

文章编号: 1004-4353(2022)03-0189-07

# 一类非线性分数阶微分方程多重 正解存在的充分条件

王枫, 葛琦

( 延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 研究了一类非线性分数阶微分方程边值问题的多重正解存在性. 首先分析了方程格林函数的性质, 然后利用 Guo-Krasnosel'skii 不动点定理得到了当系数  $\mu(t)$  满足不同条件时, 该边值问题至少存在 1 个正解和至少存在 2 个正解的充分条件.

**关键词:** 分数阶微分; 多重正解; 黎曼刘维尔型分数阶导数; 格林函数; Guo-Krasnosel'skii 不动点定理

**中图分类号:** O175.6

**文献标识码:** A

## Sufficient conditions for the existence of multiple positive solutions of a class of nonlinear fractional differential equations

WANG Feng, GE Qi

( College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China )

**Abstract:** The existence of multiple positive solutions for a class of boundary value problems of nonlinear fractional differential equations is studied. Firstly, the properties of the Green's function of the equation are analyzed, and then the sufficient conditions for the existence of at least one positive solution and at least two positive solutions of the boundary value problem are obtained by using Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem when the coefficient  $\mu(t)$  satisfies different conditions.

**Keywords:** fractional differential; multiple positive solutions; Riemann Liouville type fractional derivative; Green's function; Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem

## 0 引言

近年来,许多学者研究了分数阶微分方程的边值问题,并取得了很好的成果<sup>[1-6]</sup>. 2006 年, Zhang<sup>[7]</sup> 研究了如下分数阶微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^a u(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

并通过格林函数的性质和不动点定理证明了该方程存在多重正解. 上述方程中  $a$  为实数 ( $1 < a \leq 2$ ),  ${}^C D_{0+}^a$  为 Caputo 型分数阶导数,  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  为连续函数. 2011 年, Zhao 等<sup>[8]</sup> 推广了上述方程, 即研究了如下分数阶微分方程的边值问题:

收稿日期: 2022-04-21

第一作者: 王枫(1997—), 男, 硕士研究生, 研究方向为常微分方程理论及其应用.

通信作者: 葛琦(1975—), 女, 硕士, 教授, 研究方向为常微分方程理论及其应用.

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^a u(t) = \lambda f(u(t)), \\ u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0, \end{cases}$$

并通过格林函数的性质和不动点定理得到了该方程至少存在一个解以及方程存在多重正解的充分条件. 上述方程中  $a$  为实数 ( $1 < a \leq 2$ ),  ${}^C D_{0+}^a$  为 Caputo 型分数阶导数,  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  为连续函数, 且  $\lambda > 0$ . 受上述研究启发, 本文研究如下分数阶微分方程的边值问题:

$$D_{0+}^p x(t) + \mu(t)f(x(t)) = 0, 0 < t < 1; \quad (1)$$

$$x(0) = x'(0) = 0, x(1) + x'(1) = 0. \quad (2)$$

其中  $p$  为实数 ( $2 \leq p < 3$ ),  $D_{0+}^p$  为黎曼刘维尔型分数阶导数,  $\mu(t)$  为定义在  $[0, 1]$  上的正连续函数,  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  为连续函数.

## 1 预备知识

**定义 1**<sup>[6]</sup> 定义连续函数  $u: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  的  $s$  阶黎曼刘维尔分数阶积分为

$$D_{a+}^{-s} u(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_a^t (t-\tau)^{s-1} u(\tau) d\tau,$$

其中  $s > 0, t > a$ ,  $\Gamma(s)$  为 Gamma 函数, 等式右端的积分在  $(a, b)$  上逐点有定义.

**定义 2**<sup>[6]</sup> 定义连续函数  $u: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  的  $s$  阶黎曼刘维尔分数阶导数为

$$D_{a+}^s u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-s)} \frac{d^n}{dt^n} \left( \int_a^t (t-\tau)^{n-s-1} u(\tau) d\tau \right),$$

其中  $s > 0, n = [s] + 1, [s]$  为  $s$  的整数部分, 等式右端积分在  $(a, b)$  上逐点有定义.

