文章编号：1004-4353(2022)03-0213-04

一维半线性双曲系统解的整体存在性和驻波解

孟嘉乐
（延边大学 理学院，吉林 延吉 133002）

摘要：研究了一维空间中的半线性双曲系统初值问题的一类具有特殊形式的解. 当方程 $\begin{cases}\partial_t U+\partial_x U+mV=-\alpha UV\\ \partial_t V-\partial_x V-mU=\beta U^2\end{cases}$ 的常数 $\alpha=\beta$ 时，利用先验估计得到了方程的解具有整体存在性，同时通过求解常微分方程得到了方程的驻波解. 另外，对方程的通解进行了讨论.

关键词：半线性双曲系统；整体存在性；驻波解
中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A

Global existence of one-dimensional semilinear hyperbolic systems and standing wave solution

MENG Jiale
(*College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: A kind of solutions with special form for the initial value problem of semilinear hyperbolic system in one dimensional space are studied. When the constant of equation $\begin{cases}\partial_t U+\partial_x U+mV=-\alpha UV\\ \partial_t V-\partial_x V-mU=\beta U^2\end{cases}$ satisfies $\alpha=\beta$, the global existence of the solution of equation is obtained by using a priori estimation, and the standing wave solution of equation is obtained by solving the ordinary differential equation. In addition, the general solution of equation is discussed.

Keywords: semilinear hyperbolic system; global existence; standing wave soliution

0 引言

1996 年，D.Aregba-Driollet 等[1]研究了如下系统：

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x u=k_1 v^2+k_2 u^2+k_3 uv,\\ \partial_t v-\partial_x v=k_1 v^2-k_2 u^2-k_3 uv,\end{cases}\tag{1}$$

其中 k_1、k_2、k_3 是实常数. 当 $k_1=1$、$k_2=-1$、$k_3=0$ 时，称系统(1)为 Carleman 模型. 有关 Carleman 模型的研究可参考文献[2-5]. 当 $k_1=1$、$k_2=0$、$k_3=-1$ 时，称系统(1)为 Mckean 模型，有关 Mckean 模型的研究可参考文献[4]和[6]. 2013 年，L.Pavel[7] 研究了系统(1)在 $k_1=0$、$k_2=0$、$k_3=1$ 且带有阻

收稿日期：2022-07-12
作者简介：孟嘉乐(1999—)，男，硕士研究生，研究方向为偏微分方程理论及其应用.

尼项时的解的存在性.基于上述研究,本文将研究系统(1)的变式,即研究如下一维半线性双曲系统的初值问题:

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x u-\mathrm{i}mv=\lambda\bar{u}v,\\ \partial_t v+\partial_x v-\mathrm{i}mu=\mu u^2,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $u(x,0)=u_0(x)$, $v(x,0)=v_0(x)$, m 是质量常数, λ 和 μ 是复常数.

1 系统性质分析

若忽略系统(2)中的质量项 $\mathrm{i}mu$ 和 $\mathrm{i}mv$,则系统(2)在如下尺度变换(式(3))下仍然保持不变结构:

$$\begin{cases}u_\gamma(x,t)=\gamma u(\gamma x,\gamma t),\\ v_\gamma(x,t)=\gamma v(\gamma x,\gamma t),\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\forall\gamma>0$.假设 $\lambda+\bar{\mu}=0$,则可以得到系统(2)的守恒不变量为:

$$\|u(t)\|_2^2+\|v(t)\|_2^2=\|u(0)\|_2^2+\|v(0)\|_2^2.$$

尺度不变性和守恒不变量的证明见附录 1 和附录 2.本文的研究目的是证明系统(2)具有解 $u=U$, $v=\mathrm{i}V$, $\lambda=\mathrm{i}\alpha$, $\mu=\mathrm{i}\beta$,其中 $\alpha=\beta$ 是实常数,并且 $U,V:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 有如下初值条件:

$$u(x,0)=U(x,0)=U_0(x);\ v(x,0)=\mathrm{i}V(x,0)=\mathrm{i}V_0(x).\tag{4}$$

将式(4)代入系统(2)可得:

$$\begin{cases}\partial_t U+\partial_x U+mV=-\alpha UV,\\ \partial_t V-\partial_x V-mU=\beta U^2.\end{cases}\tag{5}$$

