

文章编号: 1004-4353(2022)04-0321-07

# 一种广义扩展型增广拉格朗日方法

于奥林<sup>1</sup>, 孔玉倩<sup>2</sup>, 申远<sup>2</sup>

(1. 南京财经大学 红山学院, 南京 210023; 2. 南京财经大学 应用数学学院, 南京 210023)

**摘要:** 为了求解线性等式约束和不等式约束的凸优化问题, 在平衡增广拉格朗日方法 B-ALM 的基础上提出了一个新的惩罚性的增广拉格朗日方法(P-ALM). 数值实验表明, 该方法可用于求解线性等式和不等式约束的凸优化问题, 且参数条件更为放松.

**关键词:** 凸优化; 惩罚性的增广拉格朗日方法; 增广拉格朗日方法; 邻近点算法

**中图分类号:** O24

**文献标识码:** A

## A generalized extended augmented Lagrange method

YU Aolin<sup>1</sup>, KONG Yuqian<sup>2</sup>, SHEN Yuan<sup>2</sup>

(1. Nanjing University of Finance & Economics Hongshan College, Nanjing 210023, China;

2. School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance & Economics, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** To solve convex optimization problems with linear equality and inequality constraints, this paper proposes a new punitive augmented Lagrange method (P-ALM) based on the balanced augmented Lagrange B-ALM. Numerical experiments show that this method can be used to solve convex optimization problems with linear equality and inequality constraints, and the parameter conditions are more relaxed.

**Keywords:** convex optimization; punitive augmented Lagrange method; augmented Lagrange method; proximal point algorithm

## 0 引言

增广拉格朗日方法(ALM)是求解线性约束凸优化问题的经典算法. 线性等式约束的凸优化模型为:

$$\min \{\theta(x) | Ax = b, x \in \mathcal{X}\}, \quad (1)$$

其中  $\theta(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是一个闭凸函数(不一定是强凸或光滑的),  $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{R}^n$  是一个闭凸集,  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ . 由于  $x$  的子问题不易求解, 因此通常将问题(1)迭代为:

$$(ALM) \begin{cases} x^{k+1} \in \arg \min \left\{ \theta(x) - (\lambda^k)^\top (Ax - b) + \frac{\beta}{2} \|Ax - b\|^2 | x \in \mathcal{X} \right\}, \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k - \beta(Ax^{k+1} - b). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\beta > 0$  是罚参数,  $\lambda \in \mathbf{R}^m$  是拉格朗日乘子,  $x$  和  $\lambda$  分别为原始变量和对偶变量.

优化问题(1)的拉格朗日方程为  $L(x, \lambda) = \theta(x) - \lambda^\top (Ax - b)$ , 其中  $(x, \lambda) \in \mathcal{X} \times \mathbf{R}^m$ . 令拉格朗日方程的鞍点为  $(x^*, \lambda^*)$ , 则有:

收稿日期: 2022-07-22

第一作者: 于奥林(1993—), 女, 助教, 研究方向为最优化算法.

通信作者: 申远(1982—), 男, 副教授, 研究方向为最优化算法.

$$L_{\lambda \in \mathbf{R}^m}(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L_{x \in \mathcal{X}}(x, \lambda^*).$$

上式等价于以下变分不等式:

$$\begin{cases} x^* \in \mathcal{X}, \theta(x) - \theta(x^*) + (x - x^*)^\top (-A^\top \lambda^*) \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}; \\ \lambda^* \in \Lambda, (\lambda - \lambda^*)^\top (Ax^* - b) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbf{R}^m. \end{cases} \quad (3)$$

式(3)的紧凑形式为如下单调变分不等式(VI):

$$\omega^* \in \Omega, \theta(x) - \theta(x^*) + (\omega - \omega^*)^\top F(\omega^*) \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \quad (4)$$

