文章编号: 1004-4353(2022)03-0196-09

鲁棒多目标优化问题 ε-拟弱有效解的最优性条件

李梦恩， 韩有攀
(西安工程大学 理学院，西安 710600)

摘要: 研究了约束函数带有不确定因素的多目标鲁棒优化问题的最优性条件. 首先，利用变分分析的工具(最大值函数的次微分、中值不等式、极限次微分的和规则等)建立不确定多目标优化问题的鲁棒 ε-拟弱有效解的最优性必要条件；然后，在伪拟广义凸性的假设下，给出了该问题的最优性充分条件；最后，用实例证明了相关结论的正确性.

关键词: 多目标优化；最优性条件；鲁棒 ε-拟弱有效解；次微分；广义凸性
中图分类号: O221.6　　　**文献标识码**: A

Optimality conditions for ε-quasi-weakly efficient solutions of robust multiobjective optimization problem

LI Mengen， HAN Youpan
(*School of Science*, *Xi'an Polytechnic University*, *Xi'an* 710600, *China*)

Abstract: The optimality conditions for multiobjective robust optimization problems with uncertain constraints are studied. Firstly, the necessary optimality conditions for robust ε-quasi-weakly efficient solutions of uncertain multiobjective optimization problems are established by using modern variational analysis tools (the subdifferential of maximum function, median inequality, and the sum rule of limit subdifferential etc.). Then, under the assumption of pseudo quasi generalized convexity, the sufficient condition of optimality for the problem is given. Finally, an example is given to prove the correctness of relevant conclusions.

Keywords: multiobjective optimization; optimality condition; robust ε-quasi-weakly effective solution; subdifferential; generalized convexity

0 引言

目前，多目标优化问题已经取得了大量的研究成果[1-3]，但现有的研究成果大都集中在确定性的多目标优化问题上. 在实际生活中，多目标优化问题往往会受到多种不确定因素的影响，如数据缺失、预测误差、测量误差等，因此研究不确定的多目标优化问题对提高所求问题最优解的精确度具有重要的意义. 目前，通常使用鲁棒优化模型和随机优化模型处理带有不确定因素的优化问题. 鲁棒优化模型对不确定性数据具有免疫性，即只要得知不确定参数的可能取值范围，就可求得该问题的解；随机优化模型

收稿日期: 2022-06-27
基金项目: 国家自然科学基金(11501434)；陕西省自然科学基金(2022JQ006)
第一作者: 李梦恩(1998—)，女，硕士研究生，研究方向为最优化理论.
通信作者: 韩有攀(1980—)，男，博士，副教授，研究方向为金融优化、集值优化及传统优化理论.

需要事先得知不确定参数的分布，这使得其在实际应用中存在较大困难. 因此，目前学者们较多使用鲁棒优化模型研究带有不确定性因素的多目标优化问题，即鲁棒多目标优化问题. 2012 年，Lee 等[4]研究了约束函数具有不确定数据凸优化问题的 ε-有效解；2013 年，Chuong 等[5]应用变分分析与广义次微分给出了非光滑半无限多目标优化问题弱有效解的最优性条件；2014 年，Chuong 等[6]研究了具有等式和不等式约束的多目标优化问题弱有效解的最优性条件；2016 年，Chuong 等[7]给出了多目标优化问题近似 Pareto 解的 Fritz-John 型必要条件和充分条件，并利用近似 Pareto 解的相应结果得到了所考虑问题的(弱)Pareto 解的 Fritz-John 型必要条件. 同年，Chuong[8]研究了非凸/非光滑实值函数的鲁棒多目标优化问题，并给出了所考虑问题的局部鲁棒弱 Pareto 解的必要条件；2017 年，Lee 等[9]研究了约束具有不确定数据的拟 ε-有效解的鲁棒凸优化问题；同年，孙祥凯[10]借助次微分的性质在鲁棒型次微分约束规范下刻划了不确定性凸优化问题的鲁棒最优解；2019 年，周俊屹等[11]针对非光滑/非凸实值函数的鲁棒多目标优化问题给出了其鲁棒弱有效解的最优性充分条件；2020 年，龚田甜[12]利用择一性定理得到了不确定性多目标凸优化问题的近似拟弱鲁棒有效解的标量化定理和最优性条件；同年，Chuong[13]研究了不确定性非光滑多目标优化问题的鲁棒最优性条件，其中目标函数和约束函数均涉及不确定因素；2021 年，邓光菊[14]在经典的 M-F 约束规范扩展下利用极限次微分和 Clarke 次微分给出了鲁棒 ε-拟弱有效解的 KKT 型最优性必要条件，并在伪拟 n 次广义凸性假设下给出了所求问题的鲁棒 ε-拟(弱)有效解的最优性充分条件. 受文献[10，12-13]的启发，本文利用鲁棒方法在鲁棒 ε-拟(弱)有效解的条件下，给出了约束函数具有不确定数据的多目标优化问题的最优性条件.

1　预备知识

本文使用的符号为变分分析的标准符号. 设空间 X 为 Asplund 空间(具有可分对偶的可分子空间的巴拿赫空间)，符号 $\|\cdot\|$ 表示范数，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间 X 与对偶空间 X^* 的内积，$B(x,r)$ 表示以 $x\,(x\in X)$ 为中心、$r\,(r>0)$ 为半径的开球，B 表示空间 X^* 中的闭单位球，$x_n\xrightarrow{\omega^*}\bar{x}$ 表示在弱*拓扑空间 X^* 中 x_n 收敛于 $\bar{x}$. 定义 $\mathrm{co}\,\Omega$、$\mathrm{cl}\,\Omega$、$\mathrm{int}\,\Omega$ 分别为 $\Omega\subset X$ 的凸包、闭包和内部，并定义 $\mathrm{cl}^*\,\Omega$ 为 $\Omega\subset X^*$ 的弱*拓扑闭包.