假设 m 是一个正整数,且初值 $U_0,V_0\in H^m(\mathbf{R})$,则根据巴拿赫压缩映射定理可知,存在一个正的常数 T $(T\in(0,\infty))$,使得初值问题(5)存在唯一局部解 $U,V\in C([0,T);H^m(\mathbf{R}))$.另外,通过 Sobolev 嵌入定理易得 $m\geqslant 2$;因此, H^m 空间解是一个经典解(具体证明可以参考文献[1]和文献[7]).

若方程(5)的解具有可积性,则方程(5)具有如下的守恒积分:

$$\int_{\mathbf{R}}(U^2+V^2)(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}(U_0^2+V_0^2)(x)\mathrm{d}x.$$

由上式可知方程(5)的解可以被初值 (U_0,V_0) 的 $L^2(\mathbf{R})$ 范数控制.

2 主要结果及其证明

定理 1 当 $\alpha=\beta$ 时,如果方程(5)的初值条件 $U_0,V_0\in H^m(\mathbf{R})$ $(m\geqslant 2)$,则方程(5)的整体解 $U,V\in C([0,\infty);H^m(\mathbf{R}))$,且方程(5)具有 $(U,V)=(\alpha\psi(cx),\beta\psi(cx))$ 形式的驻波解:

$$(U(x),V(x))=\left(\frac{Cm\mathrm{e}^{-mx}}{\alpha-C\alpha\mathrm{e}^{-mx}},\frac{Cm\mathrm{e}^{-mx}}{\alpha-C\alpha\mathrm{e}^{-mx}}\right),$$

其中 C 为任意常数.

证明 为证明定理 1,首先给出如下初值问题:

$$\begin{cases}\partial_t U+\partial_x U+mV=-\alpha UV,\\ \partial_t V-\partial_x V-mU=\beta U^2,\\ U(x,0)=U_0(x),\ V(x,0)=V_0(x),\end{cases}\tag{6}$$

其中 $\alpha=\beta$.利用特征线法对方程(6)积分可得:

$$\begin{cases}U(x+t,t)=\left(\dfrac{m}{\alpha}+U_0(x)\right)\mathrm{e}^{-\alpha\int_0^t V(x+s,s)\mathrm{d}s}-\dfrac{m}{\alpha},\\ V(x-t,t)=V_0(x)+\displaystyle\int_0^t[mU(x-s,s)+\beta U^2(x-s,s)]\mathrm{d}s.\end{cases}\tag{7}$$

由式(7) 可得：

$$m+\alpha U(x+t,t)\begin{cases}>0,\ m+\alpha U_0(x)>0;\\=0,\ m+\alpha U_0(x)=0;\\<0,\ m+\alpha U_0(x)<0.\end{cases}\tag{8}$$

再由方程(6) 可得：

$$\partial_t(U^2+V^2)+\partial_x(U^2-V^2)=2(\beta-\alpha)U^2V=0.\tag{9}$$

在区域 $D(x_0,t_0)=\{(x,t)\mid 0<t<t_0,x_0-t_0<x<x_0+t_0-t\}$ 对式(9) 进行积分后应用格林定理可得：

$$2\int_0^{t_0}U^2(x_0+t_0-s,s)\mathrm{d}s+2\int_0^{t_0}V^2(x_0-t_0+s,s)\mathrm{d}s=\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0}(U_0^2(s)+V_0^2(s))\mathrm{d}s.\tag{10}$$