其中  $\omega = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ ,  $F(\omega) = \begin{pmatrix} -A^\top \lambda \\ Ax - b \end{pmatrix}$ ,  $\Omega = \mathcal{X} \times \mathbf{R}^m$ , 且  $\omega$  满足  $(\omega_1 - \omega_2)^\top (F(\omega_1) - F(\omega_2)) \geq 0$ . 由于对任意的  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  均成立, 因此算子  $F$  是单调的. 假设问题(1)的解集非空(用  $\Omega^*$  表示), 则求解优化问题(1)就是找问题(4)的解点. 求解问题(1)的 PDHG 迭代为:

$$\text{(PDHG)} \begin{cases} x^{k+1} = \arg \min \left\{ \theta(x) - \lambda^\top (Ax - b) + \frac{r}{2} \|x - x^k\|^2 \mid x \in \mathcal{X} \right\}, \\ \bar{x}^k = x^{k+1} + (x^{k+1} - x^k), \\ \lambda^{k+1} = \arg \max \left\{ \theta(\bar{x}^k) - \lambda^\top (A\bar{x}^k - b) - \frac{s}{2} \|\lambda - \lambda^k\|^2 \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

其中  $r > 0, s > 0, rs > \|A^\top A\|$ . 式(5)的收敛性取决于以下矩阵:

$$Q = \begin{pmatrix} rI_n & A^\top \\ A & sI_m \end{pmatrix}. \quad (6)$$

因为  $rs > \|A^\top A\|$ ,  $Q$  是对称正定的, 所以有  $\|\omega\|_Q = \sqrt{\omega^\top Q \omega}$ . 在式(6)中, 可将  $Q$  写成:

$$Q = \begin{pmatrix} rI_n & -A^\top \\ -A & sI_m \end{pmatrix},$$

其中  $rs > \|A^\top A\|$ . 问题(5)的迭代格式为:

$$\begin{cases} \lambda^{k+1} = \arg \max \left\{ \theta(x^k) - \lambda^\top (Ax^k - b) - \frac{s}{2} \|\lambda - \lambda^k\|^2 \right\}, \\ \bar{\lambda}^k = \lambda^{k+1} + (\lambda^{k+1} - \lambda^k), \\ x^{k+1} = \arg \min \left\{ \theta(x) - (\bar{\lambda}^k)^\top (Ax - b) + \frac{r}{2} \|x - x^k\|^2 \mid x \in \mathcal{X} \right\}. \end{cases} \quad (7)$$

由文献[1]可知, 式(7)是对偶-原始迭代顺序的定制邻近点算法(C-PPA)<sup>[1]</sup>. 为了更好地求解优化问题(1), 文献[2]的作者在平衡增广拉格朗日方法(B-ALM)的基础上增加了  $Ax \geq b$  这一条件, 进而可较为容易地计算出经典 ALM(2)中的两个子问题.

令  $r > 0, \delta > 0$  为两个任意常数, 并且定义正定矩阵  $H_0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $H_0 := \left( \frac{1}{r} AA^\top + \delta I_m \right)$ . 在式  $H_0 := \left( \frac{1}{r} AA^\top + \delta I_m \right)$  中, 记  $q_0^k := x^k + \frac{1}{r} A^\top \lambda^k$ ,  $s_0^k = A(2x^{k+1} - x^k) - b$ . 算法(7)中的原迭代点为  $(x^k, \lambda^k)$ , 新迭代点  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  可以由以下步骤得出:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \arg \min \left\{ \theta(x) + \frac{r}{2} \|x - q_0^k\|^2 \mid x \in \mathcal{X} \right\}, \\ \lambda^{k+1} = \arg \min \left\{ \frac{1}{2} (\lambda - \lambda^k)^\top H_0 (\lambda - \lambda^k) + (s_0^k)^\top \lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}^m \right\}. \end{cases} \quad (8)$$

B-ALM 的收敛性取决于矩阵  $H_B$  ( $H_B = \begin{pmatrix} rI & A^\top \\ A & \frac{1}{r} AA^\top + \delta I \end{pmatrix}$ ) 的正定性. B-ALM 的优点是大大放

