文章编号: 1004-4353(2022)04-0283-06

乘积度量空间上的 F-拟压缩条件和唯一不动点

朴勇杰
(延边大学 理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 通过引进一个五元函数类 F,在乘积度量空间上定义了 F-拟压缩的概念,给出了在完备乘积度量空间上满足 F-拟压缩条件映射的唯一不动点定理及其相应定理.同时,通过给出 1 个注记和 1 个实例说明了所得定理的正确性和价值.

关键词: 乘积度量空间; F-拟压缩; 不动点
中图分类号: O177.91; O189.11 **文献标识码**: A

F-quasi contractive conditions and unique fixed points on multiplicative metric spaces

PIAO Yongjie
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: The concept of F-quasi contractions is defined on multiplicative metric spaces by introducing a 5-dimensional function class F, and the unique fixed point theorems for mappings satisfying F-quasi contractive conditions and the corresponding fixed point theorems are given on complete multiplicative metric spaces. Finally, a remark and an example are given to illustrate the value and correctness of the given theorem.

Keywords: multiplicative metric space; F-quasi contraction; fixed point

1922 年,S.Banach 给出了如下 Banach 压缩原理(Banach 不动点定理)[1]:设 (X,d) 是完备的实度量空间,$f:X\to X$ 是自映射.如果存在 $k\in[0,1)$ 使得对任意的 $x,y\in X$,总有 $d(fx,fy)\leqslant kd(x,y)$ 成立,则 f 在 X 上有唯一不动点.由于 Banach 不动点定理形式简单,易于推广和改进,因此被广泛应用于多个领域中.1974 年,Ćirić 在完备的度量空间上引进了如下拟压缩自映射的概念[2]:

设 (X,d) 是度量空间,$f:X\to X$ 是自映射,则存在 $k\in[0,1)$ 且使得对任意的 $x,y\in X$ 始终有 $d(fx,fy)\leqslant k\max\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),d(x,fy),d(y,fx)\}$ 成立.

同时 Ćirić 还给出了 Ćirić 不动点定理(完备度量空间上的任何拟压缩映射必有唯一不动点).之后,一些学者在度量空间、2-度量空间、偏度量空间、锥度量空间等空间上进一步推广和改进了 Ćirić 不动点定理[3-9].2008 年,Bashirov 等[10] 引进了乘积度量空间的概念,并研究了乘积度量空间的若干基本性质.

收稿日期: 2022-10-15
基金项目: 国家自然科学基金(12261091)
作者简介: 朴勇杰(1962—),男(朝鲜族),博士,教授,研究方向为非线性分析和不动点理论.

文献[11-12]的作者给出了其他一些乘积度量空间的性质. 2012年, Ozavsar等[13]在乘积度量空间上给出了自映射的乘积压缩性,并得到了相应的不动点存在定理. 随后,文献[14-17]的作者在乘积空间上相继得到了一些不动点和公共不动点的存在定理. 文献[18-20]的作者在乘积度量空间上利用实函数类建立了一些新的压缩条件,并探讨了乘积度量空间上的不动点存在定理,其所得结果推广和改进了Banach不动点定理、Kannan不动点定理、Chatterjea不动点定理和Ćirić型不动点定理.

在本文中,首先引进了一个五元函数类F,并在完备的乘积度量空间上定义了F-拟压缩的概念;然后采用文献[20]中的证明思路证明了满足F-拟压缩条件的映射必有唯一不动点,并导出若干个推论,同时还通过实例验证了所得结果的正确性.

定义1[10] 设X是非空集合,称映射$d: X\times X\to[1,+\infty)$是$X$上的乘积度量是指$d$满足:

(i) 对任意的$x,y\in X$, $d(x,y)\geqslant 1$且$d(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$;

(ii) 对任意的$x,y\in X$, $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 对任意的$x,y,z\in X$, $d(x,z)\leqslant d(x,y)d(y,z)$.

如果X和d满足上述条件,则称(X,d)为乘积度量空间.

定义2[10] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$是X中的序列且$x\in X$. 若对任何$\varepsilon>1$,存在自然数N,使得当$n>N$时有$x_n\in B_\varepsilon(x)\triangleq\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$,则称序列$\{x_n\}$乘积收敛于$x$,并记为$x_n\to x\,(n\to\infty)$.