考虑如下带有不确定因素的多目标优化问题：

$$\min\{(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_l(\boldsymbol{x}))\,|\,g_j(\boldsymbol{x},\omega_j)\leqslant 0,\ j=1,\cdots,m\}. \tag{UMP}$$

其中：$\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x}\in X)$ 是决策变量的向量；ω_j 是不确定参数，$\omega_j\in\Omega_j\,(j=1,\cdots,m)$，$\Omega_j$ 是任意集合的非空不确定集；$g_j:X\times\Omega_j\to\mathbf{R}\,(j=1,\cdots,m)$ 是实值函数；$f_i:X\to\mathbf{R}\,(i=1,\cdots,l)$ 是 Lipschitz 函数.

(UMP) 问题的鲁棒形式为：

$$\min\{(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_l(\boldsymbol{x}))\,|\,\boldsymbol{x}\in C\}, \tag{RUMP}$$

其中 C 为可行集，$C=\{\boldsymbol{x}\in X\,|\,g_j(\boldsymbol{x},\omega_j)\leqslant 0,\ \forall\,\omega_j\in\Omega_j,\ j=1,\cdots,m\}$.

定义 1　令 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_l)\in\mathbf{R}_+^l$，$\bar{\boldsymbol{x}}\in C$.

1) 如果不存在 $\boldsymbol{x}\in C$，使得 $f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\in-\mathrm{int}\,\mathbf{R}_+$，$i=1,\cdots,l$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(UMP) 的鲁棒 ε-拟弱有效解，即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(RUMP) 的 ε-拟弱有效解.

2) 如果不存在 $\boldsymbol{x}\in C$，使得 $f(\boldsymbol{x})-f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon}\,\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\in-\mathbf{R}_+^l\setminus\{0\}$，则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(UMP) 的鲁棒 ε-拟有效解，即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(RUMP) 的 ε-拟有效解.

注 1　若 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$，则鲁棒 ε-拟(弱)有效解与鲁棒(弱)有效解等价[9]，$\mathbf{R}_+^l$ 为空间 $\mathbf{R}^l$ 中的非负常向量.

定义 2[13](弱*闭)　设 $F:\Theta\to X^*$ 是 Hausdorff 拓扑空间 Θ 到空间 X^* 的一个集值映射. 如果对于任意的序列 $\{\theta_t\}_{t\in\Lambda}\subset\Theta$，$\theta_t\to\bar{\theta}$，$\{x_n^*\}_{n\in\mathbf{N}}\subset X^*$，$x_n^*\in F(\theta_t)$，$x_n^*\xrightarrow{\omega^*}x^*$，有 $x^*\in F(\bar{\theta})$，则称 F 在 $\bar{\theta}\in\Theta$

中是弱*闭的.

定义3[13](集值映射上极限) 在空间X和X^*之间给定一集值映射$F:X\to X^*$,当$\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}}$时,称

$$\limsup_{\boldsymbol{x}\to\bar{x}} F(\boldsymbol{x})=\{x^*\in X^*\mid \exists \text{ 序列 } x_n\to\bar{\boldsymbol{x}} \text{ 和 } x_n^*\xrightarrow{\omega^*}x^* \text{ 且 } x_n^*\in F(x_n),\forall n\in\mathbf{N}\}$$

为F的连续Painleve-Kuratowski上/外极限,其中自然数集$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$.

定义4[13] 设$\varepsilon\geqslant 0$,$\Omega\subset X$,则Ω在$\bar{x}\in\Omega$处的ε-法锥为:

$$\hat{N}_\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\left\{x^*\in X^*\ \middle|\ \limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}}\frac{\langle x^*,\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\rangle}{\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|}\leqslant\varepsilon\right\},$$

其中$\boldsymbol{x}\xrightarrow{\Omega}\bar{\boldsymbol{x}}$表示$\boldsymbol{x}\in\Omega$时有$\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}}$.当$\bar{\boldsymbol{x}}\notin\Omega$时,对于任意的$\varepsilon\geqslant 0$,有$\hat{N}_\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\varnothing$.

注2 当$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$时,称集合$\hat{N}_0(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\hat{N}(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)$为$\Omega$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处的Frechet法锥.

定义5[13](极限法锥) 设$\varepsilon\geqslant 0$且$\varepsilon\to 0$,Ω在$\bar{\boldsymbol{x}}$处的极限法锥为ε-法锥$\hat{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x};\Omega)$的连续Painleve-Kuratowski上/外极限,即:

$$N(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\limsup_{\boldsymbol{x}\to\bar{x}}\hat{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x};\Omega). \tag{1}$$

如果$\bar{\boldsymbol{x}}\notin\Omega$,则$N(\bar{\boldsymbol{x}};\Omega)=\varnothing$.

注3 当Ω在$\bar{\boldsymbol{x}}$周围为闭集时,式(1)中的$\varepsilon=0$.

定义实值函数φ($\varphi:X\to\bar{\mathbf{R}}=[-\infty,\infty]$)的上图为:

$$\operatorname{epi}\varphi=\{(\boldsymbol{x},\mu)\in X\times\mathbf{R}\mid\mu\geqslant\varphi(\boldsymbol{x})\}, \tag{2}$$

则当$|\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})|<\infty$时,可定义函数$\varphi$在$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$的极限次微分为:

$$\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})=\{x^*\in X\mid(x^*,-1)\in N((\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}));\operatorname{epi}\varphi)\}. \tag{3}$$

如果$|\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})|=\infty$,那么$\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})=\varnothing$.如果$\varphi$在点$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$为具有系数$K>0$的局部Lipschitz函数,那么$\forall x^*\in\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$,且有

$$\|x^*\|\leqslant K. \tag{4}$$

引理1[15](非光滑的费马法则) 如果$\bar{\boldsymbol{x}}$是函数φ的局部最小值,则$0\in\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$.