松了一些 ALM 算法和相关一阶分裂算法的收敛条件<sup>[3-8]</sup>,即参数  $r$  不再依赖于  $\|A^T A\|$ . 文献[3] 的作者在 B-ALM 的基础上提出了一种惩罚增广拉格朗日方法(P-ALM),该算法中的初始点为  $(x_0, \lambda_0)$ , P-ALM 的迭代形式为:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \theta(x) - \langle \lambda^k, Ax - b \rangle + \frac{r}{2} \|A(x - x^k)\|^2 + \frac{1}{2} \|x - x^k\|_Q^2 \right\}, \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k - r [A(2x^{k+1} - x^k) - b], \end{cases} \quad (9)$$

其中  $Q \succ 0, r > 0$ . 式(9) 中迭代格式的收敛性取决于矩阵  $\mathbf{H}_P = \begin{pmatrix} rA^T A + Q & A^T \\ A & \frac{1}{r}I \end{pmatrix}$  的正定性. 由于

B-ALM 是通过修改对偶来放松收敛性,而 P-ALM 在修改  $x$  的子问题中增加了迭代次数,因此这两种算法的收敛速度均有所降低. 为此,本文在 B-ALM 和 P-ALM 的基础上提出一种广义扩展型增广拉格朗日方法,该算法对原始和对偶问题都作了修改,并且放松了参数条件.

## 1 广义扩展型增广拉格朗日算法

本文考虑更一般的凸规划模型,该模型包括线性不等式约束和不等式约束:

$$\min \{ \theta(x) | Ax = b (\text{或} \geq b), x \in \mathcal{X} \}. \quad (10)$$

GEALM 算法  $s(s > 0), \gamma(\gamma > 0), \beta(\beta > 0)$  和  $r(r > 0)$  是任意常数,  $(x^k, \lambda^k)$  为给定的迭代点,新的迭代点  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  由以下步骤产生:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \theta(x) - \langle \lambda^k, Ax - b \rangle + \frac{1}{2s} \|A(x - x^k)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|x - x^k\|^2 \right\}, \\ \lambda^{k+1} = \arg \min \left\{ \frac{1}{2} \|\lambda - \lambda^k\|_{\beta I + \frac{1}{r} AA^T}^2 + \lambda^T [A(2x^{k+1} - x^k) - b] | \lambda \in \mathbf{R}_+^m \right\}. \end{cases} \quad (11)$$

GEALM 算法的收敛性取决于以下矩阵的正定性:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} A^T A + \gamma I & A^T \\ A & \beta I + \frac{1}{r} AA^T \end{pmatrix}, \forall \beta, s, \gamma, r > 0. \quad (12)$$

对比文献[2] 中 B-ALM 算法中的矩阵  $\mathbf{H}_B$  可知,矩阵  $\mathbf{H}_B$  的左上角等价于式(12) 中  $\mathbf{H}$  的  $\gamma$  ( $r$  为固定值),而本文给出的矩阵条件为  $\gamma > r \left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{s}}\right)^2$ . 由此可知,GEALM 算法的参数条件得到了放

松. 例如:  $\sqrt{\frac{\beta}{s}} = 0.5$  时,GEALM 算法的条件为  $\gamma > \frac{r}{4}$ ,即下界放松到了原来的四分之一;当  $\mathbf{H}: s \rightarrow \infty, \beta = \delta, \gamma = r$  时,矩阵  $\mathbf{H}$  变为  $\mathbf{H}_B$  (等价于文献[2] 中的矩阵  $\mathbf{H}_B$ ).

