

文章编号: 1004-4353(2022)03-0229-06

证券市场中国内外机构投资者 共同参与的随机微分博弈

潘素娟¹, 李时银², 赵佩²

(1. 福建商学院 信息工程学院, 福州 350012; 2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 基于随机微分博弈理论, 建立了一种国内外机构投资者和散户群体参与的连续时间博弈模型. 首先将所有散户作为一个整体与国内外机构投资者共同进行博弈, 并以博弈各方持股率的动态关系构建动态系统方程, 以此构建一个随机微分博弈模型; 然后运用纳什均衡求解出满足价值函数的 HJB 偏微分方程, 以此得到随机控制系统的最优策略. 该结果可为金融监管部门监管证券市场和证券市场投资者买卖股票提供参考.

关键词: 动态系统; 纳什均衡; HJB 偏微分方程; 随机微分博弈

中图分类号: O211.6; F830.9

文献标识码: A

Stochastic differential game involving domestic and foreign institutional investors in securities market

PAN Sujuan¹, LI Shiyin², ZHAO Pei²

(1. College of Information Engineering, Fujian Business University, Fuzhou 350012, China;

2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Based on stochastic differential game theory, a continuous time game model involving domestic institutional investors, foreign institutional investors and retail investors is established. Firstly, all retail investors as a whole participate in the game with domestic and foreign institutional investors, and take the dynamic relationship of shareholding ratio of all parties in the game as the dynamic system equation, so as to construct a stochastic differential game model; Then the Nash equilibrium is used to solve the HJB partial differential equation satisfying the value function, so as to obtain the optimal strategy of the stochastic control system. The results can provide reference for financial supervision departments to supervise the securities market and investors to buy and sell stocks in the securities market.

Keywords: dynamic system; Nash equilibrium; HJB partial differential equation; stochastic differential game

0 引言

证券市场中庄家和散户的博弈对股票市场的总体发展态势有着重要的影响. 在现实证券投资决策中, 由于时间是连续的, 因此需要投资者时刻作出决定. 投资者的这种时间连续的决策可利用随机微分博弈理论对其进行研究. 例如: 李钧瑶^[1]研究了具有状态切换的两人零和随机微分对策的动态规划原理. Fonseca 等^[2]根据随机最大值原理给出了一个将非合作随机微分对策(SDG)变为潜在博弈的充分

收稿日期: 2022-01-24

基金项目: 福建省自然科学基金(2021J011253); 福建省社会科学基金(FJ2021B031)

作者简介: 潘素娟(1982—), 女, 硕士, 副教授, 研究方向为金融工程与金融数学.

条件. 杨璐等^[3]研究了带泊松跳的线性 Markov 切换系统的随机微分博弈问题, 并讨论了投资者在金融市场中的最优投资组合问题. 杨鹏^[4-5]研究了在交易费用和负债情形下的投资者与市场之间的随机微分博弈问题, 以及在 Vasicek 随机利率下的 DC 型养老金的随机微分博弈问题. 潘素娟等^[6]基于确定性微分博弈理论建立了一种庄家与散户间的连续时间的博弈模型. 但在已有的文献中, 尚未见到将随机微分博弈理论应用于证券市场中的连续时间博弈问题的研究中. 当前, 我国已经允许国外合格的机构投资者进入我国证券市场进行投资. 由于这些国外机构投资者具有强大的资本和信息等优势, 因此国外机构投资者的加入必然会对国内证券市场产生较大的影响. 为此, 本文将国内外机构投资者作为两个机构投资者(以下称为庄家), 运用动态博弈理论中的随机微分博弈对两个庄家和散户群体所参与的博弈行为进行分析, 并由此得到各庄家和散户博弈的纳什均衡策略^[7], 以为金融市场的随机微分博弈提供参考.

1 证券市场模型假设

1) 将股票市场中的散户投资者作为一个整体参与市场博弈. 庄家和散户间的博弈信息是不对称的, 即庄家比散户能够更及时、准确地掌握有关政策和市场信息.

2) 庄家和散户均为理性人^[8], 每个博弈参与者都能对自己和其他人的行为有正确的预期. 庄家和散户在采取任何策略之前, 都会考虑截至目前的历史股价走势, 同时也会预期自己的行为对其他决策者造成的影响.

