

文章编号: 1004-4353(2022)03-0205-08

# 随机经济模型的 Hopf 分岔研究

彭建奎<sup>1</sup>, 张莉<sup>2</sup>, 安新磊<sup>3</sup>, 杨兆兰<sup>1</sup>

( 1. 兰州文理学院 教育学院, 兰州 730010; 2. 兰州工业学院 基础学科部, 兰州 730050;  
3. 兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070 )

**摘要:** 运用非线性动力学理论对带有随机参数的微分方程经济模型的 Hopf 分岔进行了研究. 首先, 选择拱形分布的随机变量并利用 Chebyshev 正交多项式逼近法将经济模型转化为确定性等价系统. 然后, 运用 Hopf 分岔定理与 Lyapunov 系数相关理论研究了系统的稳定性和 Hopf 分岔的存在性等, 结果显示随机参数对系统的稳定性具有很大影响. 最后, 运用数值仿真验证了系统具有平衡点渐近稳定性, 并存在 Hopf 分岔现象. 该研究结果可为调控和保持金融市场稳定提供理论参考.

**关键词:** Hopf 分岔; 正交多项式; 经济模型; Lyapunov 系数

**中图分类号:** O322

**文献标识码:** A

## Hopf bifurcation of stochastic economic model

PENG Jiankui<sup>1</sup>, ZHANG Li<sup>2</sup>, AN Xinlei<sup>3</sup>, YANG Zhaolan<sup>1</sup>

( 1. School of Education, Lanzhou University of Arts and Science, Lanzhou 730010, China;  
2. Basic Courses Department, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China;  
3. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China )

**Abstract:** Hopf bifurcation in the differential equation economic model with stochastic parameters is studied by nonlinear dynamics theory. Firstly, the economic model is transformed into a deterministic equivalent system using Chebyshev orthogonal polynomial approximation theory. Then, the stability of the system and the existence of Hopf bifurcation are studied by the Hopf bifurcation theorem and Lyapunov coefficient correlation theory, and it is found that the random parameters have a great influence on the stability. Finally, numerical simulation shows that the system has asymptotic stability and Hopf bifurcation. The research results can provide theoretical reference for the financial market stability regulation and maintaining.

**Keywords:** Hopf bifurcation; orthogonal polynomial; economic model; Lyapunov coefficient

## 0 引言

由于非线性随机动力系统广泛存在于自然、社会和工程领域中, 因此建立准确的非线性随机动力系统来反映真实状况具有重要意义. 近年来, 非线性随机动力系统的 Hopf 分岔行为受到学者的高度关注, 特别是受随机扰动的动力系统<sup>[1-6]</sup>. 目前, 研究随机动力系统的方法主要有蒙特·卡罗方法(Monte Carlo method)<sup>[7]</sup>、随机有限元分析法(finite element analysis)<sup>[8]</sup>和基于正交多项式理论的正交多项式

收稿日期: 2022-04-05

基金项目: 甘肃省高等学校创新基金(2022A-172); 甘肃省自然科学基金(20CX9ZA076); 国家自然科学基金(11962012)

作者简介: 彭建奎(1982—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为非线性动力学.

逼近方法<sup>[9]</sup>等. 其中:蒙特·卡罗方法虽然简单,但其计算复杂度较高. 随机有限元方法虽然计算耗时相对较少,但随机变量必须为小量. 基于正交多项式理论的正交多项式逼近法不仅能够克服上述方法的局限性,而且灵活、简便;因此,目前被广泛应用在随机系统的结构演化<sup>[10]</sup>以及非线性随机动力系统的混沌和分岔<sup>[11]</sup>的研究中. 例如:2019 年林子飞等<sup>[12]</sup>运用非线性动力学理论对非线性经济周期模型进行了研究,结果显示随机周期作用可以诱发系统出现稳态概率密度函数的分岔现象. 2021 年朱彦兰等<sup>[13]</sup>建立了一种古诺动态双寡头博弈模型,并利用非线性动力学理论对其进行了局部稳定性分析,结果显示初始条件会影响系统的最终状态. 基于上述研究,本文利用正交多项式逼近法建立了一种含随机参数的经济模型的等价系统,并基于非线性动力学理论对该模型的 Hopf 分岔行为进行了研究.