为方便证明，令 $2M=\int_{\mathbf{R}}(U_0^2(y)+V_0^2(y))\mathrm{d}y$，由此可知式(6) 的解可以被初值$(U_0,V_0)$ 的 $L^2(\mathbf{R})$ 范数控制. 因此对于 $t\geqslant 0$，利用式(7) 可得：

$$|U(x+t,t)|\leqslant\left|\frac{m}{\alpha}+U_0(x)\right|\mathrm{e}^{|\alpha|(\int_0^t V^2(x+s,s)\mathrm{d}s)^{1/2}t^{1/2}}+\left|\frac{m}{\alpha}\right|\leqslant\left|\frac{m}{\alpha}+U_0(x)\right|\mathrm{e}^{|\alpha|(Mt)^{1/2}}+\left|\frac{m}{\alpha}\right|,$$

$$\begin{aligned}|V(x+t,t)|&\leqslant|V_0(x)|+\int_0^t(|mU(x-s,s)|+|\beta U^2(x-s,s)|)\mathrm{d}s\leqslant\\&|V_0(x)|+|m|(\int_0^t U^2(x+s,s)\mathrm{d}s)^{1/2}t^{1/2}+|\beta|\int_0^t|U^2(x-s,s)|\mathrm{d}s\leqslant\\&|V_0(x)|+|m|(Mt)^{1/2}+|\beta|M.\end{aligned}$$

由以上 2 个式子可知方程(6) 的解的 L^∞ 范数存在先验边界，因此方程(6) 的经典解的整体存在性成立. 定理 1 的前半部分得证.

下面证明式(6) 具有特殊形式的驻波解 $U=\alpha\psi(cx)$，$V=\beta\psi(cx)$. 将该驻波解代入方程(6) 可得 $\begin{cases}c\alpha\psi'+\beta m\psi=-\alpha^2\beta\psi^2,\\-c\beta\psi'-\alpha m\psi=\alpha^2\beta\psi^2.\end{cases}$ 由该方程可得 $c\psi'=-m\psi-\alpha^2\psi^2$. 对该式进行移项可得 $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\psi(m+\alpha^2\psi)}=-\mathrm{d}x$. 对该式进行裂项计算可得 $\dfrac{\alpha^2}{m}(\dfrac{1}{\alpha^2\psi}-\dfrac{1}{m+\alpha^2\psi})\mathrm{d}\psi=-\mathrm{d}x$，即 $\log|\alpha^2\psi|-\log|m+\alpha^2\psi|=-mx+C$. 整理上式可得 $\psi(x)=\dfrac{mC\mathrm{e}^{-mx}}{\alpha^2-C\alpha^2\mathrm{e}^{-mx}}$，其中 C 是一个任意常数. 因此，对于初值为 $U_0(x)=V_0(x)=\alpha\psi(x)=\dfrac{mC\mathrm{e}^{-mx}}{\alpha-C\alpha\mathrm{e}^{-mx}}$ 的式(6)，其解为$(U(x),V(x))=\left(\dfrac{mC\mathrm{e}^{-mx}}{\alpha-C\alpha\mathrm{e}^{-mx}},\dfrac{mC\mathrm{e}^{-mx}}{\alpha-C\alpha\mathrm{e}^{-mx}}\right)$. 定理 1 证毕.

3　方程(6) 通解的讨论

首先考虑 $m+\alpha U(x,t)>0$ 的情况. 由式(8) 知，对于 $m+\alpha U_0(x)>0$ 有 $m+\alpha U(x,t)>0$. 由此可得：

$$\begin{cases}\partial_t\log(m+\alpha U)+\partial_x\log(m+\alpha U)=-\alpha V,\\\partial_t V-\partial_x V-mU=\beta U^2.\end{cases}$$

合并上式可得 $\partial_{tt}\log(m+\alpha U)-\partial_{xx}\log(m+\alpha U)+\alpha mU+\alpha\beta U^2=0$. 令 $\phi=\log(m+\alpha U)$，将其代入上式中可得 $\partial_{tt}\phi-\partial_{xx}\phi+m(\mathrm{e}^\phi-m)+\dfrac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\phi-m)^2=0$. 因已知 $\alpha-\beta=0$，因此上式可以化简为：

$$\partial_{tt}\phi-\partial_{xx}\phi+\mathrm{e}^{2\phi}-m\mathrm{e}^\phi=0.\tag{11}$$

由于 $m+\alpha U(x,t)<0$ 时的推导过程与 $m+\alpha U(x,t)>0$ 时的推导过程相似，且其可化简为与式(11) 相似的方程，故省略其证明. 由上述可知，研究方程(6) 的通解只需探讨方程(11) 的通解即可；但由于该

方程是一个复杂的 Liouville 方程(笔者尚没有得到很好的解决方法),因此在今后的研究中笔者将继续探讨方程(11) 的通解.