3) 使用一个包含维纳过程(Wiener process)的随机微分方程^[9]描述股价. 假设市场周期为无限(因为投资者希望有一个长期的盈利目标), 投资者由两个庄家和散户组成. 在实际交易中, 两个庄家根据他们对股票价格的估计和股价的均值回归现象对股票价格进行均值修正^[10], 而散户只是作为庄家交易对手盘参与交易.

2 微分博弈的随机控制系统

1) 用 S_t 表示 t 时的股票价格, 并令 $X_t = \ln S_t$, 则 X_t 可表示 t 时的股票收益率. X_t 包含收益率的漂移项和波动项. 每个投资者(两个庄家和散户)都拥有一部分基准价值的股票. 令 u_i 表示投资者 i 对股票价格的预期收益水平, 则在 t 时刻投资者 i 对股价水平的预期偏差为 $(u_i - X_t)$, 此差值越大表示庄家对股票的需求越高.

2) 股票的价格由市场供求决定. 记庄家 1 (Banker1) 对股票的需求为 B_{1t} , 庄家 2 (Banker2) 对股票的需求为 B_{2t} . 假设需求过程满足以下随机微分方程:

$$dB_{1t} = (u_1(t) - X_t) dt + \sigma_1 dZ_t; \quad (1)$$

$$dB_{2t} = (u_2(t) - X_t) dt + \sigma_2 dZ_t. \quad (2)$$

其中 Z_t 是一维标准布朗运动, σ_1 和 σ_2 为正常数. 由于散户获取信息的能力相对较弱, 因此在已给信息集的前提下, 本文假设散户对股票的预期收益水平是一个市场平均水平, 记为 u . 散户总体需求过程 F_t 用如下随机微分方程表示:

$$dF_t = \alpha(u - X_t) dZ_t, \quad (3)$$

其中 α, u 是常数.

3) 由于股票的供应过程 G_t 由长期自主增长因素和短期金融市场表现因素决定, 因此 G_t 可用如下随机微分方程表示:

$$dG_t = v dt + \beta dX_t, \quad (4)$$

其中 β 和 v 是常数, G_t 取负值时表示 t 时刻股票供应过程中存在积压.

4) 假设动态的市场出清(市场结算)过程为:

$$dB_{1t} + dB_{2t} + dF_t = dG_t, \quad (5)$$

则由式(1)–(5)可得:

$$(u_1(t) + u_2(t) - 2X_t) dt + (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha X_t) dZ_t = v dt + \beta dX_t. \quad (6)$$

由式(6)进一步可得:

$$dX_t = \frac{1}{\beta}(u_1(t) + u_2(t) - v - 2X_t) dt + \frac{1}{\beta}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha X_t) dZ_t. \quad (7)$$

公式(7)即是随机微分博弈的线性受控方程^[11]. 公式中,过程 $u_1(\cdot)$ 和 $u_2(\cdot)$ 分别是庄家1和庄家2的控制策略. 若庄家 i 的策略 $u_i(t) = \tilde{u}_i(t, X_t)$ 是一个可测的映射 \tilde{u}_i ,则该策略为马尔可夫策略^[7].

5) 用 r_i 表示投资者 i 的瞬时(或流动)支付,它表示当状态为 x ,投资者选择的行动策略为 u_1 和 u_2 时,投资者 i 得到的瞬时支付为 $r_i(x, u_1, u_2, u)$,其中 u 是散户群体采取的行动策略. 假设投资者在追求目标效用最大化过程中,其更关注资产价值(x)和总体市场信息(u),则 r_i 的变化主要由 u_i 以及 u 和股票价格的对数 x 决定,而与 u_j 无关,其中 $j \neq i$,且 $i, j = 1, 2$. 因此瞬时支付 r_i 可以表示为:

$$r_i(x, u_1, u_2, u) = r_i(u_i - x, u - x). \quad (8)$$

为了便于得到博弈问题的显示解,本文假设支付函数为:

$$r_i(u_i - s, u - s) = p_i(u_i - s) + (1 - p_i)(u - s) - \gamma[p_i(u_i - s) + (1 - p_i)(u - s)]^2. \quad (9)$$

其中参数 $p_i(i=1, 2)$ 是外生固定的, $1 - p_i$ 表示第 i 个投资者的市场信息价值权重, $p_i(u_i - s) + (1 - p_i)(u - s)$ 表示投资者 i 的加权边际报酬. 本文假设式(9)是加权边际报酬的简单二次函数.

