p-2}}-O(\varepsilon^{2\beta p}), \tag{4}$$

$$\int |v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x = O(\varepsilon^{\frac{4(a+1)\beta}{\sqrt{\Lambda-\lambda}}}),\ 0 \leqslant \lambda < \Lambda - (1+a)^2, \tag{5}$$

$$\int |x|^\delta |x|^{-bp} |v_\varepsilon|^p \mathrm{d}x = o(\varepsilon^{\frac{4(a+1)\beta}{\sqrt{\Lambda-\lambda}}}),\ 0 \leqslant \lambda < \Lambda - (1+a)^2. \tag{6}$$

2　相关引理及其证明

引理 1[1]　当 $0 \leqslant \lambda < \Lambda$ 时,在 $H^1_{0,a}(\Omega)$ 上定义算子 $L_\lambda = -\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}$ 是正的. 特征值问题 $-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}} = \mu u$, $u \in H^1_{0,a}(\Omega)$ 在 $\Omega\backslash\{0\}$ 中有一列特征值 $0 < \mu_1(\lambda) < \mu_2(\lambda) \leqslant \cdots \leqslant \mu_m(\lambda) \to \infty (m \to \infty)$,且第一特征值 $\mu_1(\lambda)$(下文中将 $\mu_1(\lambda)$ 简写成 μ_1)对应的特征函数 e_1 是正的.

考虑如下 Nehari 流形:

$M_\mu = \{u \in H_a; G(u) = \langle J'_\mu(u), u\rangle = 0,\ u \neq 0\}$.

引理 2　对任意 $u \in M_\mu$,存在 $\rho > 0$,使得 $\|u\|_\lambda \geqslant \rho$.

证明　对于 $\forall u \in M_\mu$,由条件(A)和 Sobolev 不等式可得:

$$\|u\|_\lambda - \mu |u|_2^2 = \int K(x)|x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x \leqslant K(0)|x|^{-bp}|u|_p^p \leqslant K(0)S(a,b,\lambda)^{-\frac{p}{2}}\|u\|_\lambda^p.$$

于是由上式可得 $(1-\frac{\mu}{\mu_1})\|u\|_\lambda^2 \leqslant K(0)S(a,b,\lambda)^{-\frac{p}{2}}\|u\|_\lambda^p$,引理 2 得证.

记 $J_\mu(u) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(\|u\|_\lambda^2 - \mu|u|_2^2) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\int K(x)|x|^{-bp}|u|^p \mathrm{d}x$, $\forall u \in M_\mu$,并定义 $c = \inf\limits_{u\in M_\mu} J_\mu(u)$. 由定义显然知 $c \geqslant d > 0$, d 为一正的常数.

引理 3　在 H_a^{-1} 中存在序列 $\{u_n\} \subset M_\mu$,使得 $J_\mu(u_n) \to c$, $J'_\mu(u_n) \to 0$.

证明　设 $\{\tilde{u}_n\} \subset M_\mu$ 是上述定义($c = \inf\limits_{u\in M_\mu} J_\mu(u)$)中的一个极小化序列,于是由 Ekeland 变分原理知,存在序列 $\{u_n\} \subset \{\tilde{u}_n\} \subset M_\mu$,使得 $J_\mu(u_n) \to c$, $J'_\mu(u_n)|_{M_\mu} \to 0$. 再由 Lagrange 乘数法可知,存在 a_n,使得 $J'_\mu(u_n) - a_n G'(u_n) \to 0$,且 $\langle J'_\mu(u_n), u_n\rangle = a_n\langle G'(u_n), u_n\rangle$. 由上述可得 $a_n = 0$,引理 3 得证.

引理 4　设在 H_a^{-1} 中 $\{u_n\} \subset M_\mu$,满足 $J_\mu(u_n) \to c$, $J'_\mu(u_n) \to 0$. 若 $c < (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{S(a,b,\lambda)^{p/(p-2)}}{|K|_\infty^{2/(p-2)}}$,则 $\{u_n\}$ 在 H_a 中必有一个强收敛的子列.

证明　因 $\{u_n\} \subset M_\mu$, $0 < \mu < \mu_1$,所以有:

$$c + o(1) = J_\mu(u_n) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(\|u_n\|_\lambda^2 - \mu|u|_2^2) \geqslant (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(1-\frac{\mu}{\mu_1})\|u\|_\lambda^2.$$