附录 1 尺度不变性的证明

忽略系统(2) 中的质量项 $\mathrm{i}mu$ 和 $\mathrm{i}mv$ 后对(u,v) 作如下尺度变换:

$$\begin{cases} u_\gamma(x,t)=\gamma u(\gamma x,\gamma t), \\ v_\gamma(x,t)=\gamma v(\gamma x,\gamma t), \end{cases}$$

其中 $\forall \gamma>0$. 将上述变换代入系统(2) 可得$\begin{cases} \partial_t u+\partial_x u=\lambda \bar{u} v, \\ \partial_t v-\partial_x v=\mu u^2, \end{cases}$ 由此知尺度不变性得证.

附录 2 守恒不变量的证明

将系统(2) 中的第 1 个方程取共轭得:

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}+\partial_x \bar{u}+\mathrm{i}m\bar{v}=\bar{\lambda} u \bar{v}, \\ \partial_t v-\partial_x v-\mathrm{i}mu=\mu u^2. \end{cases} \tag{12}$$

由于已知 $\lambda+\bar{\mu}=0$, 因此合并和整理式(12) 可得:

$$u\partial_t \bar{u}+u\partial_x \bar{u}+\mathrm{i}mu\bar{v}+\bar{v}\partial_t v-\bar{v}\partial_x v-\mathrm{i}m\bar{v}u=0. \tag{13}$$

将系统(2) 中的第 2 个方程取共轭得:

$$\begin{cases} \partial_t u+\partial_x u-\mathrm{i}mv=\lambda \bar{u} v, \\ \partial_t \bar{v}-\partial_x \bar{v}-\mathrm{i}m\bar{u}=\bar{\mu}\bar{u}^2. \end{cases} \tag{14}$$

合并、整理式(14) 可得:

$$v\partial_t \bar{v}-v\partial_x \bar{v}+\mathrm{i}mv\bar{u}+\bar{u}\partial_t u+\bar{u}\partial_x u-\mathrm{i}m\bar{u}v=0. \tag{15}$$

合并式(13) 和式(15) 得: $\partial_t(|u|^2+|v|^2)+\partial_x(|u|^2-|v|^2)=0$. 对该式在 $\mathbf{R}$ 上对 x 进行积分可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}(|u|^2+|v|^2)\mathrm{d}x=0$, 由此进而得 $\int_{\mathbf{R}}|u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}|v|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}|u_0|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}|v_0|^2\mathrm{d}x$. 整理上式可得 $\|u(t)\|_2^2+\|v(t)\|_2^2=\|u(0)\|_2^2+\|v(0)\|_2^2$, 由此可知守恒不变量得证.

参考文献:

[1] AREGBA-DRIOLLET D, HANOUZET B. Cauchy problem for one-dimensional semilinear hyperbolic systems: global existence, blow up[J]. Journal of Differential Equations, 1996, 125(1): 1-26.

[2] GOLSE F, SALVARANI F. The nolinear diffusion limit for generalized Carleman models: the initial-boundary value problem[J]. Nolinearity, 2007, 20(4): 927-942.

[3] ILLNER R, REED M C, NEUNZERT H. The decay of solutions of the Carleman model[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciebces, 2015, 3(1): 121-127.

[4] STEEB W H, EULER N. Painleve test of the Mckean and Carleman models[J]. Mathematical Physics, 1987, 14(2): 99-104.

[5] WICK J, NEUNZERT H. Two classe of explicit solutions of the Carleman model[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2011, 6(1): 515-519.

[6] SCHMITT K J. N-particle correlations in the Mckean model[J]. Journal of Statistical Physics, 1987, 46(1/2): 283-302.

[7] PAVEL L. Classical solutions in Sobolev spaces for a class of hyperbolic Lotka-Volterra systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(3): 2132-2151.