对比文献[9] 中 P-ALM 算法中的矩阵  $\mathbf{H}_P$  可知,  $Q \succ 0, r > 0$ , 矩阵  $\mathbf{H}_P$  的条件相当于  $\mathbf{H}$  矩阵中的  $\beta$  ( $s$  为固定值),而本文给出的矩阵条件为  $\beta > s \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{r}}\right)^2$ . 由此可知,GEALM 算法的参数条件也

得到了放松. 例如:  $\sqrt{\frac{\gamma}{r}} = 0.5$ , 本文算法的条件为  $\beta > \frac{1}{4}s$ , 即下界放松到了原来的四分之一;当  $\mathbf{H}: \beta = s, r \rightarrow \infty$  时,矩阵  $\mathbf{H}$  变为  $\mathbf{H}_P$  (等价于文献[9] 中的矩阵  $\mathbf{H}_P$ ). 由以上可以看出,GEALM 算法扩展了 B-ALM 算法和 P-ALM 算法,且参数条件得到了进一步的放松.

**引理 1** 若  $\sqrt{\frac{\beta}{s}} + \sqrt{\frac{\gamma}{r}} > 1$  成立,则式(12) 中定义的矩阵  $\mathbf{H}$  是正定的.

**证明** 由式  $\sqrt{\frac{\beta}{s}} + \sqrt{\frac{\gamma}{r}} > 1$  可知, 当  $\alpha := \frac{1 + \sqrt{\frac{\beta}{s}} + \sqrt{\frac{\gamma}{r}}}{2}$  时,  $\sqrt{\frac{\beta}{s}} > \alpha > 1 - \sqrt{\frac{\gamma}{r}}$  成立. 令:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s}A^T A + \gamma I & A^T \\ A & \beta I + \frac{1}{r}AA^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s}A^T A & \alpha A^T \\ \alpha A & \beta I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma I & (1-\alpha)A^T \\ (1-\alpha)A & \frac{1}{r}AA^T \end{pmatrix} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2,$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{s}A^T A & \alpha A^T \\ \alpha A & s\alpha^2 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\beta - s\alpha^2)I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}}A^T \\ \sqrt{s}\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}}A, \sqrt{s}\alpha I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\beta - s\alpha^2)I \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} r(1-\alpha)^2 I & (1-\alpha)A^T \\ (1-\alpha)A & \frac{1}{r}AA^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\gamma - r(1-\alpha)^2)I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{r}(1-\alpha)I \\ \frac{1}{\sqrt{r}}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{r}(1-\alpha)I, \frac{1}{\sqrt{r}}A^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\gamma - r(1-\alpha)^2)I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则对于任意的  $\omega = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \neq 0$  有:

$$\omega^T \mathbf{H}_1 \omega = \left\| \frac{1}{\sqrt{s}}Ax + \sqrt{s}\alpha\lambda \right\|^2 + (\beta - s\alpha^2) \|\lambda\|^2,$$

$$\omega^T \mathbf{H}_2 \omega = \left\| \sqrt{r}(1-\alpha)x + \frac{1}{\sqrt{r}}A^T\lambda \right\|^2 + (\gamma - r(1-\alpha)^2) \|x\|^2.$$

上式中, 若  $\beta - s\alpha^2 > 0$  成立, 则矩阵  $\mathbf{H}_1$  是正定的; 若  $(\gamma - r(1-\alpha)^2) > 0$  成立, 则矩阵  $\mathbf{H}_2$  是正定的;

若  $\sqrt{\frac{\beta}{s}} + \sqrt{\frac{\gamma}{r}} > 1$  成立, 则矩阵  $\mathbf{H}$  也是正定的.

**引理 2** GEALM 算法产生的序列  $\{\omega^k = (x^k, \lambda^k)\}$  可使下式成立:

$$\omega^{k+1} \in \Omega, \theta(x) - \theta(x^{k+1}) + (\omega - \omega^{k+1})^T F(\omega^{k+1}) \geq (\omega - \omega^{k+1})^T \mathbf{H}(\omega^k - \omega^{k+1}), \forall \omega \in \Omega. \quad (13)$$

**证明** 在式(11)中, 关于  $x$  的子问题的解可描述为:

$$x^{k+1} \in \mathcal{X}, \theta(x) - \theta(x^{k+1}) + (x - x^{k+1})^T \left\{ -A^T\lambda^k + \left( \frac{1}{s}A^T A + \gamma I \right) (x^{k+1} - x^k) \right\} \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}.$$