## 1 随机函数的正交分解

研究含随机参数的经济模型的动力学时,本文选择服从拱形概率密度函数的随机变量为参数对其进行非线性动力学分析,并选择由 Chebyshev 多项式构成的多项式正交基对随机函数进行正交展开. 随机变量的概率密度函数为:

$$p(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right) \sqrt{1-\xi^2}, & |\xi| \leq 1; \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

随机变量的概率密度函数对应的第 2 类 Chebyshev 正交多项式为:

$$H_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2\xi)^{n-2k}. \quad (2)$$

第 2 类 Chebyshev 正交多项式的循环递推公式为  $\xi H_n(\xi) = \frac{1}{2}[H_{n-1}(\xi) + H_{n+1}(\xi)]$ . 正交多项式的加权

正交性可以表示为  $\int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} H_i(\xi) H_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

## 2 一类随机经济模型的正交多项式逼近

文献[14]的作者研究了一个经济模型系统,并建立了一个无量纲化的混沌等效数学模型:

$$\begin{cases} \dot{X} = Z + (Y - a)X, \\ \dot{Y} = 1 - bY - X^2, \\ \dot{Z} = -X - cZ. \end{cases} \quad (3)$$

系统(3)中,  $Z$  为利率,  $Y$  为投资需求,  $X$  为价格指数. 令系统(3)的右边为 0,则可得该经济模型系统的

平衡点为  $(0, \frac{1}{b}, 0)$ . 利用  $\begin{cases} x = X \\ y = Y - \frac{1}{b} \\ z = Z \end{cases}$  对系统(3)进行变换可得平衡点为  $(0, 0, 0)$  的等价系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (\frac{1}{b} - a)x + z + xy, \\ \dot{y} = -by - x^2, \\ \dot{z} = -x - \bar{c}z. \end{cases} \quad \text{其中参数 } a, b, c \text{ 分别表示储蓄、投资需求及商业弹性需求. 在含随机参数的}$$

金融随机系统中,本文选择  $\bar{c} = c + \delta\xi$  为随机变量强度,其中  $\bar{c}$  是  $c$  的均值(数学期望),同时随机变量服从区间  $[-1, 1]$  的拱形分布. 基于上述得到的含有界随机参数的数学模型为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\frac{1}{b} - a)x + z + xy, \\ \dot{y} = -by - x^2, \\ \dot{z} = -x - (c + \delta\xi)z. \end{cases} \quad (4)$$

根据随机系统的特点可知,模型(4)也具有随机性.由此进一步可知,系统(3)的响应是关于时间  $t$  和随机变量  $\xi$  的函数:  $\begin{cases} x = x(t, \xi), \\ y = y(t, \xi), \\ z = z(t, \xi). \end{cases}$  基于随机函数正交分解的基本理论和正交多项式逼近思想,系统

(3) 可用级数形式表示为:

$$\begin{cases} x(t, \xi) = \sum_{i=0}^N x_i(t) H_i(\xi), \\ y(t, \xi) = \sum_{i=0}^N y_i(t) H_i(\xi), \\ z(t, \xi) = \sum_{i=0}^N z_i(t) H_i(\xi). \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $i$  表示 Chebyshev 多项式序数,  $N$  表示所选取多项式的最高阶数. 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\sum_{i=0}^N x_i(t) H_i(\xi)$ 、 $\sum_{i=0}^N y_i(t) H_i(\xi)$  和  $\sum_{i=0}^N z_i(t) H_i(\xi)$  分别严格等价于系统模型响应  $x(t, \xi)$ 、 $y(t, \xi)$ 、 $z(t, \xi)$ . 于是取  $N=1$  则可得:

$$\begin{cases} x(t, \xi) = \sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi), \\ y(t, \xi) = \sum_{i=0}^1 y_i(t) H_i(\xi), \\ z(t, \xi) = \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi) \end{cases} \quad (6)$$

是在最小均方残差意义下的近似解. 将式(6)代入式(4)得:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^1 \dot{x}_i(t) H_i(\xi) = (\frac{1}{b} - a) \sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) + \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi) + \\ \quad \sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) \sum_{i=0}^1 y_i(t) H_i(\xi), \\ \sum_{i=0}^1 \dot{y}_i(t) H_i(\xi) = -b \sum_{i=0}^1 y_i(t) H_i(\xi) - (\sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi))^2, \\ \sum_{i=0}^1 \dot{z}_i(t) H_i(\xi) = -\sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) - c \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi) - \delta\xi \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi). \end{cases} \quad (7)$$