引理1[13] 如果(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$是X中的序列且$x\in X$,则有

$$x_n\to x\ (n\to\infty)\Leftrightarrow d(x_n,x)\to 1\ (n\to\infty).$$

定义3[13] 设(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$是X中的序列. 若对任何$\varepsilon>1$,存在自然数N,使得当$m,n>N$时$d(x_m,x_n)<\varepsilon$始终成立,则称序列$\{x_n\}$为乘积柯西序列.

引理2[13] 如果(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$是X中的序列,则$\{x_n\}$是乘积柯西序列当且仅当$d(x_m,x_n)\to 1\ (m,n\to\infty)$.

定义4[13] 如果乘积度量空间(X,d)中的每个乘积柯西序列都是乘积收敛的,则称(X,d)是完备的.

引理3[13] 如果(X,d)是乘积度量空间, $\{x_n\}$和$\{y_n\}$是X中的2个序列且$x,y\in X$,则有

$$x_n\to x\ (n\to\infty)\text{ 且 }y_n\to y\ (n\to\infty)\Rightarrow d(x_n,y_n)\to d(x,y)\ (n\to\infty).$$

定义5 函数类F为$\Phi\in F$当且仅当$\Phi:[1,+\infty)^5\to[1,+\infty)$满足:

Φ(i) Φ是连续且单调递增的;

Φ(ii) 当$x\leqslant\Phi(x,x,x,x^2,1)$或$x\leqslant\Phi(x,1,1,x,x)$时, $x=1$.

例1 定义$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\dfrac{x_1(1+x_2x_3x_4x_5)}{x_1+x_2x_3x_4x_5}$, $\forall x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in[1,+\infty)$. 显然知$\Phi$是连续且单调递增的. 若$x\leqslant\Phi(x,x,x,x^2,1)=\dfrac{x(1+x^4)}{x+x^4}$,则有$x+x^4\leqslant 1+x^4$,因此$x=1$. 又若$x\leqslant\Phi(x,1,1,x,x)=\dfrac{x(1+x^2)}{x+x^2}$,则有$x+x^2\leqslant 1+x^2$,因此$x=1$. 由以上可知Φ(ii)成立,因此$\Phi\in F$.

例2 定义$\Phi_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=[\max\{x_1,x_2,x_3,x_4^{\frac{1}{2}},x_5\}]^k$, $\forall x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in[1,+\infty)$,其中$k\in[0,1)$. 显然知$\Phi_1$是连续且单调递增的. 若$x\leqslant\Phi_1(x,x,x,x^2,1)=[\max\{x,x,x,(x^2)^{\frac{1}{2}},1\}]^k=[\max\{x,1\}]^k=x^k$,则必有$x=1$. 同理由$x\leqslant\Phi_1(x,1,1,x,x)$可推出$x=1$,因此$\Phi_1\in F$. 另外,若定义$\Phi_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=[\max\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}]^k$, $\forall x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in[1,+\infty)$,其

中 $k\in[0,\frac{1}{2})$. 由以上易知 $\Phi_2\in F$.

定义 6　设(X,d)是完备的乘积度量空间，$f:X\to X$ 为自映射，则称 f 是F-拟压缩映射是指存在 $\Phi\in F$ 使得对任意的 $x,y\in X$ 总有下式成立：

$$d(fx,fy)\leqslant\Phi(d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),d(x,fy),d(y,fx)).\tag{1}$$

定理 1　设(X,d)是完备的乘积度量空间. 如果 $f:X\to X$ 是F-拟压缩的，则 f 有唯一不动点，并且对任意的 $x\in X$，迭代序列$\{f^n x\}$收敛于该唯一不动点.

证明　因为 f 是F-拟压缩的，因此存在 $\Phi\in F$ 使得式(1)成立. 任取 $x\in X$，取 $x_0=x$，定义$x_n=f^n x=fx_{n-1}$，$\forall n=1,2,\cdots$，并构造一个序列$\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$. 于是根据式(1)、定义 1 中的(i)和(iii)及条件 Φ(i)可知，对于任何 $n=1,2,\cdots$，有下列关系式成立：

$$\begin{aligned}&d(x_n,x_{n+1})=d(fx_{n-1},fx_n)\leqslant\\&\quad\Phi(d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},fx_{n-1}),d(x_n,fx_n),d(x_{n-1},fx_n),d(x_n,fx_{n-1}))=\\&\quad\Phi(d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n-1},x_{n+1}),d(x_n,x_n))\leqslant\\&\quad\Phi(d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n-1},x_n)d(x_n,x_{n+1}),1)).\end{aligned}\tag{2}$$

