文章编号: 1004-4353(2022)04-0318-04

行为 m-NA 阵列的完全收敛性

程书红
(闽南理工学院 信息管理学院, 福建 泉州 362700)

摘要: 在研究 m-NA 阵列行和的收敛性质的基础上,利用截尾方法和矩不等式获得了 m-NA 阵列的完全收敛性定理.所得结果推广了文献[9]中的研究结果(m-NA 随机变量序列要弱于 NA 随机变量序列).

关键词: m-NA 阵列; 完全收敛性; 慢变化函数
中图分类号: O211.4 **文献标识码**: A

The complete convergence for arrays of rowwise m-NA

CHENG Shuhong
(*Minnan University of Science and Technology*, *Quanzhou* 362700, *China*)

Abstract: On the basis of studying the convergence properties of m-NA array row sums, the complete convergence theorem of m-NA array is obtained by using the truncation method and moment inequality. The results obtained generalize the literature [9] results (m-NA random variable sequence is weaker than NA random variable sequence).

Keywords: m-NA arrays; complete convergence; slowly variable function

0 引言

1983 年, Joag 等[1]提出了如下 NA(Negatively Associated)定义:

定义 1 称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 是 NA 的,若对任意两个非空不交子集 $A_1, A_2 \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ 均有 $\mathrm{Cov}(f_1(x_i; i \in A_1), f_2(x_j; j \in A_2)) \leqslant 0$,其中 $f_i (i=1,2)$ 是使上式有意义且对各变元是不降的函数.称随机变量列 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 NA 列,若对任意的 $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 NA 的.

由于 NA 序列在可靠性理论、渗透理论和多元统计分析理论等方面有着广泛应用,因此许多学者对其进行了研究[2]. 2007 年, Hu 等[3] 提出了如下 m-NA 随机变量的定义:

定义 2 设 $m \geqslant 1$ 是一个给定的整数,如果对任意的 $n \geqslant 2$ 和满足 $|i_k - i_j| \geqslant m \ (1 \leqslant k \neq j \leqslant n)$ 的任意 $i_1, \cdots, i_n$, $X_{i_1}, \cdots, X_{i_n}$ 均为 NA 序列,则称 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 m-NA(m-Negatively Associated) 序列. 固定 n,并假设每一行内的随机变量序列 $\{X_{ni}\}$ 是 m-NA 的,则称随机阵列 $\{X_{ni}; 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \mathbf{N}\}$ 是行为 m-NA 阵列.

由定义 2 可知, NA 序列是 m-NA 序列在 $m=1$ 时的特例. 由于 m-NA 随机变量弱于 NA 随机变量,因此近年来一些学者对 m-NA 序列的收敛性进行了研究. 例如: Hu 等[4] 研究了一个具有 m-NA 随机变

收稿日期: 2022-09-28
基金项目: 福建省中青年教师教育科研项目(JAT200743)
作者简介: 程书红(1979—),女,讲师,研究方向为微积分和常微分方程.

量的 Kolmogorov 指数不等式，Wu 等[5] 研究了 m-NA 随机变量加权和的完全收敛性和完全矩收敛性，Shen 等[6] 研究了具有 m-NA 随机变量的 Marcinkiewicz-Zygmund 型不等式和 Rosenthal 型不等式，Wang 等[7] 研究了 m-NA 随机变量部分和的若干强收敛性. 基于上述研究，本文利用截尾方法和矩不等式研究 m-NA 阵列的完全收敛性问题. 本文中用 C 表示与 n 无关的正常数，并且 C 可在不同的地方表示不同的常数，即使在同一式中也是如此. 本文记 $S_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{j}X_{nk}$.

1　主要结果及其证明

引理 1[6]　设 $\{X_n;n\in\mathbf{N}\}$ 为 m-NA 随机变量序列. 若 $\{f_n;n\in\mathbf{N}\}$ 皆是单调非降（或者单调非增）连续函数，则 $\{f_n(x_n);n\in\mathbf{N}\}$ 仍然是 m-NA 序列.

引理 2[6]　设 $\{X_n;n\in\mathbf{N}\}$ 是均值为 0 的 m-NA 序列，且对 $p\geqslant 1$ 有 $E|X_n|^p<\infty$. 则对 $\forall n\geqslant m\geqslant 1$，若 $1\leqslant p\leqslant 2$，则 $E\left(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum\limits_{i\leqslant j}X_i\right|^p\right)\leqslant C_{m,p}\sum\limits_{i\leqslant n}E|X_i|^p$. 这里取 $C_{m,p}=4m^p$.

引理 3[8]　设 $l(x)>0$ 为 $x\to\infty$ 的慢变化函数，则有：

1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{l(vx)}{l(x)}=1,\forall v>0$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{l(v+x)}{l(x)}=1,\forall v>0$；

2）$\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{2^k\leqslant x\leqslant 2^{k+1}}\dfrac{l(x)}{l(2^k)}=1$；

3）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{v}l(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-v}l(x)=0,\forall v>0$.