引理2[15](极限次微分的和规则) 在空间X中,设函数$\varphi_i:X\to\bar{\mathbf{R}}$($i=1,\cdots,n;n\geqslant 2$)在$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$附近是下半连续的,且这些函数中除一个之外其余函数在$\bar{\boldsymbol{x}}$附近都是Lipschitz连续的,则有:

$$\partial(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)(\bar{\boldsymbol{x}})\subset\partial\varphi_1(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial\varphi_2(\bar{\boldsymbol{x}})+\cdots+\partial\varphi_n(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

引理3[15](中值不等式) 在空间X中,设函数φ在开集$[a,b]\subset X$上是Lipschitz连续的,则对于$x^*\in\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$,$c\in[a,b)$,有$\langle x^*,b-a\rangle\geqslant\varphi(b)-\varphi(a)$,其中$[a,b]=\operatorname{co}\{a,b\}$,$[a,b)=\operatorname{co}\{a,b\}\setminus\{b\}$.

定义6[10] 局部Lipschitz函数$\varphi:X\to\bar{\mathbf{R}}$在$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$处关于方向$v\in X$的广义方向导数为$\varphi^\circ(\bar{\boldsymbol{x}};v)=\limsup\limits_{\boldsymbol{x}\to\bar{x},\lambda\to 0}\dfrac{\varphi(\boldsymbol{x}+\lambda v)-\varphi(\boldsymbol{x})}{\lambda}$.

根据定义6,函数φ在$\bar{\boldsymbol{x}}$处的Clarke次微分可定义为如下的非空集合:

$$\partial^C\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})=\{x^*\in X\mid\langle x^*,v\rangle\leqslant\varphi^\circ(\bar{\boldsymbol{x}};v),\forall v\in X\}. \tag{5}$$

由文献[16]易知,对于$\forall v\in X$有$\varphi^\circ(\bar{\boldsymbol{x}};v)=\max\{\langle x^*,v\rangle\mid x^*\in\partial^C\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})\}$成立.

定义7[13] 对于$\forall v\in X$,定义函数φ在$\bar{\boldsymbol{x}}$处关于方向$v\in X$的方向导数为:

$$\varphi'(\bar{\boldsymbol{x}};v)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda v)-\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})}{\lambda}.$$

如果对于$\forall v\in X$,有$\varphi^\circ(\bar{\boldsymbol{x}};v)=\varphi'(\bar{\boldsymbol{x}};v)$,则称函数$\varphi$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处是Clarke正则的.由文献[15]可知,函数$\varphi$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处的极限次微分与Clarke次微分之间的关系为:

$$\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})\subset\partial^C\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{6}$$

2　鲁棒 ε-拟弱有效解的最优性条件

2.1　最优性必要条件

设 $j\in\{1,\cdots,m\}$, $\varepsilon_j\geqslant 0$, 则 Ω_j 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 处的扰动集为:

$$\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})=\{\omega\in\Omega_j\mid g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)\geqslant G_j(\bar{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_j\},$$

其中, $G_j(\bar{\boldsymbol{x}})=\sup\limits_{\omega_j\in\Omega_j}g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)$. 特别地, 当 $\varepsilon_j=0$ 时, $\Omega_j^0(\bar{\boldsymbol{x}})=\{\omega\in\Omega_j\mid g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)\geqslant G_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}=\{\omega\in\Omega_j\mid g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)=G_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}=\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 为 Ω_j 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的最优解集. 由扰动集 $\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 和 $\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的定义可知,对于 $\forall\varepsilon_j>0$ 有 $\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\subset\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 成立. 于是由文献[17]知,对于 $\forall\varepsilon_j>0$ 有 $\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})\neq\varnothing$,但根据最优化理论可知 $\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 有可能为空集.

对问题(UMP) 中的函数 g_j 本文作以下假设:

① 对于固定的 $\boldsymbol{x}\in X$, 存在 $\varepsilon_j>0$, $\delta_j>0$, 使得集合 $\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是紧的. 对于任意的 $\boldsymbol{x}\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\delta_j)$, $\omega_j\in\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$, 函数 $\omega_j\mapsto g_j(\boldsymbol{x},\omega_j)\in\mathbf{R}$ 是上半连续的. 在 $B(\bar{\boldsymbol{x}},\delta_j)$ 上,对于给定的系数 K_j, 当 $\omega_j\in\Omega_j$ 时,函数 $g_j(\cdot,\omega_j)$ 是一致 Lipschitz 的,即对 $\forall\omega_j\in\Omega_j$, $x_1,x_2\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\delta_j)$ 有

$$|g_j(x_1,\omega_j)-g_j(x_2,\omega_j)|\leqslant K_j\|x_1-x_2\|.\tag{7}$$

② 对于 $\forall\bar{\omega}_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, 多值函数 $(\boldsymbol{x},\omega_j)\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\delta_j)\times\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})\to\partial_1 g_j(\boldsymbol{x},\omega_j)\subset X^*$ 在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\omega}_j)$ 是弱*闭的,其中 $\partial_1 g(\cdot,\bar{y})$ 表示在给定 $\bar{y}\in Y$ 时,函数 $g:X\times Y\to\mathbf{R}$ 是关于第一变量的极限次微分运算.

注 4　在非光滑分析或具有无限集的鲁棒多目标优化中计算上确界函数或最大值函数的次微分时,上述假设仍适用.