如果存在某自然数 N 使得$d(x_{N-1},x_N)<d(x_N,x_{N+1})$，则 $d(x_N,x_{N+1})>1$. 另一方面，根据式(2)的第 1 行和第 4 行以及条件 Φ(i)和上述假设可得：

$$\begin{aligned}&d(x_N,x_{N+1})\leqslant\Phi(d(x_{N-1},x_N),d(x_{N-1},x_N),d(x_N,x_{N+1}),d(x_{N-1},x_N)d(x_N,x_{N+1}),1))\leqslant\\&\quad\Phi(d(x_N,x_{N+1}),d(x_N,x_{N+1}),d(x_N,x_{N+1}),[d(x_N,x_{N+1})]^2,1)).\end{aligned}$$

再根据条件 Φ(ii)可得 $d(x_N,x_{N+1})=1$，这与 $d(x_N,x_{N+1})>1$ 相矛盾，因此必有

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant d(x_{n-1},x_n),\forall n=1,2,\cdots.$$

上式表明$\{d(x_n,x_{n+1})\}_{n=0}^{+\infty}$是单调递减且有下界 1 的实数列，因此存在常数 $u\geqslant1$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}d(x_n,x_{n+1})=u$. 在式(2)的第 1 行和第 4 行同时取 $n\to+\infty$，则根据 Φ(i)和上式可得 $u\leqslant\Phi(u,u,u,u^2,1)$. 由此再根据条件 Φ(ii)可得 $u=1$，即：

$$\lim_{n\to+\infty}d(x_n,x_{n+1})=u=1.\tag{3}$$

假设$\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$不是乘积柯西序列，则存在实数$\varepsilon>1$，使得对任意的自然数k，存在2个自然数$m(k)$和 $n(k)$使得 $m(k)>n(k)$且满足

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)})>\varepsilon,\ d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\leqslant\varepsilon.\tag{4}$$

由式(4)和定义 1 可得：

$$\varepsilon<d(x_{m(k)},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})\varepsilon.$$

对上式两边取 $k\to+\infty$ 并再利用式(3)可得：

$$\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)})=\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})=\varepsilon.\tag{5}$$

于是根据定义 1 可得：

$$\frac{d(x_{m(k)},x_{n(k)})}{d(x_{m(k)+1},x_{m(k)})}\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{m(k)})d(x_{m(k)},x_{n(k)}),\tag{6}$$

$$\frac{d(x_{m(k)},x_{n(k)})}{d(x_{n(k)+1},x_{n(k)})}\leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})\leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)})d(x_{n(k)},x_{n(k)+1}).\tag{7}$$

在式(6)和式(7)两边取 $k\to+\infty$ 并再根据式(3)和式(5)可得：

$$\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})=\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})=\varepsilon.\tag{8}$$

类似地，根据式(3)和式(8)，对式

$$\frac{d(x_{m+1(k)},x_{n(k)})}{d(x_{n(k)+1},x_{n(k)})}\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})$$

的两边取 $k\to+\infty$ 可得:

$$\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})=\varepsilon. \tag{9}$$

根据式(1)可知,对任意的自然数 k 有下式成立:

$$\begin{aligned}&d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})=d(fx_{m(k)},fx_{n(k)})\leqslant\\&\quad\Phi(d(x_{m(k)},x_{n(k)}),d(x_{m(k)},fx_{m(k)}),d(x_{n(k)},fx_{n(k)}),d(x_{m(k)},fx_{n(k)}),d(x_{n(k)},fx_{m(k)}))=\\&\quad\Phi(d(x_{m(k)},x_{n(k)}),d(x_{m(k)},x_{m(k)+1}),d(x_{n(k)},x_{n(k)+1}),d(x_{m(k)},x_{n(k)+1}),d(x_{n(k)},x_{m(k)+1})).\end{aligned}$$

对上式取 $k\to+\infty$,并再根据式(3)、(5)、(8)、(9)可得 $\varepsilon\leqslant\Phi(\varepsilon,1,1,\varepsilon,\varepsilon)$. 于是由条件 Φ(ii) 得知 $\varepsilon=1$,这与 $\varepsilon>1$ 相矛盾,因此 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 是乘积柯西序列. 再根据 (X,d) 的完备性可知,存在 $x^*\in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}d(x_n,x^*)=1$.