6) 财富评估利用瞬时支付在一段无限市场周期^[9] $(0, \infty)$ 中的贴现表示. 令 $\lambda (\lambda > 0)$ 为贴现因子. 如果投资者选择策略 u_1 和 u_2 ,则庄家1的目标函数(总计贴现支付)为:

$$\begin{aligned} J_1(x, u_1, u_2) &= E \left[\int_0^\infty \exp(-\lambda t) r_1(u_1(X_t) - X_t, u - X_t) dt \mid X_0 = x \right] = \\ &= E \left[\int_0^\infty \exp(-\lambda t) \{ p_1(u_1 - X_t) + (1 - p_1)(u - X_t) - \right. \\ &\quad \left. \gamma [p_1(u_1 - X_t) + (1 - p_1)(u - X_t)]^2 \} dt \mid X_0 = x \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

同理,庄家2的目标函数(总计贴现支付)为:

$$\begin{aligned} J_2(x, u_1, u_2) &= E \left[\int_0^\infty \exp(-\lambda t) \{ p_2(u_2 - X_t) + (1 - p_2)(u - X_t) - \right. \\ &\quad \left. \gamma [p_2(u_2 - X_t) + (1 - p_2)(u - X_t)]^2 \} dt \mid X_0 = x \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

将公式(7)、(10)、(11)联立即得庄家与散户博弈的随机控制系统.

3 随机控制系统的求解

由于庄家1和庄家2均希望通过控制其策略函数 $u_1(\cdot)$ 和 $u_2(\cdot)$ 来最大化地实现其目标函数 $J_1(x, u_1, u_2)$ 和 $J_2(x, u_1, u_2)$,因此在初始条件 x 下,若 $J_1(x, u_1^*, u_2^*) \geq J_1(x, u_1, u_2)$ 和 $J_2(x, u_1^*, u_2^*) \geq J_2(x, u_1, u_2)$ 对决策者的任何策略 u_1 和 u_2 都成立,则策略组 u_1^* 和 u_2^* 可称为纳什均衡策略. 为利用HJB方程建立两个庄家的纳什均衡策略,本文引入两个关于 x, ξ_1, ξ_2, u_1 和 u_2 的Hamiltonian函数:

$$H_1(x, \xi_1, u_1, u_2) = \frac{\xi_1}{\beta}(u_1 + u_2 - v - 2x) + \exp(-\lambda t) r_1(u_1 - x, u - x), \quad (12)$$

其中 u 和 v 是已知的. 将式(9)代入公式(12)可得如下Hamiltonian函数:

$$H_1(x, \xi_1, u_1, u_2) = \frac{\xi_1}{\beta}(u_1 + u_2 - v - 2x) +$$

$$\exp(-\lambda t) \{p_1(u_1 - x) + (1 - p_1)(u - x) - \gamma [p_1(u_1 - x) + (1 - p_1)(u - x)]^2\}. \quad (13)$$

同理可得:

$$H_2(x, \xi_2, u_1, u_2) = \frac{\xi_2}{\beta}(u_1 + u_2 - v - 2x) + \exp(-\lambda t) \{p_2(u_2 - x) + (1 - p_2)(u - x) - \gamma [p_2(u_2 - x) + (1 - p_2)(u - x)]^2\}. \quad (14)$$

假设 (u_1^*, u_2^*) 是贴现支付的一组纳什均衡策略, 并令 $V_1(x) = J_1(x, u_1^*, u_2^*)$, $V_2(x) = J_2(x, u_1^*, u_2^*)$. 若 V_1 和 V_2 足够光滑, 则 V_1 和 V_2 是 HJB 方程的值函数, 且 Hamiltonian 函数 $H_i(x, \xi_i, u_1, u_2)$ 中的拉格朗日函数值 ξ_i 为 $\xi_i = \frac{\partial V_i}{\partial x}$. 值函数 V_1 和 V_2 对应的 HJB 方程分别为:

$$\lambda V_1(x) - \frac{1}{2\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha x)^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \sup_{u_1} H_1\left(x, \frac{\partial V_1}{\partial x}, u_1, u_2^*\right) = H_1\left(x, \frac{\partial V_1}{\partial x}, u_1^*, u_2^*\right); \quad (15)$$

$$\lambda V_2(x) - \frac{1}{2\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha x)^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \sup_{u_2} H_2\left(x, \frac{\partial V_2}{\partial x}, u_1^*, u_2\right) = H_2\left(x, \frac{\partial V_2}{\partial x}, u_1^*, u_2^*\right). \quad (16)$$