再根据 Chebyshev 多项式所具有的性质(两个该类正交多项式的乘积是相关该类正交多项式的线性组合)可知,式(7)中的非线性项  $\sum_{i=0}^1 y_i(t) H_i(\xi) \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi)$  和  $\sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi)$  可以表示为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) \sum_{i=0}^1 y_i(t) H_i(\xi) &= \sum_{i=0}^2 M_i(t) H_i(\xi), \\ (\sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi))^2 &= \sum_{i=0}^2 K_i(t) H_i(\xi). \end{aligned} \quad (8)$$

运用 Chebyshev 多项式循环递推公式对式(7)中第3个方程式的后两项进行化简得:

$$\delta\xi \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi) = \frac{1}{2} \delta(z_{i-1}(t) + z_{i+1}(t)) H_i(\xi). \quad (9)$$

将式(8)和(9)代入式(7)中可得:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^1 \dot{x}_i(t) H_i(\xi) = (\frac{1}{b} - a) \sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) + \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi) + \sum_{i=0}^2 M_i(t) H_i(\xi), \\ \sum_{i=0}^1 \dot{y}_i(t) H_i(\xi) = -b \sum_{i=0}^1 y_i(t) H_i(\xi) - \sum_{i=0}^2 K_i(t) H_i(\xi), \\ \sum_{i=0}^1 \dot{z}_i(t) H_i(\xi) = -\sum_{i=0}^1 x_i(t) H_i(\xi) - c \sum_{i=0}^1 z_i(t) H_i(\xi) - \frac{\delta}{2} \sum_{i=0}^1 (z_{i-1}(t) + z_{i+1}(t)) H_i(\xi). \end{cases}$$

在上式两边同时乘以  $H_i(\xi)$  ( $i=0,1$ ), 并对等式两边的随机变量取期望, 由此再根据 Chebyshev 多项式的正交性即可得到系统(5)的等价系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = (\frac{1}{b} - a)x_0 + z_0 + M_0, \\ \dot{y}_0 = -by_0 - K_0, \\ \dot{z}_0 = -x_0 - cz_0 - \frac{\delta}{2}z_1, \\ \dot{x}_1 = (\frac{1}{b} - a)x_1 + z_1 + M_1, \\ \dot{y}_1 = -by_1 - K_1, \\ \dot{z}_1 = -x_1 - cz_1 - \frac{\delta}{2}(z_0 + z_2). \end{cases} \quad (10)$$

### 3 Hopf 分岔分析

#### 3.1 Hopf 分岔的存在性

系统(10)在平衡点处的 Jacobian 矩阵为  $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} - a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 & 0 & -\frac{\delta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} - a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta}{2} & -1 & 0 & -c \end{bmatrix}$ . 利用

Maple 软件求得的矩阵  $J$  的特征方程为:  $f(\lambda) = a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6$ , 其中

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = \frac{2}{b}(cb + b^2 + ab - 1), a_2 = \frac{1}{4b^2}(-8b^2 - \delta^2 b^2 + 16cb^3 - 16cb + 16ab^2c + 4c^2b^2 + 16ab^3 + \\ &4b^4 - 8ab + 4a^2b^2 + 4), a_3 = \frac{1}{2b^2}(4c + 4b^3 - \delta^2 b^3 + b\delta^2 + 4c^2b^3 - 4c^2b + 4ab^4 + 4cb^4 - 4ab^2 - 12cb^2 + \\ &4a^2b^3 - \delta^2 ab^2 + 4ac^2b^2 + 16cab^3 + 4a^2b^2c - 8cab), a_4 = \frac{1}{4b^2}(4c^2b^4 + 4a^2b^4 + 8b^4 - \delta^2 - b^4\delta^2 + 4c^2 + \\ &8cb + 8ab^3 - 8b^2 + 2ab\delta^2 - a^2b^2\delta^2 + 16acb^4 - 8ac^2b + 4a^2c^2b^2 + 4\delta^2b^2 - 16c^2b^2 - 4a\delta^2b^3 + 16ca^2b^3 + \\ &16ac^2b^3 - 24acb^2), a_5 = \frac{1}{2b}(-4c^2b^2 + 4ab^3 + 4cb^3 + \delta^2b^2 - 4cb - a\delta^2b^3 + 4ac^2b^3 + 4a^2c^2b^2 + 4a^2cb^3 - \\ &\delta^2 + 4c^2 + 2a\delta^2b - 8ac^2b - a^2\delta^2b^2), a_6 = c^2 - 2cb + b^2 - \frac{1}{4}\delta^2 - \frac{1}{4}a^2b^2\delta^2 + a^2b^2c^2 + \frac{1}{2}ab\delta^2 - 2abc^2 + \\ &2cab^2. \end{aligned}$$