为建立不确定多目标优化问题(UMP) 的必要性条件,本文给出以下约束(CQ) 条件:

定义 8[13]　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$, 其中 C 是鲁棒多目标优化问题(RUMP) 的可行集. 如果 $0\notin\mathrm{cl}^*\,\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}}),\ j=1,\cdots,m\}$, 则称问题(UMP) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处满足 CQ 条件.

注 5　定义 8 的约束(CQ) 条件在适当的条件下可简化为光滑集合中扩展的Painleve-Kuratowski 约束条件[18].

命题 1　在满足假设 ① 和 ② 的条件下, $\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是非空集.

证明　设 $j\in\{1,\cdots,m\}$, ε_j、δ_j、$\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$、$K_j$ 和 $G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的定义参见函数 g_j 在假设 ① 和 ② 中的定义. 首先证对于 $\forall\boldsymbol{x}\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$ 有:

$$\varnothing\neq\Omega_j(\boldsymbol{x})\subset\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}}),\tag{8}$$

其中 $\bar{\delta}_j=\min\left\{\delta_j,\dfrac{\varepsilon_j}{2(K_j+1)}\right\}$. 对于 $\forall\boldsymbol{x}\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$, $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon_j-2K_j\bar{\delta}_j)$, 先证明 $\Omega_j^{\tilde{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})\subset\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$. 事实上,取任意的 $\omega\in\Omega_j^{\tilde{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})$ 可得:

$$g_j(\boldsymbol{x},\omega)\geqslant G_j(\boldsymbol{x})-\tilde{\varepsilon}.\tag{9}$$

于是由式(7) 知:

$$\begin{gathered}|g_j(\boldsymbol{x},\omega)-g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)|\leqslant K_j\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\Rightarrow\\ g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)\geqslant g_j(\boldsymbol{x},\omega)-K_j\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\geqslant g_j(\boldsymbol{x},\omega)-K_j\bar{\delta}_j.\end{gathered}\tag{10}$$

因 $\omega_j\in\Omega_j$, 函数 $g_j(\cdot,\omega_j)$ 是一致 Lipschitz 函数,且 $G_j(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\omega_j\in\Omega_j}g_j(\boldsymbol{x},\omega_j)\in\mathbf{R}$, 因此 $G_j(\boldsymbol{x})$ 函数为 Lipschitz 函数,即:

$$|G_j(\boldsymbol{x})-G_j(\bar{\boldsymbol{x}})|\leqslant K_j\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\Rightarrow G_j(\boldsymbol{x})\geqslant G_j(\bar{\boldsymbol{x}})-K_j\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\geqslant G_j(\bar{\boldsymbol{x}})-K_j\bar{\delta}_j.\tag{11}$$

结合式(9)—(11) 可得:

$$g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega) \geqslant g_j(\boldsymbol{x},\omega) - K_j\bar{\delta}_j \geqslant G_j(\boldsymbol{x}) - \tilde{\varepsilon} - K_j\bar{\delta}_j \geqslant G_j(\bar{\boldsymbol{x}}) - 2K_j\bar{\delta}_j - \tilde{\varepsilon} \geqslant G_j(\bar{\boldsymbol{x}}) - \varepsilon_j,$$

因此 $\omega \in \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$,故 $\Omega_j^{\tilde{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}) \subset \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$.

设 $\boldsymbol{x} \in B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$. 对于 $n \in \mathbf{N}$,选取子列 $\tilde{\varepsilon}_n \in (0,\varepsilon_j - 2K_j\bar{\delta}_j)$ 和 $\omega_n \in \Omega_j^{\tilde{\varepsilon}_n}(\boldsymbol{x})$,使得当 $n \to \infty$ 时,$\tilde{\varepsilon}_n \to 0$. 因 $\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是紧的,对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有 $\omega_n \in \Omega_j^{\tilde{\varepsilon}_n}(\boldsymbol{x}) \subset \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$,因此可知序列 $\{\omega_n\}$ 中包含一个收敛子列 $\bar{\omega}$,即 $\exists \bar{\omega} \in \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$,当 $n \to \infty$ 时有 $\omega_n \to \bar{\omega}$. 又因为对于 $\forall \boldsymbol{x} \in B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$,在 $\omega \in \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 时,函数 $\omega \mapsto g_j(\boldsymbol{x},\omega)$ 是上半连续的,且 $\omega_n \in \Omega_j^{\tilde{\varepsilon}_n}(\boldsymbol{x})$,因此有:

$$g_j(\boldsymbol{x},\bar{\omega}) \geqslant \lim_{n\to\infty}\sup g_j(\boldsymbol{x},\omega_n) \geqslant \lim_{n\to\infty}\sup(G_j(\boldsymbol{x}) - \tilde{\varepsilon}_n) = G_j(\boldsymbol{x}),$$

所以由扰动集 $\Omega_j(\boldsymbol{x})$ 的定义知 $\bar{\omega} \in \Omega_j(x)$. 又因对于 $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$,有 $\Omega_j(\boldsymbol{x}) \subset \Omega_j^{\tilde{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})$,因此式(8)成立,$\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq \varnothing$.