在上式中, 对于任何未知的  $\lambda^{k+1}$  均有:

$$x^{k+1} \in \mathcal{X}, \theta(x) - \theta(x^{k+1}) + (x - x^{k+1})^T (-A^T\lambda^{k+1}) \geq$$

$$(x - x^{k+1})^T \left\{ \left( \frac{1}{s}A^T A + \gamma I \right) (x^k - x^{k+1}) + A^T(\lambda^k - \lambda^{k+1}) \right\}, \forall x \in \mathcal{X}. \quad (14)$$

同理, 式(14)中关于  $\lambda^{k+1}$  的子问题的解可由下式描述:

$$\lambda^{k+1} \in \Lambda, (\lambda - \lambda^{k+1})^T \left\{ (A[2x^{k+1} - x^k] - b) + \left( \beta I + \frac{1}{r}AA^T \right) (\lambda^{k+1} - \lambda^k) \right\} \geq 0, \forall \lambda \in \Lambda.$$

由以上可得:

$$\lambda^{k+1} \in \Lambda, (\lambda - \lambda^{k+1})^T (Ax^{k+1} - b) \geq$$

$$(\lambda - \lambda^{k+1})^T \left\{ A(x^k - x^{k+1}) + \left( \beta I + \frac{1}{r}AA^T \right) (\lambda^k - \lambda^{k+1}) \right\}, \forall \lambda \in \Lambda. \quad (15)$$

联立式(14)和式(15), 由此再根据式(4)中的符号即可得式(13). 证毕.

**引理 3** GEALM 算法产生的序列  $\{\omega^k = (x^k, \lambda^k)\}$  可使下式成立:

$$\begin{aligned} \theta(x) - \theta(x^{k+1}) + (\omega - \omega^{k+1})^T F(\omega) &\geq \\ \frac{1}{2}(\|\omega - \omega^{k+1}\|_H^2 - \|\omega - \omega^k\|_H^2) + \frac{1}{2}\|\omega^k - \omega^{k+1}\|_H^2, \forall \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

**证明** 由于式(4)定义的算子  $F$  是带有斜对称矩阵的仿射算子,因此有:

$$(\omega - \tilde{\omega})^T (F(\omega) - F(\tilde{\omega})) \equiv 0, \forall \omega \in \Omega. \quad (17)$$

由式(17)可知  $(\omega - \omega^{k+1})^T F(\omega^{k+1}) = (\omega - \omega^{k+1})^T F(\omega)$ , 由此进一步可知式(13)的左端等价于  $\theta(x) - \theta(x^{k+1}) + (\omega - \omega^{k+1})^T F(\omega)$ . 综合上述可知:

$$\omega^{k+1} \in \Omega, \theta(x) - \theta(x^{k+1}) + (\omega - \omega^{k+1})^T F(\omega) \geq (\omega - \omega^{k+1})^T \mathbf{H}(\omega^k - \omega^{k+1}), \forall \omega \in \Omega. \quad (18)$$

在式  $b^T \mathbf{H}(b - a) = \frac{1}{2}(\|b\|_H^2 - \|a\|_H^2) + \frac{1}{2}\|a - b\|_H^2$  中, 令  $a = \omega - \omega^k, b = \omega - \omega^{k+1}$ , 于是可得:

$$(\omega - \omega^{k+1})^T \mathbf{H}(\omega^k - \omega^{k+1}) = \frac{1}{2}(\|\omega - \omega^{k+1}\|_H^2 - \|\omega - \omega^k\|_H^2) + \frac{1}{2}\|\omega^k - \omega^{k+1}\|_H^2. \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)的不等号右边即可得证引理3.