利用 Maple 软件求得的 Jacobian 矩阵  $J$  的特征值为:  $\lambda_1 = \frac{(2 - 2cb - 2ab - b\delta) + \sqrt{\Delta_1}}{4b}$ ,  $\lambda_2 = \frac{(2 - 2cb - 2ab - b\delta) - \sqrt{\Delta_1}}{4b}$ ,  $\lambda_3 = \frac{(2 - 2cb - 2ab + b\delta) + \sqrt{\Delta_2}}{4b}$ ,  $\lambda_4 = \frac{(2 - 2cb - 2ab + b\delta) - \sqrt{\Delta_2}}{4b}$ ,

$\lambda_5 = -b, \lambda_6 = -b$ . 其中

$$\begin{cases} \Delta_1 = 4 + 8bc - 8ab + 4b\delta + 4c^2b^2 - 8acb^2 + 4\delta cb^2 + 4b^2a^2 - 4ab^2\delta + \delta^2b^2 - 16b^2, \\ \Delta_2 = 4 + 8bc - 8ab - 4b\delta + 4c^2b^2 - 8acb^2 - 4\delta cb^2 + 4b^2a^2 + 4ab^2\delta + \delta^2b^2 - 16b^2. \end{cases}$$

**定理 1** 系统(10)的特征根含有一对共轭纯虚根  $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}c \sqrt{(\frac{-2+2a}{c}-6)(\frac{-2+2a}{c}-2)}i$ ,

$\lambda_{3,4,5,6}$  均小于零当且仅当  $c_0 = \frac{2a+\delta}{2}$ .

**证明** 若系统(10)存在一对共轭复特征根  $\lambda_{1,2} = \alpha(c) \pm i\omega(c)$  以及其他实特征根  $\lambda_{3,4,5,6}$ , 则根据 Hopf 分岔定义可得: 当分岔参数  $c=c_0$  时, 共轭复特征根满足条件  $\alpha(c_0)=0, \omega(c_0)>0, \lambda_{3,4,5,6}<0$  且  $\dot{\alpha}(c_0) \neq 0$ . 由此可知当分岔参数  $c=c_0$  时, 系统(10)发生 Hopf 分岔, 即  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(c) = \pm \frac{1}{2}c \cdot$