将 Hamiltonian 函数 $H_i(x, \xi_i, u_1, u_2)$ 代入式(15) 和式(16) 并整理可得 HJB 方程的通式:

$$0 = \frac{1}{2\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha x)^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{\beta}(u_1^* + u_2^* - v - 2x)\right] \frac{\partial V_i}{\partial x} + \exp(-\lambda t) r_i(u_i^* - x, u - x) - \lambda V_i. \quad (17)$$

由于最优策略 u_1^*, u_2^* 满足条件 $u_1^* \in \arg \max_{u_1} H_1\left(x, \frac{\partial V_1}{\partial x}, u_1, u_2^*\right)$ 和 $u_2^* \in \arg \max_{u_2} H_2\left(x, \frac{\partial V_2}{\partial x}, u_1^*, u_2\right)$, 因此可知最优策略 u_i^* 是 Hamiltonian 函数取极值时反解得到的 u_i . 于是对 H_i 求关于 u_i 的偏导数可得 $\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = \frac{\xi_i}{\beta} + \exp(-\lambda t) \{p_i - 2\gamma [p_i(u_i - x) + (1 - p_i)(u - x)] p_i\}$. 令该偏导数等于零 ($\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = 0$), 由此即可求得极值点(即最优策略):

$$u_i^* = u_i^*(x) = x + \frac{1}{p_i} \left[\frac{\xi_i \exp(\lambda t) + \beta p_i}{2\beta \gamma p_i} - (1 - p_i)(u - x) \right], \quad (18)$$

其中 $\xi_i = \frac{\partial V_i}{\partial x}$. 将 u_i^* 代入方程(17) 可得 HJB 方程的具体形式:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha x)^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{\beta}(u_1^* + u_2^* - v - 2x)\right] \frac{\partial V_i}{\partial x} + \exp(-\lambda t) \cdot \\ & \{p_i(u_i^* - x) + (1 - p_i)(u - x) - \gamma [p_i(u_i^* - x) + (1 - p_i)(u - x)]^2\} - \lambda V_i = \\ & \frac{1}{2\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha x)^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[\frac{1}{2\beta \gamma p_1} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \exp(\lambda t) + \beta p_1 \right) - (1 - p_1)(u - x) \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{p_2} \left[\frac{1}{2\beta \gamma p_2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \exp(\lambda t) + \beta p_2 \right) - (1 - p_2)(u - x) \right] - v \right\} \frac{\partial V_i}{\partial x} + \\ & \exp(-\lambda t) \left\{ \frac{1}{2\beta \gamma p_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \exp(\lambda t) + \beta p_i \right) - \gamma \left[\frac{1}{2\beta \gamma p_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \exp(\lambda t) + \beta p_i \right) \right]^2 \right\} - \lambda V_i, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $i = 1, 2$. 由于支付函数是二次的, 并且随机微分方程的漂移和扩散系数是线性的, 因此本文利用如下假设的形式解来寻找方程(19) 的二次解 V_i :

$$V_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad (20)$$

其中 $i = 1, 2$. 对式(20) 分别求一阶偏导和二阶偏导得 $\frac{\partial V_i}{\partial x} = 2a_i x + b_i$ 和 $\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = 2a_i$, 再将这两个偏导

数代入 HJB 方程(19) 得:

$$0 = \frac{1}{2\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u - \alpha x)^2 2a_i + \frac{2a_i x + b_i}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[\frac{(2a_1 x + b_1) \exp(\lambda t) + \beta p_1}{2\beta \gamma p_1} - (1 - p_1)(u - x) \right] + \frac{1}{p_2} \left[\frac{(2a_2 x + b_2) \exp(\lambda t) + \beta p_2}{2\beta \gamma p_2} - (1 - p_2)(u - x) \right] - v \right\} + \exp(-\lambda t) \left\{ \frac{(2a_i x + b_i) \exp(\lambda t) + \beta p_i}{2\beta \gamma p_i} - \gamma \left[\frac{(2a_i x + b_i) \exp(\lambda t) + \beta p_i}{2\beta \gamma p_i} \right]^2 \right\} - \lambda V_i, \quad (21)$$