命题2 在满足假设①、②的条件下,$G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 和 $g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)$ 次微分之间有如下关系:

$$\partial G_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \subset \mathrm{cl}^*\,\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j) \mid \omega_j \in \Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}. \tag{12}$$

证明 由命题1知,$G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是有定义的. 假设 $\exists v^* \in \partial G_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \setminus \mathrm{cl}^*\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j) \mid \omega_j \in \Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$,于是应用强分离定理可得 $\exists v \in X\setminus\{0\}$,进而有:

$$\sup\{\langle x^*,v\rangle \mid x^* \in \bigcup_{\omega_j \in \Omega_j(\bar{x})} \partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\} < \langle v^*,v\rangle. \tag{13}$$

由于 $v^* \in \partial G_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \subset \partial^C G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$,于是结合式(5)可得:

$$\langle v^*,v\rangle \leqslant G_j^\circ(\bar{\boldsymbol{x}};v). \tag{14}$$

由式(7)知,函数 G_j 是 $B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$ 上关于系数 K_j 的 Lipschitz 函数. 此外,由定义6知,存在序列 $\{x_n\} \subset X$ 和 $\{\lambda_n\} \subset (0,+\infty)$ 使得 $x_n \to \bar{\boldsymbol{x}}$, $\lambda_n \to 0$,且

$$G_j^\circ(\bar{\boldsymbol{x}};v) = \lim_{n\to\infty}\frac{G_j(x_n+\lambda_n v) - G_j(x_n)}{\lambda_n}. \tag{15}$$

因为 $x_n \to \bar{\boldsymbol{x}}$, $\lambda_n \to 0$,因此对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有 $x_n, x_n+\lambda_n v \in B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$. 由式(8)知,对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有 $\Omega_j(x_n+\lambda_n v) \neq \varnothing$,于是可在其中选取序列 ω_n,使得

$$\omega_n \in \Omega_j(x_n+\lambda_n v) \subset \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}}), \tag{16}$$

即对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有:

$$G_j(x_n+\lambda_n v) = g_j(x_n+\lambda_n v,\omega_n). \tag{17}$$

由式(17)和 G_j 的定义知,对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有下式成立:

$$G_j(x_n+\lambda_n v) - G_j(x_n) \leqslant g_j(x_n+\lambda_n v,\omega_n) - g_j(x_n,\omega_n). \tag{18}$$

由于函数 $g_j(\cdot,\omega_n)(n \in \mathbf{N})$ 在 $B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)$ 上是 Lipschitz 函数,因此利用中值不等式可得 $\exists c_n \in [x_n, x_n+\lambda_n v)$, $x_n^* \in \partial_1 g_j(c_n,\omega_n)$,并有下式成立:

$$g_j(x_n+\lambda_n v,\omega_n) - g_j(x_n,\omega_n) \leqslant \langle x_n^*,\lambda_n v\rangle. \tag{19}$$

由式(7)和(4)知,对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有 $\|x_n^*\| \leqslant K_j$. 又因 X 为 Asplund 空间,B_{X^*} 为弱*序列紧的,因此可以假设 $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} z^* \in X^*$. 结合式(14)、(15)、(18)和(19)可得:

$$\langle v^*,v\rangle \leqslant \langle z^*,v\rangle. \tag{20}$$

由 $\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的紧性和式(16)可知,$\exists \omega_0 \in \Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$,使得序列 $\{\omega_n\} \to \omega_0$. 由式(7)可得,对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有:

$$g_j(x_n+\lambda_n v,\omega_n) \leqslant g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_n) + K_j\|x_n+\lambda_n v - \bar{\boldsymbol{x}}\|. \tag{21}$$

由 G_j 的定义知,对于 $\forall \omega \in \Omega_j$ 和 $n \in \mathbf{N}$ 有下式成立:

$$g_j(x_n+\lambda_n v,\omega)\leqslant G_j(x_n+\lambda_n v). \tag{22}$$

于是由式(17)、(21) 和(22) 知,对于 $\forall\omega\in\Omega_j$ 和 $n\in\mathbf{N}$ 有:

$$g_j(x_n+\lambda_n v,\omega)\leqslant g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_n)+K_j\|x_n+\lambda_n v-\bar{\boldsymbol{x}}\|.$$

当 $n\to\infty$ 时,对其取上极限后再根据函数 $\omega\mapsto g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)$ 的上半连续性可得,对于 $\forall\omega\in\Omega_j$ 有 $g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)\leqslant g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_0)$,因此有 $G_j(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_0)$,故 $\omega_0\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$. 进一步,当 $n\to\infty$ 时,有 $c_n\to\bar{\boldsymbol{x}}$ 和多值函数 $(\boldsymbol{x},\omega)\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\delta}_j)\times\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})\to\partial_1 g_j(\boldsymbol{x},\omega)\subset X^*$ 在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_0)$ 是弱 * 闭的,故 $z^*\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_0)$. 结合式(13) 和(20) 可知 $\sup\{\langle x^*,v\rangle\mid x^*\in\bigcup\limits_{\omega_j\in\Omega_j(\bar{x})}\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\}<\langle v^*,v\rangle\leqslant\langle z^*,v\rangle$ 不成立,由此可知式(12) 成立.

定理 1　设假设 ① 和 ② 成立,$\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(RUMP) 的 ε-拟弱有效解,则 $\exists\lambda_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots,l)$,$\mu_j\geqslant 0\ (j=1,\cdots,m)$,$\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i+\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j=1$,且有

$$\begin{cases}0\in\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j\,\mathrm{cl}^*\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}+\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\sqrt{\varepsilon_i}\,B,\\ \mu_j\sup\limits_{\omega_j\in\Omega_j}g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)=0,\ j=1,\cdots,m\end{cases} \tag{23}$$

成立. 此外,如果式(23) 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处满足 CQ 条件,则所选的 λ_i 不全为零.