**定理1** 因在 GEALM 算法生成的序列  $\{\omega^k = (x^k, \lambda^k)\}$  中含有矩阵  $\mathbf{H}$ , 且在式(12)中定义了该矩阵, 因此序列  $\{\omega^k\}$  满足:

$$\|\omega^{k+1} - \omega^*\|_H^2 \leq \|\omega^k - \omega^*\|_H^2 - \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_H^2, \forall \omega^* \in \Omega^*. \quad (20)$$

**证明** 将式(16)中的  $\omega$  设为任意固定的  $\omega^* \in \Omega^*$ , 则由此可得:

$$\begin{aligned} \|\omega^k - \omega^*\|_H^2 - \|\omega^{k+1} - \omega^*\|_H^2 - \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_H^2 &\geq \\ 2\{\theta(x^{k+1}) - \theta(x^*) + (\omega^{k+1} - \omega^*)^T F(\omega^*)\}, \forall \omega^* \in \Omega^*. \end{aligned}$$

由于  $\omega^* \in \Omega^*, \omega^{k+1} \in \Omega$ , 所以根据式(4)可知上述不等式的不等号右端为非负, 定理1得证.

**定理2** 因在 GEALM 算法生成的序列  $\{\omega^k = (x^k, \lambda^k)\}$  中含有矩阵  $\mathbf{H}$ , 且在式(12)中定义了该矩阵, 因此序列  $\{\omega^k\}$  可收敛到某个  $\omega^\infty \in \Omega^*$ .

**证明** 由式(20)可知, 序列  $\{\omega^k\}$  是有界的, 并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_H^2 = 0$ . 设  $\omega^\infty$  是  $\{\omega^k\}$  的聚点,  $\{\omega^{k_j}\}$  是收敛到  $\omega^\infty$  的子序列, 同时在式(13)中令  $k = k_j - 1$ , 则由此可得:

$$\omega^{k_j} \in \Omega, \theta(x) - \theta(x^{k_j}) + (\omega - \omega^{k_j})^T F(\omega^{k_j}) \geq (\omega - \omega^{k_j})^T \mathbf{H}(\omega^{k_j-1} - \omega^{k_j}), \forall \omega \in \Omega.$$

因为矩阵  $\mathbf{H}$  是正定的, 所以由式  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_H^2 = 0$  以及  $\theta(x)$  和  $F(\omega)$  的连续性可得:

$$\omega^\infty \in \Omega, \theta(x) - \theta(x^\infty) + (\omega - \omega^\infty)^T F(\omega^\infty) \geq 0, \forall \omega \in \Omega.$$

上式表明  $\omega^\infty$  是式(4)的一个解点. 于是根据式(20)可知  $\|\omega^{k+1} - \omega^\infty\|_H^2 \leq \|\omega^k - \omega^\infty\|_H^2$ , 因此  $\{\omega^k\}$  收敛到  $\omega^\infty$ . 定理2得证.

## 2 数值实验

实验环境为: 笔记本电脑, 处理器为 Intel Core i5-8250U CPU@1.60 GHz 1.80 GHz, 内存为 4 GB, 系统为 Windows10, 软件为 MATLAB R2016b. 实验中给定矩阵  $\mathbf{C}$  为对称矩阵. 在 F-模下求与  $\mathbf{C}$  距离最近的相关性矩阵为:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{C}\|_F^2 \mid \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{e}, \mathbf{X} \in \mathbf{S}_+^n \right\}. \quad (21)$$

其中:  $\mathbf{e}$  表示  $n$ -维向量, 其每个分量都是 1(数字 1);  $\mathbf{S}_+^n$  表示  $n \times n$  正半定锥的集合. 本文选取 C-PPA 算法<sup>[10]</sup>与本文提出的 GEALM 算法进行比较. 当  $\text{tol} = le - 10$  时, 2 种算法求解相关行矩阵(式(21))的结果见表 1. 图 1 和图 2 为  $\text{tol} = le - 10$  时, 两种算法分别在维度  $n = 150$  和  $n = 300$  下的迭代变化图. 当  $\text{tol} = le - 12$  时, 2 种算法求解相关行矩阵(式(21))的结果见表 2. 图 3 和图 4 为  $\text{tol} = le - 12$  时, 2 种算法分别在维度  $n = 100$  和  $n = 200$  下的迭代变化图.