定理 1　设 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant n,n\in\mathbf{N}\}$ 是行为 m-NA 阵列，$l(x)$ 是慢变化函数，且 $1<p<2$ 和 $\delta>1$ 时满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{k\in\mathbf{N}}n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}x\ln^{\delta}xP(|X_{nk}|^p\geqslant x)=0$，则当 $\alpha p\geqslant 1$ 时有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{nj}-ES_{nj}|>\varepsilon n^{\alpha}\right)<\infty,\forall\varepsilon>0.$$

证明　取 $x_n=n^{\alpha(2-p)/4}$. 由于 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant n,n\in\mathbf{N}\}$ 是行为 m-NA 阵列，$l(x)$ 是慢变化函数，则当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to\infty$. 对 X_{nk} 截尾，并记：

$$X_{nk}^{(1)}=-x_nI(X_{nk}\leqslant -x_n)+X_{nk}I(|X_{nk}|<x_n)+x_nI(X_{nk}\geqslant x_n),$$
$$X_{nk}^{(2)}=X_{nk}-X_{nk}^{(1)}=(X_{nk}+x_n)I(X_{nk}\leqslant -x_n)+(X_{nk}-x_n)I(X_{nk}>x_n),$$
$$S_{nj}^{(1)}=\sum_{k=1}^{j}X_{nk}^{(1)},\ S_{nj}^{(2)}=\sum_{k=1}^{j}X_{nk}^{(2)}.$$

当 $1<p<2$ 时，由引理 1 知 $\{X_{ni}^{(1)};1\leqslant i\leqslant n,n\in\mathbf{N}\}$ 和 $\{X_{ni}^{(2)};1\leqslant i\leqslant n,n\in\mathbf{N}\}$ 仍是 m-NA 阵列，并且对 $\forall\varepsilon>0$ 有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{nj}-ES_{nj}|>\varepsilon n^{\alpha}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{nj}^{(1)}-ES_{nj}^{(1)}|>n^{\alpha}\varepsilon/2\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S_{nj}^{(2)}-ES_{nj}^{(2)}|>n^{\alpha}\varepsilon/2\right)=I_{n1}+I_{n2}.$$

由引理 2、Markov 不等式及 $|X_{ni}^{(1)}|\leqslant x_n$ 可得：

$$I_{n1}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-2\alpha}l(n)E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{nj}^{(1)}-ES_{nj}^{(1)}|^2\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-2\alpha}l(n)\log^2 n\sum_{k=1}^{n}E|X_{nk}^{(1)}|^2\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-2\alpha}l(n)\log^2 n\sum_{k=1}^{n}x_n^2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-2\alpha}n^{\alpha(2-p)/2}l(n)\log^2 n\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{1+\alpha(2-p)/2}} l(n) \log^2 n < \infty.$$

由 Morkov 不等式、$|X_{nk}^{(2)}| \leqslant |X_{nk}| I(|X_{nk}| \geqslant x_n)$ 不等式及引理 2 可得:

$$I_{n2} \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) E(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_{nj}^{(2)} - ES_{nj}^{(2)}|^2) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} E|X_{nk}^{(2)}|^2 \leqslant$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \geqslant x_n) \leqslant$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} x_n^2 P(|X_{nk}| \geqslant x_n) +$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} \int_{x_n^2}^{\infty} P(|X_{nk}|^2 \geqslant t) \mathrm{d}t = I_{n2}^{(1)} + I_{n2}^{(2)}.$$

由 $\lim_{x \to \infty} \sup_{k \in \mathbf{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x \ln^{\delta} x P(|X_{nk}|^p \geqslant x) = 0$ 知:若 $\exists M > 0$,则当 $x > M$ 时有

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P(|X_{nk}|^p \geqslant x) < x^{-1} \ln^{-\delta} x. \tag{1}$$

又因为 $x_n = n^{\alpha(2-p)/4}$,所以 $\exists N > 0$,且使得当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n > M$. 于是由上述可得:

$$I_{n2}^{(1)} = \sum_{n=1}^{N-1} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} x_n^2 P(|X_{nk}| \geqslant x_n) +$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} x_n^2 P(|X_{nk}| \geqslant x_n) \leqslant$$

$$C + C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} x_n^{2/p} P(|X_{nk}|^p \geqslant x_n) \leqslant$$

$$C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) x_n^{2/p} \log^2 n \sum_{k=1}^{n} n^{-1} P(|X_{nk}|^p \geqslant x_n) \leqslant C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) x_n^{2/p-1} \log^2 n \ln^{-\delta} n \leqslant$$

$$C \sum_{n=N}^{\infty} n^{-1-\alpha(2-p)+\alpha(2-p)(2-p)/4} l(n) \log^2 n \ln^{-\delta} n \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha(2-p)[1-(2-p)/4]} l(n) \log^2 n \ln^{-\delta} n < \infty.$$