证明　因为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(RUMP) 的 ε-拟弱有效解,所以存在 $\boldsymbol{x}\in C$ 并有:

$$f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\notin-\mathrm{int}\,\mathbf{R}_+,\ \forall i=1,\cdots,l.$$

在空间 X 上定义一个实值函数 Φ,于是对于 $\boldsymbol{x}\in X$ 有 $\Phi(\boldsymbol{x})=\max\{f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|,G_j(\boldsymbol{x})\}$. 由命题 1 知,$G_j$ 是有定义的. 又因对于 $\forall\boldsymbol{x}\in C$ 有 $\Phi(\bar{\boldsymbol{x}})=0\leqslant\Phi(\boldsymbol{x})$,所以 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是函数 Φ 的最小值. 由引理 1 可知 $0\in\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{x}})$. 再利用最大值函数的次微分公式[15] 可得:

$$\begin{aligned}0\in\partial\Phi(\bar{\boldsymbol{x}})\subset\Big\{&\partial\Big(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}\mu_j G_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\Big)\mid\lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,l,\\&\mu_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,m,\ \mu_j G_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)=0,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j=1\Big\}.\end{aligned} \tag{24}$$

根据文献[19] 可知:

$$\partial(\|\cdot-\bar{\boldsymbol{x}}\|)(\bar{\boldsymbol{x}})=B. \tag{25}$$

再结合式(24)、(25) 和 Lipschitz 函数的极限次微分和规则可得:

$$\begin{aligned}0\in\Big\{&\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\partial G_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\sqrt{\varepsilon_i}\,B\mid\lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,l,\\&\mu_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,m,\ \mu_j G_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)=0,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j=1\Big\}.\end{aligned}$$

于是根据命题 2 的结论可得式(23) 成立. 假设在式(23) 中,对于 $\forall i=1,\cdots,l$ 有 $\lambda_i=0$,则有 $\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j=1$ 和 $0\in\mathrm{cl}^*\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}}),\ j=1,\cdots,m\}$. 该结果与问题(UMP) 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处满足 CQ 条件相矛盾,所以 $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\neq 0$ 得证.

下面举例验证上述定理的正确性.

例 1　设 $f_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$i=1,2$,$f_1(\boldsymbol{x})=2|\boldsymbol{x}+1|+1$,$f_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-1$,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}$. 考虑问题(UMP),其约束函数为 $g:\mathbf{R}\times\Omega_j\to\mathbf{R}$,$g(\boldsymbol{x},\omega)=-\boldsymbol{x}+\omega-1$,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}$,其中 $\omega\in\Omega=(-1,0]$.

由题设条件易验证函数 g 满足假设条件 ① 和 ②,且鲁棒可行集为 $C=(-2,+\infty)$. 由此可选取 $\bar{\boldsymbol{x}}=-1\in C$, $\varepsilon\in\mathbf{R}_{+}^{2}$,再利用定义 1 即可得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(UMP)的鲁棒 ε-拟有效解. 对函数 f_i 和 g 分别进行次微分运算得:

$$\Omega(\bar{\boldsymbol{x}})=\{0\},\ \partial f_1(\bar{\boldsymbol{x}})=[-2,2],\ \partial f_2(\bar{\boldsymbol{x}})=\{1\},$$

$$\{\partial_1 g(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)\mid\omega\in\Omega(\bar{\boldsymbol{x}})\}=\{-1\},\ \partial(\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|)=B.$$

根据定理 1 中的参数取值范围,取 $\lambda_1=\lambda_2=\mu=\dfrac{1}{3}$, $\varepsilon=\left(\dfrac{1}{B^2},\dfrac{1}{B^2}\right)$, $\lambda_1+\lambda_2+\mu=1$. 当 $\partial f_1(\bar{\boldsymbol{x}})=-2$ 时,将相关参数和次微分的取值代入式(23)中进行计算即可得定理 1 成立.

由有限维空间的性质可知,若空间 X 是有限维的,则弱*闭运算与弱闭运算相同. 由此可知定理 1 的结论可进一步加强为:

推论 1 设假设 ① 和 ② 成立,空间 $X=\mathbf{R}^n$, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(RUMP)的拟弱 ε-有效解,则 $\exists\lambda_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots,l)$, $\mu_j\geqslant 0\ (j=1,\cdots,m)$, $\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i+\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j=1$,并且有

$$\begin{cases}0\in\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j\operatorname{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}+\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\sqrt{\varepsilon_i}\,B,\\ \mu_j\sup\limits_{\omega_j\in\Omega_j}g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)=0,\ j=1,\cdots,m\end{cases}$$

成立. 此外,如果上式在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处满足 CQ 条件,则所选的 λ_i 不全为零.

证明 设 $j\in\{1,\cdots,m\}$,于是由函数 g 所满足的假设条件 ① 和 ② 可知 ε_j、δ_j、$\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$、$K_j$ 和 $G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是有定义的. 首先证明集合 $\operatorname{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中是闭的. 由闭集的定义可知,要证明集合 $\operatorname{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中是闭的,只需证集合 $\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 是闭的即可.

取任意的序列 $\{x_n^*\}\subset\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$,则对于 $\forall n\in\mathbf{N}$ 存在一个子列 $\{\omega_n\}\subset\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$,使得 $x_n^*\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_n)$. 又因对于 $\omega\in\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$,函数 $\omega\mapsto g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega)\in\mathbf{R}$ 是上半连续的,集合 $\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 在紧空间 $\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 中是闭的,所以集合 $\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是紧集,故在序列 $\{\omega_n\}$ 中存在一个子列 $\{\omega_{n_j}\}$ 收敛于 $\bar{\omega}\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$. 再由式(7)和(4)知:对于 $\forall n\in\mathbf{N}$,有 $\|x_n^*\|\leqslant K_j$ 成立. 不失一般性,假设序列 $\{x_n^*\}$ 中的一个子列 $\{x_{n_j}^*\}\rightarrow x^*$. 因 $(\boldsymbol{x},\omega)\in B(\bar{\boldsymbol{x}},\delta_j)\times\Omega_j^{\varepsilon_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$,多值函数 $(\boldsymbol{x},\omega)\rightarrow\partial_1 g_j(\boldsymbol{x},\omega)\subset\mathbf{R}^n$ 在 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\omega})$ 是闭的,所以有 $x^*\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\omega})$. 由上述可知,集合 $\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是紧子集. 由紧集的定义可知,集合 $\operatorname{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中是闭集,所以集合 $\operatorname{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 也是闭集. 因推论 1 成立的其余证明类似于定理 1 的证明,故在此省略. 由此最终可证得推论 1 成立.