其中 $i=1,2$. HJB 方程(21) 是关于 x 的方程. 由于此方程对任何 x 都恒成立, 所以可令 x^j 的系数等于零, 其中 $j=0,1,2$. 由此可得 x^0, x, x^2 的系数分别为:

$$0 = \frac{a_i}{\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u)^2 + \frac{b_i}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[\frac{b_1 \exp(\lambda t) + \beta p_1}{2\beta \gamma p_1} - (1 - p_1)u \right] + \frac{1}{p_2} \left[\frac{b_2 \exp(\lambda t) + \beta p_2}{2\beta \gamma p_2} - (1 - p_2)u \right] - v \right\} + \frac{\exp(-\lambda t)}{4\gamma} - \frac{b_i^2 \exp(\lambda t)}{4\beta^2 \gamma p_i^2} - \lambda c_i; \quad (22)$$

$$0 = \frac{-2\alpha a_i}{\beta^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u) + \frac{2a_i}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[\frac{b_1 \exp(\lambda t) + \beta p_1}{2\beta \gamma p_1} - (1 - p_1)u \right] + \frac{1}{p_2} \left[\frac{b_2 \exp(\lambda t) + \beta p_2}{2\beta \gamma p_2} - (1 - p_2)u \right] - v \right\} + \frac{b_i}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[\frac{a_1 \exp(\lambda t)}{\beta \gamma p_1} + 1 - p_1 \right] + \frac{1}{p_2} \left[\frac{a_2 \exp(\lambda t)}{\beta \gamma p_2} + 1 - p_2 \right] \right\} - \frac{a_i b_i \exp(\lambda t)}{\beta^2 \gamma p_i^2} - \lambda b_i; \quad (23)$$

$$0 = \frac{\alpha^2 a_i}{\beta^2} + \frac{2a_i}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[\frac{a_1 \exp(\lambda t)}{\beta \gamma p_1} + 1 - p_1 \right] + \frac{1}{p_2} \left[\frac{a_2 \exp(\lambda t)}{\beta \gamma p_2} + 1 - p_2 \right] \right\} - \frac{a_i^2 \exp(\lambda t)}{\beta^2 \gamma p_i^2} - \lambda a_i. \quad (24)$$

令公式(24) 中的 $i=1,2$, 则可得关于 a_1 和 a_2 的一组方程组. 求解该方程组可得:

$$a_1 = \frac{\exp(-\lambda t)}{3} \left[\lambda \beta^2 \gamma p_1^2 - \alpha^2 \gamma p_1^2 - 2\beta \gamma p_1(1 - p_1) - \frac{2\beta \gamma p_1^2(1 - p_2)}{p_2} \right]; \quad (25)$$

$$a_2 = \frac{\exp(-\lambda t)}{3} \left[\lambda \beta^2 \gamma p_2^2 - \alpha^2 \gamma p_2^2 - 2\beta \gamma p_2(1 - p_2) - \frac{2\beta \gamma p_2^2(1 - p_1)}{p_1} \right]. \quad (26)$$

将式(25)、(26) 代入公式(23) 可得如下方程组:

$$b_1 [(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2) \exp(\lambda t) + \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - \lambda \beta^2 \gamma p_1^2 p_2^2] + b_2 [a_1 p_1^2 \exp(\lambda t)] = -2\alpha a_1 \gamma p_1^2 p_2^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u) + a_1 \beta p_1 p_2 (p_1 + p_2) - 2a_1 u \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - 2a_1 v \beta \gamma p_1^2 p_2^2; \quad (27)$$

$$b_1 [a_2 p_2^2 \exp(\lambda t)] + b_2 [(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2) \exp(\lambda t) + \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - \lambda \beta^2 \gamma p_1^2 p_2^2] = -2\alpha a_2 \gamma p_1^2 p_2^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u) + a_2 \beta p_1 p_2 (p_1 + p_2) - 2a_2 u \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - 2a_2 v \beta \gamma p_1^2 p_2^2. \quad (28)$$

为了简化 b_i 的表达式, 令:

$$M_1 = (a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2) \exp(\lambda t) + \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - \lambda \beta^2 \gamma p_1^2 p_2^2,$$

$$N_1 = a_1 p_1^2 \exp(\lambda t),$$

$$Q_1 = -2\alpha a_1 \gamma p_1^2 p_2^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u) + a_1 \beta p_1 p_2 (p_1 + p_2) - 2a_1 u \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - 2a_1 v \beta \gamma p_1^2 p_2^2,$$

$$M_2 = a_2 p_2^2 \exp(\lambda t),$$

$$N_2 = (a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2) \exp(\lambda t) + \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - \lambda \beta^2 \gamma p_1^2 p_2^2,$$

$$Q_2 = -2a_2 \gamma p_1^2 p_2^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u) + a_2 \beta p_1 p_2 (p_1 + p_2) - 2a_2 u \beta \gamma p_1 p_2 (p_1 + p_2 - 2p_1 p_2) - 2a_2 v \beta \gamma p_1^2 p_2^2,$$

由此解得的 b_i 值为 $b_1 = \frac{N_2 Q_1 - N_1 Q_2}{M_1 N_2 - M_2 N_1}$, $b_2 = \frac{M_1 Q_2 - M_2 Q_1}{M_1 N_2 - M_2 N_1}$.