根据式(1)可知,对任意的自然数 n 有下式成立:

$$\begin{aligned}&d(x_{n+1},fx^*)=d(fx_n,fx^*)\leqslant\\&\quad\Phi(d(x_n,x^*),d(x_n,fx_n),d(x^*,fx^*),d(x_n,fx^*),d(x^*,fx_n))\leqslant\\&\quad\Phi(d(x_n,x^*),d(x_n,x_{n+1}),d(x^*,fx^*),d(x_n,fx^*),d(x^*,x_{n+1})).\end{aligned}$$

对上式取 $n\to+\infty$,并再根据条件 Φ(i)、引理 2、引理 3 及定义 1 可得:$d(x^*,fx^*)\leqslant\Phi(1,1,d(x^*,fx^*),d(x^*,fx^*),1)\leqslant\Phi(d(x^*,fx^*),d(x^*,fx^*),d(x^*,fx^*),[d(x^*,fx^*)]^2,1)$. 由此再根据条件 Φ(ii) 可得 $d(x^*,fx^*)=1$,因此 x^* 是 f 的一个不动点.

如果 $y^*\in X$ 也是 f 的不动点,则由式(1)可得:

$$\begin{aligned}&d(x^*,y^*)=d(fx^*,fy^*)\leqslant\\&\quad\Phi(d(x^*,y^*),d(x^*,fx^*),d(y^*,fy^*),d(x^*,fy^*),d(y^*,fx^*))\leqslant\\&\quad\Phi(d(x^*,y^*),1,1,d(x^*,y^*),d(y^*,x^*)).\end{aligned}$$

由上式再根据条件 Φ(ii) 可得 $d(x^*,y^*)=1$,所以 $y^*=x^*$ 是 f 的唯一不动点. 因为 $x_n=f^nx$, $\forall n=1,2,\cdots$,且 $x_n\to x$,因此迭代序列 $\{f^nx\}_{n=0}^{+\infty}$ 收敛于 f 的唯一不动点 x^*.

根据定理 1 和例 1 可得到如下分式压缩型不动点定理 2.

定理 2 设 (X,d) 是完备的乘积度量空间,$f:X\to X$ 是自映射. 如果对任意的 $x,y\in X$ 始终有

$$d(fx,fy)\leqslant\frac{[1+d(x,fx)d(y,fy)d(x,fy)d(y,fx)]}{[d(x,y)+d(x,fx)d(y,fy)d(x,fy)d(y,fx)]}\cdot d(x,y) \tag{10}$$

成立,则 f 有唯一不动点.

例 3 在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上定义函数 $d(x,y)=e^{|x-y|}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$,则 $(\mathbf{R},d)$ 是乘积度量空间[16]. 令 $X=\{1,2,5\}$,则易知 (X,d) 是完备的乘积度量空间. 定义 $f:X\to X$ 为 $f1=f2=1$, $f5=2$,则:

当 $x=y=1$ 时,有:

$$d(f1,f1)=e^{|f1-f1|}=1\leqslant\frac{1+1}{1+1}\times1=\frac{[1+d(1,f1)d(1,f1)d(1,f1)d(1,f1)]}{[d(1,1)+d(1,f1)d(1,f1)d(1,f1)d(1,f1)]}d(1,1);$$

当 $x=y=2$ 时,有:

$$d(f2,f2)=e^{|f2-f2|}=1\leqslant\frac{1+e^4}{1+e^4}\times1=\frac{[1+d(2,f2)d(2,f2)d(2,f2)d(2,f2)]}{[d(2,2)+d(2,f2)d(2,f2)d(2,f2)d(2,f2)]}d(2,2);$$

当 $x=y=5$ 时,有:

$$d(f5,f5)=e^{|f5-f5|}=1\leqslant\frac{1+e^{12}}{1+e^{12}}\times1=\frac{[1+d(5,f5)d(5,f5)d(5,f5)d(5,f5)]}{[d(5,5)+d(5,f5)d(5,f5)d(5,f5)d(5,f5)]}d(5,5);$$