$$\sqrt{(\frac{-2+2a}{c}-6)(\frac{-2+2a}{c}-2)}i.$$

**定理 2** 当系统参数  $c$  通过  $c_0 = \frac{2a+\delta}{2}$  时, 系统(10)在平衡点  $P_0(0,0,0,0,0,0)$  处发生 Hopf 分岔.

**证明** 由定理 1 知, 当分岔参数  $c_0 = \frac{2a+\delta}{2}$  时, 系统(10)存在一对共轭纯虚根. 令  $\frac{2-2cb-2ab-b\delta}{4b}=0$ , 由此可得  $c = \frac{2a+\delta}{2}$ . 将  $c$  代入  $J$  的特征值得:  $\lambda_1 = \sqrt{a-1}i, \lambda_2 = -\sqrt{a-1}i$ ,  $\lambda_3 = -\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2-\delta)^2-4a(1-\delta)} < 0, \lambda_4 = -\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2-\delta)^2-4a(1-\delta)} < 0, \lambda_5 = -1, \lambda_6 = -1$ ,  $\frac{d\lambda}{db} = \frac{df(\lambda)}{dc} / \frac{df(\lambda)}{d\lambda} = [2\lambda^5 + 2(2b - \frac{2}{b} + 3a + \frac{\delta}{2})\lambda^4 + \frac{1}{b^2}(2 + 4b^3c + 4bc + 2b^4 - 6b^2 + 4ab^2c + 2a^2b^2 - 4ab)\lambda^3 + \frac{1}{b^2}(2b^4c + 2c + 2b + 4ab^4 - 4abc + 2a^2b^2c - 8b^2c + 4a^2b^3 + 8ab^3c - 6ab^2)\lambda^2 + \frac{1}{b}(-4b^2c + 2b^3 - 2b + 4ab^3c + 4a^2b^2c + 2a^2b^3 + 4c - 8abc)\lambda + 2c - 2b + 2a^2b^2c - 4abc + 2ab^2] / [6\lambda^5 + \frac{10}{b}(cb+b^2+ab-1)\lambda^4 + \frac{1}{b^2}(-8b^2-\delta^2b^2+16cb^3-16cb+16ab^2c+4c^2b^2+16ab^3+4b^4-8ab+4a^2b^2+4)\lambda^3 + \frac{3}{2b^2}(4c+4b^3-\delta^2b^3+b\delta^2+4c^2b^3-4c^2b+4ab^4+4cb^4-4ab^2-12cb^2+4a^2b^3-\delta^2ab^2+4ac^2b^2+16cab^3+4a^2b^2c-8cab)\lambda^2 + \frac{1}{2b^2}(4c^2b^4+4a^2b^4+8b^4-\delta^2-b^4\delta^2+4c^2+8cb+8ab^3-8b^2+2ab\delta^2-a^2b^2\delta^2+16acb^4-8ac^2b+4a^2c^2b^2+4\delta^2b^2-16c^2b^2-4a\delta^2b^3+16ca^2b^3+16ac^2b^3-24acb^2)\lambda + \frac{1}{2b}(-4c^2b^2+4ab^3+4cb^3+\delta^2b^2-4cb-a\delta^2b^3+4ac^2b^3+4a^2c^2b^2+4a^2cb^3-\delta^2+4c^2+2a\delta^2b-8ac^2b-a^2\delta^2b^2)]$ ,  $\frac{d\text{Re}\lambda}{dc} \Big|_{c=c_0} = \{2(2b - \frac{2}{b} + 3a + \frac{\delta}{2})(\frac{2a+\delta}{4})^4(\frac{4a-4}{2a+\delta}-6)^2(\frac{4a-4}{2a+\delta}-2)^2 - \frac{1}{b^2}(2b^4a+b^4\delta+2a+\delta+2b+4ab^4-4a^2b-2ab\delta+2a^3b^2+a^2b^2\delta-8ab^2-4b^2\delta+12a^2b^3+4ab^3\delta-6ab^2)(\frac{2a+\delta}{4})^2(\frac{4a-4}{2a+\delta}-6)(\frac{4a-4}{2a+\delta}-2)+2a+\delta-2b+2a^3b^2+a^2b^2\delta-2a^2b+2ab\delta+2ab^2\} / \{(11ab+5b\delta+b^2-1)(\frac{2a+\delta}{4})^4(\frac{4a-4}{2a+\delta}-6)^2(\frac{4a-4}{2a+\delta}-2)^2+\frac{3}{2b^2}[4a+2\delta+4b^3-b^3\delta^2+b\delta^2+(2a+\delta)^2b^3-(2a+\delta)^2b+4ab^4+2(2a+\delta)b^4-4ab^2-6(2a+\delta)b^2+4a^2b^3-ab^2\delta^2+a(2a+\delta)^2b^2+$

$$8a(2a+\delta)^2b^3+2a^2(2a+\delta)b^2-4(2a+\delta)ab]\left(\frac{2a+\delta}{4}\right)^2\left(\frac{4a-4}{2a+\delta}-6\right)\left(\frac{4a-4}{2a+\delta}-2\right)\} \neq 0.$$

根据 Hopf 分岔定理可知,  $c_0$  即为系统发生 Hopf 分岔的临界值. 若系统(10) 满足  $a > 1$  和  $\delta < 1$ , 则当系统参数  $c$  通过临界值  $c_0$  时, 系统(10) 在平衡点  $P_0(0,0,0,0,0,0)$  处发生 Hopf 分岔.

### 3.2 系统的非线性 Hopf 分岔动力学特性

考虑如下非线性动力系统:

$$\dot{x} = f(x, v), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (11)$$

式中  $v \in \mathbf{R}^n$  为分岔参数, 且当  $v = v_c$  时平衡点  $x = x_0$ . 式(11) 的右边可表示为:

$$\begin{aligned} F(x) &= Jx + N(x), \\ N(x) &= \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + o(\|x\|)^4. \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $J$  为系统(10) 的 Jacobian 矩阵,  $B(x, x)$  和  $C(x, x, x)$  可表示为:

$$\begin{aligned} B_i(x, y) &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i=1, \dots, n; \\ C_i(x, y, z) &= \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