同理,将 a_i 和 $b_i (i=1,2)$ 代入公式(22) 后即可得 c_i 的值:

$$c_i = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{a_i}{\beta^2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u)^2 + \frac{b_i}{\beta} \left\{ \frac{1}{p_i} \left[\frac{b_i \exp(\lambda t) + \beta p_i}{2\beta \gamma p_i} - (1 - p_i) u \right] + \frac{1}{p_2} \left[\frac{b_2 \exp(\lambda t) + \beta p_2}{2\beta \gamma p_2} - (1 - p_2) u \right] - v \right\} + \frac{\exp(-\lambda t)}{4\gamma} - \frac{b_i^2 \exp(\lambda t)}{4\beta^2 \gamma p_i^2} \right\}. \quad (29)$$

由系数 a_i, b_i, c_i 的解即可得值函数 $V_i(t, x)$. 将 $V_i(t, x)$ 对 x 的一阶偏导代入式(18) 即可得随机控制系统的纳什均衡策略:

$$u_i^* = u_i^*(x) = x + \frac{1}{p_i} \left[\frac{(2a_i x + b_i) \exp(\lambda t) + \beta p_i}{2\beta \gamma p_i} - (1 - p_i)(u - x) \right]. \quad (30)$$

特别地,如果令 $b_i = 0$, 则有 $c_i = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{a_i}{\beta^2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u)^2 + \frac{\exp(-\lambda t)}{4\gamma} \right\}$. 再由公式(23) 可得:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \alpha u) \alpha = \beta \left[\frac{1}{2\gamma p_1} + \frac{1}{2\gamma p_2} - \frac{(1 - p_1) u}{p_1} - \frac{(1 - p_2) u}{p_2} - v \right].$$

由上式可得,值函数存在均衡解的一个必要条件为 $V_i(t, x) = a_i x^2 + c_i, i=1,2$.

4 结论

本文通过构建随机微分博弈模型研究了两个庄家(国外机构投资者和国内机构投资者)与散户群体共同参与的市场博弈,并运用反馈纳什均衡解法和 HJB 偏微分方程求解了随机控制系统的最优策略. 该结果可为金融监管部门监管证券市场和证券市场投资者买卖股票提供参考,同时该方法可以推广应用到多个庄家和散户的市场交易博弈中.

参考文献:

- [1] 李钧瑶. Dynamic programming principles for two-player zero-sum stochastic differential games with regime switching[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 654-662.
- [2] FONSECA M A, HERNÁNDEZ L O. Stochastic differential games: the potential approach[J]. Stochastics, 2020, 92(7): 1125-1138.
- [3] 杨璐, 张成科, 朱怀念. 带泊松跳的线性 Markov 切换系统的随机微分博弈及在金融市场中的应用[J]. 系统科学与数学, 2018, 38(5): 537-552.
- [4] 杨鹏. 随机利率下 DC 型养老金的随机微分博弈[J]. 应用概率统计, 2018, 34(5): 441-449.
- [5] 杨鹏. 具有交易费用和负债的随机微分博弈[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(7): 1040-1045.
- [6] 潘素娟, 李时银, 赵佩. 证券市场中庄家与散户间的确定性微分博弈[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2021, 47(3): 243-248.
- [7] 杨荣基, 彼得罗项, 李颂志. 动态合作: 尖端博弈论[M]. 北京: 中国市场出版社, 2007.
- [8] 班允浩. 合作微分博弈问题研究[D]. 大连: 东北财经大学, 2009.
- [9] 史蒂文 E·施里夫. 金融随机分析: 连续时间模型, 第 2 卷[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2016.
- [10] BASAK G K, GHOSH M K, MUKHERJEE D. Equilibrium and stability of a stock market game with big traders[J]. Differential Equations and Dynamical Systems, 2010, 17(3): 283-299.
- [11] JORGENSEN S, YEUNG D W K. A strategic concession game[J]. International Game Theory Review, 1999, 1(1): 103-129.