由表 1 和表 2 及图 1—图 4 可知,在矩阵取不同维度和  $tol$  取不同数值时,GEALM 算法在迭代次数、CPU 运行时间、收敛速度等方面显著优于 C-PPA 算法,由此表明 GEALM 算法优于 C-PPA 算法.

表 1  $tol = 1e-10$  时 2 种算法的迭代次数和 CPU 运行时间

$n$	GEALM		C-PPA	
	迭代次数	CPU 运行时间/s	迭代次数	CPU 运行时间/s
100	20	0.045	30	0.057
150	20	0.085	31	0.156
200	20	0.150	31	0.193
300	20	0.447	32	0.532

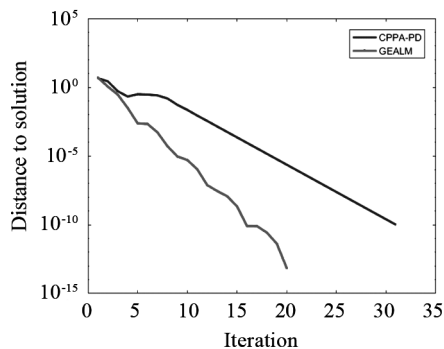


图 1  $n=150$  时 2 种算法的迭代变化

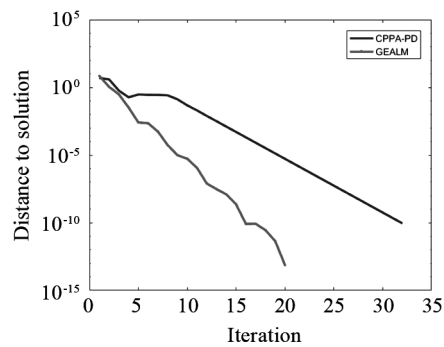


图 2  $n=300$  时 2 种算法的迭代变化

表 2  $tol = 1e-12$  时 2 种算法的迭代次数和 CPU 运行时间

$n =$	GEALM		C-PPA	
	迭代次数	CPU 运行时间/s	迭代次数	CPU 运行时间/s
100	24	0.032	35	0.041
150	20	0.076	36	0.139
200	20	0.145	37	0.206
500	20	1.143	38	1.284

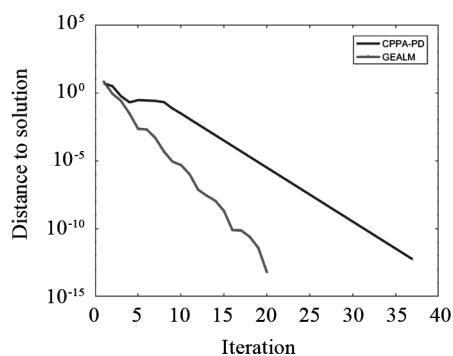


图 3  $n=100$  时 2 种算法的迭代变化

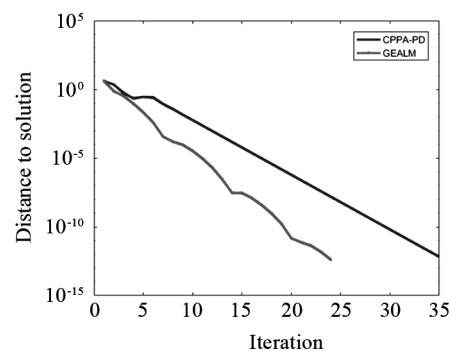


图 4  $n=200$  时 2 种算法的迭代变化

## 参考文献:

- [1] HE B S, YUAN X M, ZHANG W X. A customized proximal point algorithm for convex minimization with linear constraints[J]. Computational Optimizaiton and Applications, 2013, 56: 559-572.
- [2] HE B S, YUAN X. Balanced augmented lagrangian method for convex programming[OL/J]. arXiv:2108.08554v1 [2021-08-19]. <https://arxiv.org/abs/2108.08554>.