假设 Jacobina 矩阵有一对纯复特征根  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ), 其他特征值满足  $\text{Re} \lambda = 0$ , 并令  $p \in C^n$  是  $\lambda_1$  所对应的特征向量,  $q \in C^n$  是伴随特征向量, 则特征值、特征向量及伴随特征向量满足:

$$Jq = I\omega q, \quad J\bar{q} = -I\omega\bar{q}, \quad J^T p = -I\omega p, \quad J^T \bar{p} = -I\omega\bar{p}, \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i = 1.$$

定义  $G_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle$ ,  $G_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle$ ,  $G_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle$ ,  $G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, J^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega E - J)^{-1}B(q, q)) \rangle + \frac{1}{i\omega} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle - \frac{2}{i\omega} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega} |\langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle|^2$ , 则第 1 Lyapunov 系数为  $L_1(0) = \frac{1}{2\omega^2} \text{Re}(iG_{20}G_{11} + \omega G_{21})$ . 因式(12) 中  $N(x)$  可表示为:

$$N(x) = \begin{cases} N_1(x) = x_0 y_0 + y_1 x_1, \\ N_2(x) = x_0^2 + x_1^2, \\ N_3(x) = 0, \\ N_4(x) = x_0 y_1 + y_0 x_1, \\ N_5(x) = 2x_0 x_1, \\ N_6(x) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $x = (x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)^T$ , 所以式(13) 可化为:

$$\begin{aligned} B_i(\xi, \eta) &= \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x_j \partial y_k} \right) \Big|_{x=0} \xi_j \eta_k, \quad i=0, \dots, n, \quad C_i(\xi, \eta, \gamma) = 0, \\ x &= (x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1)^T, \quad B(\xi, \eta) = (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6), \\ B_1(\xi, \eta) &= \xi_1 \eta_2 + \xi_4 \eta_5, \quad B_2(\xi, \eta) = 0, \quad B_3(\xi, \eta) = 0, \\ B_4(\xi, \eta) &= \xi_1 \eta_5 + \xi_4 \eta_2, \quad B_5(\xi, \eta) = 0, \quad B_6(\xi, \eta) = 0. \end{aligned}$$

由于  $\lambda_1 = -\frac{2a+\delta}{2} \sqrt{(\frac{4a-4}{2a+\delta}-6)(\frac{4a-4}{2a+\delta}-2)} I$ , 于是利用 Maple 软件可计算出  $p, q \in C^n$ ,

$$q = (1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

$$p = \left( -4(a + \delta) - 4\sqrt{(a + \delta)^2 - \frac{1}{4}}, 4(a + \delta) + 4\sqrt{(a + \delta)^2 - \frac{1}{4}}, \right. \\ \left. \frac{4(2a + \delta) + 2\sqrt{2(2a + 3\delta)(2a - \delta) - 4}}{4a^2 - \delta^2 + 2}, \frac{4(2a + \delta) + 2\sqrt{2(2a + 3\delta)(2a - \delta) - 4}}{4a^2 - \delta^2 + 2}, 0, 0 \right).$$

再运用 Lyapunov 理论对系统(10)的第1 Lyapunov 系数进行计算得:

$$L_1(0) = \frac{1}{2\omega^2} \text{Re}(IG_{20}G_{11} + \omega G_{21}) = \\ \frac{(64a + 64\delta + 64\sqrt{(a + \delta)^2 - \frac{1}{4}})[2(2a + \delta) - \sqrt{2(2a + 3\delta)(2a - \delta) - 4}]}{(4a + 3\delta + 2)(\delta + 2)(4a^2 - \delta^2 - 2)} - \\ \frac{\sqrt{(4a + 3\delta + 2)(\delta + 2)}}{(4a + 3\delta + 2)(\delta + 2)} \left[ \left( 8a + 8\delta + 8\sqrt{(a + \delta)^2 - \frac{1}{4}} \right) \frac{-2(a + \delta - 2)(2a + \delta) + 4\delta(a + \delta)}{E} + \right. \\ \left. \frac{4(2a + \delta) - 2\sqrt{2(2a + 3\delta)(2a - \delta) - 4}}{4a^2 - \delta^2 - 2} \cdot \frac{-2\delta + 2(a + \delta)(2a + \delta)^2 + 2\delta^2(a - 1) - 4}{E} - \right. \\ \left. \left( \frac{1}{b} - a \right) \frac{4(2a + \delta) - 2\sqrt{2(2a + 3\delta)(2a - \delta) - 4}}{4a^2 - \delta^2 - 2} + A \right] \neq 0. \quad (15)$$

当  $b = \frac{2 - \delta}{2}$ ,  $0 < \delta < 1$  时,由式(15)可知系统的第1 Lyapunov 系数满足  $L_1(0) < 0$ . 于是再由李雅普诺夫稳定性理论可得,非线性动力学系统(10)具有渐近稳定的奇点,即系统(3)的平衡点是渐近稳定的.