当 $x=1$，$y=2$ 时，有：

$$d(f1,f2)=e^{|f1-f2|}=1<\frac{1+e^2}{e+e^2}e=\frac{[1+d(1,f1)d(2,f2)d(1,f2)d(2,f1)]}{[d(1,2)+d(1,f1)d(2,f2)d(1,f2)d(2,f1)]}d(1,2);$$

当 $x=1$，$y=5$ 时，有：

$$d(f1,f5)=e^{|f1-f5|}=e<\frac{1+e^8}{e^4+e^8}e^4=\frac{[1+d(1,f1)d(5,f5)d(1,f5)d(5,f1)]}{[d(1,5)+d(1,f1)d(5,f5)d(1,f5)d(5,f1)]}d(1,5);$$

当 $x=2$，$y=5$ 时，有：

$$d(f2,f5)=e^{|f2-f5|}=e<\frac{1+e^8}{e^3+e^8}e^3=\frac{[1+d(2,f2)d(5,f5)d(2,f5)d(5,f2)]}{[d(2,5)+d(2,f2)d(5,f5)d(2,f5)d(5,f2)]}d(2,5).$$

由上述计算可知，对任意的 $x,y\in X$，式(10)都成立. 由此根据定理 2 可知，f 有唯一不动点 1.

下面给出乘积空间上的 Ćirić 不动点定理.

定理 3　设(X,d)是完备的乘积度量空间，定义 $f:X\to X$ 为自映射. 如果存在 $k\in[0,1)$ 且使得对任意的 $x,y\in X$ 始终有

$$d(fx,fy)\leqslant[\max\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),d(x,fy),d(y,fx)\}]^k \tag{11}$$

成立，则 f 有唯一不动点.

证明　定义 $d^*(x,y)=\ln^{d(x,y)}$，$\forall x,y\in X$，则易证(X,d^*)是完备的实度量空间. 由式(11)可得，对任意的 $x,y\in X$ 有：

$$\begin{aligned}d^*(fx,fy)&=\ln^{d(fx,fy)}\leqslant k\cdot\ln^{[\max\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),d(x,fy),d(y,fx)\}]}=\\&k\cdot\max\{\ln^{d(x,y)},\ln^{d(x,fx)},\ln^{d(y,fy)},\ln^{d(x,fy)},\ln^{d(y,fx)}\}=\\&k\cdot\max\{d^*(x,y),d^*(x,fx),d^*(y,fy),d^*(x,fy),d^*(y,fx)\}.\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)表明 f 满足完备实度量空间(X,d^*)上的 Ćirić 不动点定理，因此 f 有唯一不动点.

注记 1　文献[13]中指出：如果完备的乘积度量空间(X,d)上的自映射满足如下乘积压缩条件：$d(fx,fy)\leqslant[d(x,y)]^k$，$\forall x,y\in X$，其中 $k\in[0,1)$，则 f 存在唯一不动点. 该结果就是乘积度量空间上的Banach型不动点定理，等价于实度量空间(X,d)的Banach不动点定理(实度量空间上的Banach不动点定理中的压缩条件是 $d(fx,fy)\leqslant kd(x,y)$，$\forall x,y\in X$，$k\in[0,1)$). 本文定理2中的压缩形式是实度量空间上的压缩形式，而文献[13]中的是方幂形式，并且其系数

$$k(x,y):=\frac{1+d(x,fx)d(y,fy)d(x,fy)d(y,fx)}{d(x,y)+d(x,fx)d(y,fy)d(x,fy)d(y,fx)}$$

是变系数，因此本文中的定理 1 和定理 2 很好地推广和改进了 Banach 不动定理及其相关定理.

定理 4　设(X,d)是乘积度量空间，$f:X\to X$ 为自映射，且 fX 是完备的. 如果存在 $\Phi\in F$ 且使得对任意的 $x,y\in X$ 始终有

$$d(f^2x,f^2y)\leqslant\Phi(d(fx,fy),d(fx,f^2x),d(fy,f^2y),d(fx,f^2y),d(fy,f^2x)) \tag{13}$$

成立，则 f 在 X 中存在 1 个不动点.