由上式可知 $\{u_n\}$ 在 H_a 中有界. 于是可以选取一个子序列 $\{u_n\}$,在 H_a 中 $u_n \rightharpoonup u (n\to\infty)$,在 Ω 中 $u_n \to u$, a. e. $(n \to \infty)$. 由集中紧性原理[10]可知,在 Ω 中存在至多可数集 I,使得:

$$|x|^{-2a}|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\alpha \geqslant |x|^{-2a}|\nabla u|^2 + \sum_{i\in I}\alpha_i\delta_{x_i} + \alpha_0\delta_0, \tag{7}$$

$$|x|^{-bp}|u_n|^p \rightharpoonup d\beta = |x|^{-bp}|u|^p + \sum_{i\in I}\beta_i\delta_{x_i} + \beta_0\delta_0, \tag{8}$$

$$\alpha_i \geqslant S_0\beta_i^{2/p}, \tag{9}$$

$$\frac{|u_n|^2}{|x|^{2(a+1)}} \rightharpoonup dr = \frac{|u|^2}{|x|^{2(a+1)}} + \gamma_0\delta_0, \tag{10}$$

$$\Lambda\gamma_0 \leqslant \alpha_0. \tag{11}$$

为求解 β_i，取如下截断函数 ϕ_i：当 $|x-x_i|\leqslant r$ 时，$\phi_i=1$；当 $|x-x_i|\geqslant 2r$ 时，$\phi_i=0$. 令 $\psi_i=u_n\phi_i$，于是由 $\langle J'_\mu(u_n),\psi_i\rangle=o(1)\|\psi_i\|_\lambda$ 可得：

$$\int(|x|^{-2a}|\nabla u_n|^2\phi_i+|x|^{-2a}\nabla u_n\nabla\phi_i u_n-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}u_n^2\phi_i-\mu u_n^2\phi_i-K(x)|x|^{-bp}|u_n|^p\phi_i)\mathrm{d}x=o(1)\|u_n\phi_i\|_\lambda.$$

令 $n\to+\infty$，由此可得 $\alpha_i\leqslant K(x_i)\beta_i\leqslant|K|_\infty\beta_i$. 再由式(9)可得 $\beta_i=0$ 或 $\beta_i\geqslant(S_0/|K|_\infty)^{p/(p-2)}$. 下证 $\beta_i=0$. 若存在 $i\in I$，使得 $\beta_i\neq0$，则由测度 β 的有界性可知，集 I 有限. 由此再利用 Brezis-Lieb 引理[11] 可得：

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{S(a,b,\lambda)^{p/(p-2)}}{|K|_\infty^{2/(p-2)}}>c=J_\mu(u_n)+o(1)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(\|u_n\|_\lambda^2-\mu|u_n|_2^2)+o(1)\geqslant$$
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(\|u\|_\lambda^2-\mu|u|_2^2)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})S_0(\frac{S_0}{|K|_\infty})^{\frac{p}{p-2}\cdot\frac{2}{p}}\geqslant$$
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(1-\frac{\mu}{\mu_1})\|u\|_\lambda^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{S(a,b,\lambda)^{p/(p-2)}}{|K|_\infty^{2/(p-2)}}\geqslant(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{S(a,b,\lambda)^{p/(p-2)}}{|K|_\infty^{2/(p-2)}}.$$

显然知上述不等式矛盾，因此对任意的 $i\in I$，有 $\beta_i=0$.

为求解 β_0，取如下截断函数 ϕ_0：当 $|x|\leqslant r$ 时，$\phi_0=1$；当 $|x|\geqslant 2r$ 时，$\phi_0=0$. 令 $\psi_0=u_n\phi_0$，于是由 $\langle J'_\mu(u_n),\psi_0\rangle=o(1)\|\psi_0\|_\lambda$ 可得：

$$\int(|x|^{-2a}|\nabla u_n|^2\phi_0+|x|^{-2a}\nabla u_n\nabla\phi_0 u_n-\frac{\lambda}{|x|^{2(a+1)}}u_n^2\phi_0-\mu u_n^2\phi_0-K(x)|x|^{-bp}|u_n|^p\phi_0)\mathrm{d}x=o(1)\|u_n\phi_0\|_\lambda.$$

令 $n\to+\infty$，$r\to0$，由此可得 $\alpha_0-\lambda\gamma_0\leqslant K(0)\beta_0\leqslant|K|_\infty\beta_0$. 在式(2)中将 u 替换成 $u_n\phi_0$ 可得 $\alpha_0-\lambda\gamma_0\geqslant S(a,b,\lambda)\beta_0^{2/p}$. 由上述可得 $\beta_0=0$ 或 $\beta_0\geqslant(S(a,b,\lambda)/|K|_\infty)^{p/(p-2)}$. 同理可证 $\beta_0=0$. 由以上可知对任意的 $i\in I$，有 $\beta_0=\beta_i=0$，进而可知在 H_a 中 $u_n\to u$.

引理5 在定理1的条件下，有 $c<(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{S(a,b,\lambda)^{p/(p-2)}}{|K|_\infty^{2/(p-2)}}$.