#### 4 数值模拟

假设系统(10)的初值为(10.5,5.5,10.5,10.5,10.5,10.5),步长取0.1, $\delta=0.041136$ , $a=2.006142$ , $b=0.4154699$ , $k_0=18.58$ , $k_1=6.85$ , $m_0=2.21$ , $m_1=4.2$ . 根据上述参数得到的系统(10)在  $c \in (0.492, 0.497)$  时的分岔图如图1所示. 由图可以看出:当  $c < 0.4935$  时,系统处于稳定状态;当  $c_0 = 0.4933$  时,系统发生 Hopf 分岔;当  $0.4933 < c < 0.4950$  时,系统进入混沌态;当  $c_0 = 0.4950$  时,系统发生 Hopf 分岔;当  $c > 0.4950$  时,系统进入稳定态. 图2—图4是系统(10)的参数  $c$  分别为0.4938、0.4950、0.4945时的时间序列图和相图. 由图2可知,当  $c = 0.4938$  时系统处于概周期运动状态;由图3可知,当  $c = 0.4950$  时系统处于 Hopf 分岔状态;由图4可知,当  $c = 0.4945$  时系统处于概周期运动状态. 由上述数值模拟结果可知,数值模拟结果与模型理论分析结果一致,由此进一步表明随机参数可对系统的平衡点特性及其 Hopf 行为产生影响.

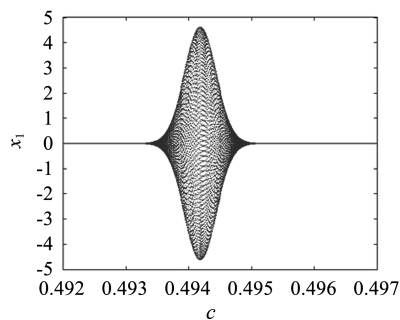


图1 系统(10)在  $c \in (0.492, 0.497)$  时的分岔图

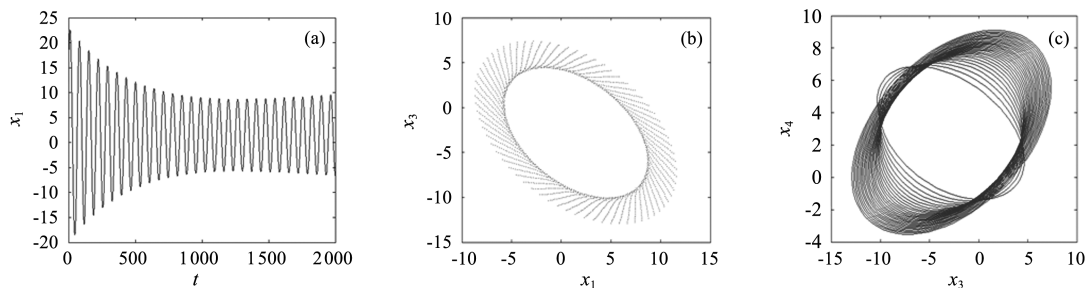
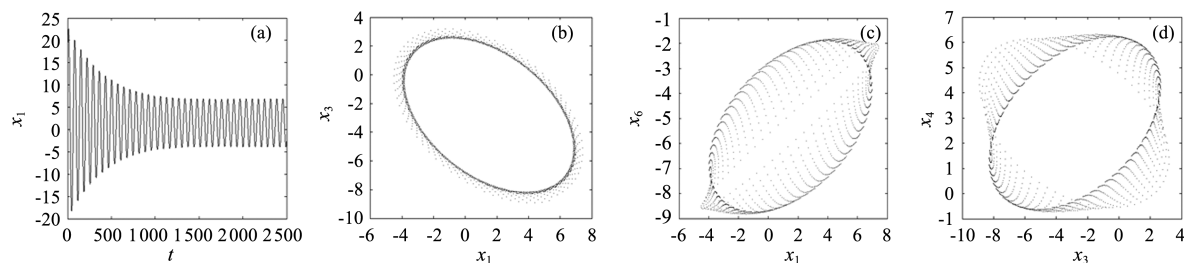
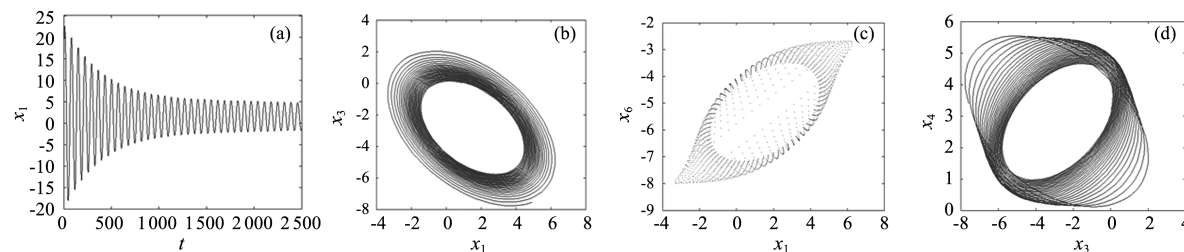