证明　由 $fX\subseteq X$ 可推出 $f(fX)\subseteq fX$，因此 $f^*:=f|_{fX}:fX\to fX$ 是自映射. 于是由给定的条件可知，对任意的 $x^*,y^*\in fX$，存在 $x,y\in X$ 使得 $x^*=fx$，$y^*=fy$. 由此再根据式(13)可得：

$$\begin{aligned}&d(f^*x^*,f^*y^*)=d(f^2x,f^2y)\leqslant\\&\Phi(d(fx,fy),d(fx,f^2x),d(fy,f^2y),d(fx,f^2y),d(fy,f^2x))=\\&\Phi(d(x^*,y^*),d(x^*,f^*x^*),d(y^*,f^*y^*),d(x^*,f^*y^*),d(y^*,f^*x^*)).\end{aligned} \tag{14}$$

式(14)表明，f^* 在完备的乘积度量空间(fX,d)上满足定理 1 的所有条件. 由此可知 f^* 在 fX 上有唯一不动点，且 f 在 X 上至少存在一个不动点.

参考文献:

[1] BANACH S. Sur les opérations dans les ensembles abstraist et leur application aux équations inégrales[J]. Fundam Math, 1922, 3: 138-181.

[2] Ćirić L J B. A generalizaion of Banach' contraction principle[J]. Proc Amer Soc, 1974, 45: 267-273.

[3] KUMAM P, NGUYEN V D, SITTHAKERNGKIET K. A generalization of Ćirić fixed point theorems[J]. Filomat, 2015, 29(7): 1549-1556.

[4] VALERIU P, ALINA-MIHAELA P. Fixed point theoem of Ćirić type in weak partial metric spaces[J]. Filomat, 2017, 31(11): 3203-3207.

[5] XU S Y, RADENOVIĆ S. Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2014, 2014: 102.

[6] 许绍元,马超,周作领. 具有 Banach 代数的锥度量空间上拟压缩映射的新的不动点定理[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(4): 1-4.

[7] 朴勇杰. 具有 Banach 代数的无正规的锥度量空间上拟收缩映射的不动点定理的改进[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2018, 57(1): 63-68.

[8] RHAODES B E. Contraction type mappings on a 2-metric space[J]. Mathematische Nachrichten, 1979, 91: 151-155.

[9] PIAO Y J. Ćirić fixed point theorems under c-distance on non-normal cone metric spaces over Banach algebras[J]. Adv Fixed Point Theory, 2020, 10: 5.

[10] BASHIROV A E, KURPLNARA E M, OZYAPLCL A. Multiplicative calculus and its applications[J]. J Math Anal Appl, 2008, 337: 36-48.

[11] FLORACK L, ASSEN H V. Multiplicative calculus in biomedical image analysis[J]. J Math Imaging Vis, 2012, 42(1): 64-75.

[12] BASHIROV A E, MISIRLI E, TANDOGDU Y, et al. On modeling with multiplicative differential equations[J]. Appl Math J Chin Univ Ser B, 2011, 26: 425-438.

[13] OZAVSAR M, CEVIKEL A C. Fixed point of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces [J]. Applied Mathematics, 2012, 3: 35-39.

[14] HE X, SONG M, CHEN D. Common fixed points for weak commutative mappings on a multiplicative metric space[J]. Fixed Point Theory Appl, 2013, 4: 40-48.

[15] KANG S M, KUMAR P, KUMAR S, et al. Common fixed points for compatible mappings and its variants in multiplicative metric spaces[J]. Int J Pure Appl Math, 2015, 102(2): 383-406.

[16] JIANG Y, GU F. Common fixed points theorems for four maps satisfying ϕ-type contractive condition in multiplicative metric space[J]. Pure Appl Math, 2017, 33(2): 185-196.

[17] PIAO Y J. Unique common fixed points for four non-continuous mappings satisfying Ψ-implicit contractive condition on non-complete multiplicative metric spaces[J]. Adv Fixed Point Theory, 2019, 9(2): 135-145.

[18] 朴勇杰. 乘积度量空间上满足 $\sigma(\gamma)$-压缩条件映射的唯一不动点[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(3): 469-474.

[19] 朴勇杰. 乘积度量空间上具有唯一不动点的 G-隐式压缩映射[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2022, 48(1): 1-5.

[20] 朴勇杰. 乘积度量空间上一类隐式压缩映射的唯一不动点[J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(1): 59-63.