2.2 最优性充分条件

首先给出以下伪拟函数广义凸性的定义.

定义 9 设 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_l)\in\mathbf{R}_{+}^{l}$,则由此可得以下定义:

1) 如果对于任意的 $\boldsymbol{x}\in C$, $\xi_i\in\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$, $i=1,\cdots,l$, $\eta_j\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)$, $\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, $j=1,\cdots,m$, $b\in B$, $\exists v\in X$ 有 $f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\geqslant\langle\xi_i,v\rangle+\sqrt{\varepsilon_i}\langle b,v\rangle$ 和 $g_j(\boldsymbol{x},\omega_j)-g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\geqslant\langle\eta_j,v\rangle$ 成立,则称 (f,g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$ 处为伪拟函数.

2) 如果对于任意的 $\boldsymbol{x}\in C$, $\xi_i\in\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$, $i=1,\cdots,l$, $\eta_j\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)$, $\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, $j=1,\cdots,m$,

$b\in B$,存在 $v\in X\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$ 使得 1) 中关于函数 f 和 g 的不等式严格成立,则称 (f,g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$ 处为严格伪拟函数.

定理 2　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$,问题(UMP) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处满足鲁棒最优性必要条件和 CQ 条件,则有以下结论成立:

① 若 (f,g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$ 处为伪拟函数,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(UMP) 的鲁棒 ε-拟弱有效解.

② 若 (f,g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$ 处为严格伪拟函数,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(UMP) 的鲁棒 ε-拟有效解.

证明　因 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$ 满足问题(UMP) 的鲁棒最优性必要条件和 CQ 条件,即 $\exists\lambda_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots,l)$, $\mu_j\geqslant 0\ (j=1,\cdots,m)$, $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\neq 0$,因此有以下式子成立:

$$0\in\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,\mathrm{cl}^*\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\sqrt{\varepsilon_i}\,B,\tag{26}$$

$$\mu_j\sup_{\omega_j\in\Omega_j}g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)=0,\ j=1,\cdots,m.\tag{27}$$

由于 $\exists\xi_i\in\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}),\ i=1,\cdots,l,\ b\in B$ 及

$$\eta_j\in\mathrm{cl}^*\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\},\ j=1,\cdots,m,\tag{28}$$

因此有:

$$0=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\eta_j+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\sqrt{\varepsilon_i}\,b.\tag{29}$$

首先证定理 2 中的 ①. 假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(UMP) 的鲁棒 ε-拟弱有效解,即 $\exists\hat{\boldsymbol{x}}\in C$,于是有:

$$f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\in-\mathrm{int}\,\mathbf{R}_+^l.\tag{30}$$

由于 (f,g) 在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in C$ 处为伪拟函数,因此对于 $\forall\xi_i\in\partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}),\ \eta_j\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j),\ \omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}}),\ b\in B$, $\exists v\in X$,有下式成立:

$$f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\geqslant\langle\xi_i,v\rangle+\sqrt{\varepsilon_i}\,\langle b,v\rangle,\tag{31}$$

$$g_j(\hat{\boldsymbol{x}},\omega_j)-g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\geqslant\langle\eta_j,v\rangle.\tag{32}$$

对于 $\forall j\in\{1,\cdots,m\}$,由式(28) 知存在一个序列 $\{\eta_\beta\}_{\beta\in\Lambda}\subset\mathrm{co}\{\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_j)\mid\omega_j\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ 使 $\eta_\beta\xrightarrow{w^*}\eta_j$,其中 Λ 为序列的指标集. 由此可知,对于 $\forall\beta\in\Lambda$, $\exists\alpha_{\beta t}\geqslant 0,\ \eta_{\beta t}\in\partial_1 g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_{\beta t}),\ \omega_{\beta t}\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}}),\ t=1,\cdots,s,\ s\in\mathbf{N}$,有 $\sum_{t=1}^{s}\alpha_{\beta t}=1$ 和 $\eta_\beta=\sum_{t=1}^{s}\alpha_{\beta t}\eta_{\beta t}$. 再结合式(32) 可得:

$$\langle\eta_\beta,v\rangle=\sum_{t=1}^{s}\alpha_{\beta t}\langle\eta_{\beta t},v\rangle\leqslant\sum_{t=1}^{s}\alpha_{\beta t}\left[g_j(\hat{\boldsymbol{x}},\omega_{\beta t})-g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_{\beta t})\right].$$