同理可得:$I_{n2}^{(2)} \leqslant C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) \log^2 n \sum_{k=1}^{n} \int_{x_n^2}^{\infty} n^{-1} P(|X_{nk}|^2 \geqslant t) \mathrm{d}t$. 令 $t = z^{2/p}$,并将其代入上式可得:

$$I_{n2}^{(2)} \leqslant C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) \log^2 n \int_{x_n^p}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} n^{-1} P(|X_{nk}|^p \geqslant z) \mathrm{d}z \leqslant$$

$$C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) \log^2 n \int_{x_n^p}^{\infty} z^{-1} \ln^{-\delta} z \,\mathrm{d}z \leqslant C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) \log^2 n \int_{x_n^p}^{\infty} \ln^{-\delta} z \,\mathrm{d}(\ln z) \leqslant$$

$$C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) \log^2 n \int_{x_n^p}^{\infty} \ln^{-\delta} z \,\mathrm{d}(\ln z) \leqslant C \sum_{n=N}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} l(n) \log^2 n (\ln x_n^p)^{1-\delta} \leqslant$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha(2-p)} l(n) \log^2 n \ln^{1-\delta} n < \infty.$$

定理 1 证毕.

定理 1 表明,m-NA 阵列不仅具有更一般的完全收敛性,而且扩大了权函数的范围和推广了文献[9]的研究结果(m-NA 随机变量序列弱于 NA 随机变量序列). 因此,m-NA 阵列在多元统计分析、可靠性理论等方面更具有实际应用价值. 若取消定理 1 中 $n \in \mathbf{N}$ 这一限制条件,可得如下推论 1:

推论 1 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 NA 列,且当 $1 < p < 2$ 时有 $\lim_{x \to \infty} \sup_{n \in \mathbf{N}} n^{-1} \sum_{i \leqslant n} x \ln^{\delta} x P(|X_i|^p \geqslant x) = 0$,$\delta > 1$,则当 $\alpha p \geqslant 1$ 时有 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j - ES_j| > \varepsilon n^{\alpha}) < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

(下转第 331 页)

参考文献：

[1] CHEN J. Existence of solutions for a nonlinear PDE with an inverse square potential[J]. J Differential Equations, 2003,195:497-519.

[2] FERRERO A, GAZZOLA F. Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations[J]. J Differential Equations, 2001,177(2):494-522.

[3] CHEN J. Multiplicity result for a singular elliptic equation with indefinite nonlinearity[J]. J Math Anal Appl, 2008, 337:493-504.

[4] 吕登峰. 一类含不定非线性项奇异椭圆方程的正解[J]. 山西大学学报(自然科学版),2010,33(3):321-325.

[5] CATRINA F, WANG Z Q. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: Sharp constants, existence (and nonexistence) and symmetry of extremal functions[J]. Comm Pure Appl Math, 2001,56:229-258.

[6] SMETS D. Nonlinear Schrödinger equations with Hardy potential and critical nonlinearities[J]. Trans Amer Math Soc, 2005,357(7):2909-2938.

[7] TERRACINI S. On positive entire solutions to a class of equations with singular coefficient and critical exponent[J]. Adv Differential Equation, 1996,1(2):241-264.

[8] 林美琳. 带有临界指数的椭圆方程多重正解的存在性[J]. 数学的实践与认识,2020,50(7):204-208.

[9] 林美琳. 一类带权的非线性椭圆方程正解的存在性问题[J]. 数学学报(中文版),2009,52(1):171-180.

[10] LIONS P L. The concentration compactness principle in the calculus of variations: The limit case: part I[J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985,1(2):145-201.

[11] BREZIS H, LIEB E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proc Amer Math Soc, 1983,88(3):486-490.

(上接第 320 页)

参考文献：

[1] JOAG D K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. Annal of Statistics, 1983,11:286-295.

[2] WU Q Y, WANG Y Q, WU Y C. On some limit theorems for sums of NA random matrix sequences[J]. Chinese Journal of Probability and Statistics, 2006,22(1):56-62.

[3] HU Y J, MING R X, YANG W Q. Large deviations and moderate deviations for m-negatively associated random variables[J]. Acta Math Sci, 2007,27:886-896.

[4] HU T C, CHIANG C Y, TAYLOR R L. On complete convergence for arrays of rowwise m-negatively associated random variables[J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 2009,71:1075-1081.

[5] WU Y F, HU T C, VOLODIN A. Complete convergence and complete moment convergence for weighted sums of m-NA random variables[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015,2015,Article ID 200:14.

[6] SHEN A, ZHANG Y, XIAO B Q, et al. Moment inequalities for m-negatively associated random variables and their applications[J]. Statistical Papers,2017,58(3):911-928.

[7] WANG M H, PEI W C, ZHANG Y H, et al. Some strong convergence of partial sums of m-NA random variables [J]. Mathematics Quarterly, 2018,33(2):172-180.

[8] 白志东,苏淳. 关于独立和的完全收敛性[J]. 中国科学:A 辑,1985(5):399-412.

[9] STOUT W F. Some results on the complete and almost sure convergence of linear combinations of independent random variables and martingale differences[J]. Ann Math Statist, 1968,39:1549-1562.

[10] SUNG S H. Complete convergence for weighted sums of arrays of rowwise independent B-valued random variables[J]. Stochastic Anal Appl, 1997,15:255-267.