(下转第 364 页)

- postharvest irradiation and superfine grinding wall disruption treatment on the bioactive compounds, endogenous enzyme activities, and antioxidant properties of pine (*Pinus yunnanensis*) pollen during accelerated storage [J]. LWT-Food Science and Technology, 2021, 144:111249.
- [8] 梁海燕, 马平川, 朱文凯, 等. 泰山松花粉抗病毒作用的研究进展[J]. 山东化工, 2019, 48(8):78-79.
- [9] SU F C, SUN M M, GENG Y.  $^1\text{H}$ -NMR metabolomics analysis of the effects of sulfated polysaccharides from masson pine pollen in RAW264.7 macrophage cells[J]. Molecules, 2019, 24(9):1841.
- [10] 薛雨. 基于遗传算法和伴随方法的人居环境空气质量逆向问题研究[D]. 天津:天津大学, 2016.
- [11] 袁桂香, 罗小菊, 刘映良. 马尾松松花粉多糖提取工艺[J]. 林业工程学报, 2016, 1(4):80-84.
- [12] 尹涛, 何昭璇, 孙睿睿, 等. 机器学习在针灸研究领域的应用现状与展望[J]. 中国针灸, 2020, 40(12):1383-1386.
- [13] 郝晓华, 曹丽蓉, 罗淑政. 响应面优化超声波法提取薄荷多糖的研究[J]. 中国饲料, 2021(21):26-31.
- [14] 李瑞雪, 王钰婷, 夏家凤, 等. 桑黄菌丝体中多糖提取工艺优化及其体外抗氧化活性分析[J]. 中国农学通报, 2019, 35(29):143-150.
- [15] 王淑娟, 魏凯, 黄河, 等. 泰山松花粉多糖体外抗鸡传染性法氏囊病毒的效果[J]. 中国兽医学报, 2018, 38(9):1670-1676.
- [16] 金小越, 帕提古丽·玉苏普, 王华洋, 等. 莲威阿那其处方药材水提工艺优化[J]. 中国药房, 2015, 26(25):3551-3553.
- [17] 卢奕, 马力. 响应面法优化松花粉总酚的超声提取工艺[J]. 中国实验方剂学杂志, 2012, 18(16):53-56.
- [18] 张锐, 顾志荣, 吕鑫, 等. 基于球面对称设计和 GA-BP 神经网络模型结合 AHP-CRITIC 优化清咽止痛方提取工艺[J]. 中药材, 2022(7):1692-1699.

~~~~~

(上接第 326 页)

- [3] CHAMBOLLE A, POCK T. A first-order primal-dual algorithms for convex problem with applications to imaging [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 40:120-145.
- [4] GU G, HE B S, YUAN X M. Customized proximal point algorithms for linearly constrained convex minimization and saddle-point problems: A unified approach[J]. Computational Optimization and Applications, 2014, 59:135-161.
- [5] HE B S, YUAN X M, ZHANG W X. A customized proximal point algorithm for convex minimization with linear constraints[J]. Computational Optimization and Applications, 2013, 56:559-572.
- [6] HE B S, YOU Y F, YUAN X M. On the convergence of primal-dual hybrid gradient algorithms[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2014, 7:2526-2537.
- [7] MA F, NI M F. A class of customized proximal point algorithms for linearly constrained convex optimization[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37:896-911.
- [8] ZHU Y, WU J, YU G H. A fast proximal point algorithm for  $l_1$ -minimization problem in compressed sensing[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270:777-784.
- [9] BAI J C. A new insight on augmented lagrangian method and its extensions[OL/J]. arXiv:2108.11125v2[2021-06-21]. <https://arxiv.org/abs/2108.11125v2>.
- [10] BONETTINI S, RUGGIERO V. On the convergence of primal-dual Hybrid Gradient algorithms for total variation image restoration[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2012, 44:236-253.