由于 $\omega_{\beta t}\in\Omega_j(\bar{\boldsymbol{x}})$,因此 $g_j(\bar{\boldsymbol{x}},\omega_{\beta t})=G_j(\bar{\boldsymbol{x}}),\ t=1,\cdots,s$. 此外,对于 $\forall t=1,\cdots,s$,显然有 $g_j(\hat{\boldsymbol{x}},\omega_{\beta t})\leqslant G_j(\hat{\boldsymbol{x}})$. 由此可知,对于 $\forall\beta\in\Lambda$ 有 $\langle\eta_\beta,v\rangle\leqslant G_j(\hat{\boldsymbol{x}})-G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$. 在该式中对 $\beta\in\Lambda$ 取极限得 $\langle\eta_j,v\rangle\leqslant G_j(\hat{\boldsymbol{x}})-G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$. 又由于 $\hat{\boldsymbol{x}}\in C$,因此可知 $G_j(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant 0$ 成立,且 $\langle\eta_j,v\rangle\leqslant-G_j(\bar{\boldsymbol{x}})$. 于是由式(27)、(29) 和(31) 可得:

$$\begin{aligned}0=&\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left[\langle\xi_i,v\rangle+\sqrt{\varepsilon_i}\,\langle b,v\rangle\right]+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\langle\eta_j,v\rangle\leqslant\\&\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left[f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\right]-\sum_{j=1}^{m}\mu_j G_j(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant\\&\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\left[f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_i}\,\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\right].\end{aligned}$$

又因为 $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\neq 0$,所以 $\exists i_0\in 1,\cdots,l$,有 $f_{i_0}(\hat{\boldsymbol{x}})-f_{i_0}(\bar{\boldsymbol{x}})+\sqrt{\varepsilon_{i_0}}\,\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|\geqslant 0$. 该结果与式(30) 相

矛盾,所以 $\bar{x}$ 是问题(UMP)的鲁棒 ε-拟弱有效解.

下证定理2中的②.假设 $\bar{x}$ 不是问题(UMP)的鲁棒 ε-拟有效解,即 $\exists \hat{x} \in C$,于是有:

$$f_i(\hat{x}) - f_i(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon_i}\,\|\hat{x} - \bar{x}\| \in -\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}. \tag{33}$$

由于(f,g)在$\bar{x} \in C$处为严格伪拟函数,因此对于 $\forall \xi_i \in \partial f_i(\bar{x})$, $\eta_j \in \partial_1 g_j(\bar{x}, \omega_j)$, $\omega_j \in \Omega_j(\bar{x})$, $b \in B$, $\exists v \in X$,有 $f_i(\hat{x}) - f_i(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon_i}\|x - \bar{x}\| > \langle \xi_i, v\rangle + \sqrt{\varepsilon_i}\langle b, v\rangle$ 和 $g_j(\hat{x}, \omega_j) - g_j(\bar{x}, \omega_j) \geqslant \langle \eta_j, v\rangle$ 成立.其余的证明过程与①的证明类似,故省略.由此最终可证得 $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i[f_i(\hat{x}) - f_i(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon_i}\,\|\hat{x} - \bar{x}\|] > 0$,即 $\exists i_0 \in \{1,\cdots,l\}$,有 $f_{i_0}(\hat{x}) - f_{i_0}(\bar{x}) + \sqrt{\varepsilon_{i_0}}\,\|\hat{x} - \bar{x}\| > 0$ 成立,该结果与式(33)相矛盾,所以 $\bar{x}$ 是问题(UMP)的鲁棒 ε-拟有效解.

参考文献:

[1] CHUONG T D. L-invex-infine functions and applications[J]. Nonlinear Analysis, 2012,75(13):5044-5052.

[2] 杨铭,李林廷,高英.多目标优化问题鲁棒有效解与真有效解之间的关系[J].应用数学和力学,2019,40(12):1364-1372.

[3] LEE G M, KIM G S, DINH N. Optimality conditions for approximate solutions of convex semi-infinite vector optimization problems[J]. Recent Developments in Vector Optimization, 2012,1:275-295.

[4] LEE J H, LEE G M. On ε-solutions for convex optimization problems with uncertainty data[J]. Positivity, 2012, 16:509-526.

[5] CHUONG T D, KIM D S. Nonsmooth semi-infifinite multiobjective optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014,160:748-762.

[6] CHUONG T D, KIM D S. Optimality conditions and duality in nonsmooth multiobjective optimization problems [J]. Annals of Operations Research, 2014,217:117-136.

[7] CHUONG T D, KIM D S. Approximate solutions of multiobjective optimization problems[J]. Positivity, 2016,20: 187-207.

[8] CHUONG T D. Optimality and duality for robust multiobjective optimization problems[J]. Nonlinear Analysis, 2016,134:127-143.

[9] LEE J H, JIAO L. On quasi ε-solution for robust convex optimization problems[J]. Optimization Letters, 2017,11 (8):1609-1622.

[10] 孙祥凯.不确定信息下凸优化问题的鲁棒解刻划[J].数学物理学报,2017,37(2):257-264.

[11] 周俊屹,郑霜.鲁棒多目标优化问题的最优性和对偶性[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(1):49-53.

[12] 龚田甜.非光滑多目标规划鲁棒解的最优性条件和鞍点定理[D].银川:北方民族大学,2020.

[13] CHUONG T D. Robust optimality and duality in multiobjective optimization problems under date uncertainty[J]. SIAM Journal on Optimization, 2020,30(2):1501-1526.

[14] 邓光菊.不确定多目标优化问题近似鲁棒解的最优性条件与对偶性[D].重庆:西南大学,2021.

[15] 莫尔杜霍维奇(BORIS S MORDUKHOVICH).变分分析与广义微分I:基础理论[M].赵亚莉,王炳武,钱伟懿,译.北京:科学出版社,2011:268-269.

[16] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: Wiley Press, 1983.

[17] CHUONG T D, KIM D S. Normal regularity for the feasible set of semi-infinite multiobjective optimization problems with applications[J]. Annals of Operations Research, 2018,267:81-99.

[18] BONNANS J F, SHAPIRO A. Perturbation Analysis of Optimization Problems[M]. New York: Springer-Verlag, 2020.

[19] IOFFE A D, TIHOMIROV V M. Theory of Extremal Problems[M]. Amsterdam-New York: North-Holland Publishing Company, 1979.