证明 取 $t_0v_\varepsilon\in M_\mu$($v_\varepsilon$ 的定义见本文中预备知识)，于是由计算可知

$$t_0=\left(\frac{\|v_\varepsilon\|_\lambda^2-\mu|v_\varepsilon|_2^2}{\int K(x)|x|^{-bp}|v_\varepsilon|^p\mathrm{d}x}\right)^{1/(p-2)}.$$

再根据式(3)—式(6)可得：

$$J_\mu(t_0v_\varepsilon)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})t_0^2(\|v_\varepsilon\|_\lambda^2-\mu|v_\varepsilon|_2^2)=$$
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\left(\frac{\|v_\varepsilon\|_\lambda^2-\mu|v_\varepsilon|_2^2}{\int K(x)|x|^{-bp}|v_\varepsilon|^p\mathrm{d}x}\right)^{\frac{2}{p-2}}(\|v_\varepsilon\|_\lambda^2-\mu|v_\varepsilon|_2^2)=$$
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(S(a,b,\lambda)^{\frac{p}{p-2}}+O(\varepsilon^{4\beta})-O(\varepsilon^{\frac{4(a+1)\beta}{\sqrt{\Lambda-\lambda}}}))^{\frac{p}{p-2}}\cdot$$
$$(|K|_\infty S(a,b,\lambda)^{\frac{p}{p-2}}-O(\varepsilon^{2\beta p})+o(\varepsilon^{\frac{4(a+1)\beta}{\sqrt{\Lambda-\lambda}}}))^{\frac{2}{2-p}}<$$
$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\frac{S(a,b,\lambda)^{p/(p-2)}}{|K|_\infty^{2/(p-2)}},\ \Lambda-\lambda>(1+a)^2.$$

定理1的证明 由引理2—引理5可知，c 是可达到的. 设 $\omega\in M_\mu$ 达到 c. 由于 $\{u_n\}$ 是 $J_\mu(u)$ 在 M_μ 上的极小化序列，因此 $\{|u_n|\}$ 也是. 另外，由引理2—引理5还可知，可设 ω 为 J_μ 的一个非负临界点，即 ω 为方程(1)的一个非负解. 于是由强极值原理可知 ω 为方程(1)的一个正解，证毕.

参考文献：

[1] CHEN J. Existence of solutions for a nonlinear PDE with an inverse square potential[J]. J Differential Equations, 2003,195:497-519.

[2] FERRERO A, GAZZOLA F. Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations[J]. J Differential Equations, 2001,177(2):494-522.

[3] CHEN J. Multiplicity result for a singular elliptic equation with indefinite nonlinearity[J]. J Math Anal Appl, 2008, 337:493-504.

[4] 吕登峰. 一类含不定非线性项奇异椭圆方程的正解[J]. 山西大学学报(自然科学版),2010,33(3):321-325.

[5] CATRINA F, WANG Z Q. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: Sharp constants, existence (and nonexistence) and symmetry of extremal functions[J]. Comm Pure Appl Math, 2001,56:229-258.

[6] SMETS D. Nonlinear Schrödinger equations with Hardy potential and critical nonlinearities[J]. Trans Amer Math Soc, 2005,357(7):2909-2938.

[7] TERRACINI S. On positive entire solutions to a class of equations with singular coefficient and critical exponent[J]. Adv Differential Equation, 1996,1(2):241-264.

[8] 林美琳. 带有临界指数的椭圆方程多重正解的存在性[J]. 数学的实践与认识,2020,50(7):204-208.

[9] 林美琳. 一类带权的非线性椭圆方程正解的存在性问题[J]. 数学学报(中文版),2009,52(1):171-180.

[10] LIONS P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations: The limit case: part I[J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985,1(2):145-201.

[11] BREZIS H, LIEB E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proc Amer Math Soc, 1983,88(3):486-490.

(上接第 **320** 页)

参考文献：

[1] JOAG D K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. Annal of Statistics, 1983,11:286-295.

[2] WU Q Y, WANG Y Q, WU Y C. On some limit theorems for sums of NA random matrix sequences[J]. Chinese Journal of Probability and Statistics, 2006,22(1):56-62.

[3] HU Y J, MING R X, YANG W Q. Large deviations and moderate deviations for m-negatively associated random variables[J]. Acta Math Sci, 2007,27:886-896.

[4] HU T C, CHIANG C Y, TAYLOR R L. On complete convergence for arrays of rowwise m-negatively associated random variables[J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 2009,71:1075-1081.

[5] WU Y F, HU T C, VOLODIN A. Complete convergence and complete moment convergence for weighted sums of m-NA random variables[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015,2015,Article ID 200:14.

[6] SHEN A, ZHANG Y, XIAO B Q, et al. Moment inequalities for m-negatively associated random variables and their applications[J]. Statistical Papers, 2017,58(3):911-928.

[7] WANG M H, PEI W C, ZHANG Y H, et al. Some strong convergence of partial sums of m-NA random variables [J]. Mathematics Quarterly, 2018,33(2):172-180.

[8] 白志东,苏淳. 关于独立和的完全收敛性[J]. 中国科学:A 辑,1985(5):399-412.

[9] STOUT W F. Some results on the complete and almost sure convergence of linear combinations of independent random variables and martingale differences[J]. Ann Math Statist, 1968,39:1549-1562.

[10] SUNG S H. Complete convergence for weighted sums of arrays of rowwise independent B-valued random variables[J]. Stochastic Anal Appl, 1997,15:255-267.