图2  $c=0.4938$  时系统(10)的时间序列图(a)和相图(b,c)



图 3  $c=0.4950$  时系统(10)的时间序列图(a)和相图(b、c、d)图 4  $c=0.4945$  时系统(10)的时间序列图(a)和相图(b、c、d)

## 5 结论

本文利用正交多项式逼近法建立了一种含随机参数经济模型的等价系统,并运用非线性动力学理论对该系统的 Hopf 分岔行为进行了分析. 研究结果显示,该系统具有平衡点渐近稳定性和存在 Hopf 分岔,且系统的零解渐近稳定参数区域随系统随机因素参数的增大而越来越小. 本文所得研究结果可为调控和保持金融市场稳定提供重要的理论参考. 本文研究只探讨了随机参数对经济模型的影响,而对其相关机理并未进行探讨,因此在今后的研究中我们将进一步探讨随机参数对系统分岔产生影响的机理,以更好地为相关领域的参数优化与过程控制提供参考.

## 参考文献:

- [1] MOGHADAS S M, GUME A B. Dynamical and numerical analyses of a generalized food-chain mode[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003,142:35-49.
- [2] DING Q, COOPER J E, LEUNG A Y T. Hopf bifurcation analysis of a rotor seal system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002,252(5):817-833.
- [3] WEI J J. Hopf bifurcation analysis for a delayed vicholson blowflies equation[J]. Nonlinear Analysis, 2005,60:1351-1367.
- [4] SONG Y L, WEI J J, YUAN Y. Bifurcation analysis on a survival red blood cells mode[J]. J Math Anal Appl, 2006,316:459-471.
- [5] 毛俊杰. 几类非线性经济模型及博弈论应用研究[D]. 济南:齐鲁工业大学,2021.
- [6] 罗瑞芬,张建刚,杜文举. 一个带有随机参数的新的二维混沌系统的随机 Hopf 分岔分析[J]. 温州大学学报(自然科学版),2016,37(1):26-35.
- [7] 郑艳. 几类随机生物经济模型的复杂性分析[D]. 沈阳:东北大学,2017.
- [8] GHAMEM R, SPANS P. Stochastic Finite Element: A Spectral Approach[M]. Berlin: Springer, 1991.
- [9] KLEIBERAND M, HIEN T D. The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation[M]. New York: Wiley Press, 1992.
- [10] 陆启韶. 非线性动力学理论与经济系统发展的新探索:评《Hopf 分叉和非线性动力学:基于若干经济系统的研究》[J]. 前沿,2020(3):135-136.
- [11] 南娟. 含有随机参数的随机动力系统的稳定性及分岔分析[D]. 兰州:兰州交通大学,2016.
- [12] 林子飞,徐伟. 考虑记忆性质与时间滞后效应的非线性经济周期模型分析[J]. 统计与信息论坛,2019,34(2):42-48.
- [13] 朱彦兰,周伟,褚童,等. 管理委托下的双寡头博弈的复杂动力学分析[J]. 山东大学学报(理学版),2021,56(7):32-45.
- [14] CHAO M, WANG X. Hopf bifurcation and topological horseshoe of a novel finance chaotic system[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012,17(2):721-730.