**引理 1**<sup>[6]</sup> 若  $n-1 \leq s < n$ , 则  $D_{a+}^{-s} (D_{a+}^s u(t)) = u(t) + c_1 t^{s-1} + c_2 t^{s-2} + \cdots + c_n t^{s-n}$ , 其中  $c_i$  ( $i=1, 2, \cdots, n$ ) 为确定的实数.

**引理 2** 设  $2 \leq p < 3, \mu(t)$  为定义在  $[0, 1]$  上的正连续函数,  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  为连续函数, 则边值问题(1)和(2)等价于如下积分形式:  $x(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)ds$ , 其中格林函数

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} + \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p-1)} - \frac{(t-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1; \\ \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} + \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p-1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

**证明** 假设  $x(t)$  满足边值问题(1)和(2), 并令  $h(t) = \mu(t)f(x(t))$ , 于是利用引理 1 可得:

$$x(t) = c_1 t^{p-1} + c_2 t^{p-2} + c_3 t^{p-3} - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h(s) ds.$$

根据条件  $x(0) = 0$ , 计算上式得  $c_3 = 0$ . 计算下式:

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1(p-1)t^{p-2} + c_2(p-2)t^{p-3} - D_{0+}^{-(p-1)} h(t) = \\ &= c_1(p-1)t^{p-2} + c_2(p-2)t^{p-3} - \frac{1}{\Gamma(p-1)} \int_0^t (t-s)^{p-2} h(s) ds. \end{aligned}$$

根据条件  $x'(0) = 0$ , 计算上式得  $c_2 = 0$ . 计算下式:

$$x(1) = c_1 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-s)^{p-1} h(s) ds,$$

$$x'(1) = c_1(p-1) - \frac{1}{\Gamma(p-1)} \int_0^1 (1-s)^{p-2} h(s) ds.$$

根据条件  $x(1) + x'(1) = 0$ , 计算上式得:

$$c_1 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-s)^{p-1} h(s) ds + c_1(p-1) - \frac{1}{\Gamma(p-1)} \int_0^1 (1-s)^{p-2} h(s) ds = 0,$$

即  $c_1 = \frac{1}{p\Gamma(p)} \int_0^1 (1-s)^{p-1} h(s) ds + \frac{1}{p\Gamma(p-1)} \int_0^1 (1-s)^{p-2} h(s) ds$ . 由此可得:

$$x(t) = \frac{t^{p-1}}{p\Gamma(p)} \int_0^1 (1-s)^{p-1} h(s) ds + \frac{t^{p-1}}{p\Gamma(p-1)} \int_0^1 (1-s)^{p-2} h(s) ds - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} h(s) ds = \int_0^1 G(t,s) h(s) ds,$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} + \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p-1)} - \frac{(t-s)^{p-1}}{\Gamma(p)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1; \\ \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} + \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p-1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

**引理 3** 格林函数  $G(t,s)$  具有如下性质: ① 对于任意的  $t,s \in (0,1)$ ,  $G(t,s)$  为正的连续有界函数; ② 对于任意的  $s \in (0,1)$ ,  $\max_{0 \leq t \leq 1} G(t,s) \leq M(s)$ , 并且存在实数  $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ , 使得  $\min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} G(t,s) \geq \gamma M(s)$ , 其中  $M(s) = \frac{(p+1)(1-s)^{p-2}s}{p\Gamma(p-1)}$ ,  $\gamma = \frac{\eta_1^{p-1}(1-\eta_2)}{p+1}$ .

**证明** 由式(3)可知, 当  $0 \leq s \leq t \leq 1$  时有:

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1} + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2} - p(t-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} \geq \\ &= \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1} + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2} - p(t-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} = \frac{pt^{p-1}(1-s)^{p-1} - p(t-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} \geq \\ &= \frac{t^{p-2}(1-s)^{p-2}s(1-t)}{\Gamma(p)} \geq \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}s(1-t)}{p\Gamma(p-1)} \geq 0; \end{aligned}$$

当  $0 \leq t \leq s \leq 1$  时有:

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1} + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p)} \geq \frac{(p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p)} = \\ &= \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p-1)} \geq \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}s(1-t)}{p\Gamma(p-1)} \geq 0. \end{aligned}$$

由上述可知对于任意的  $t,s \in (0,1)$  有:

$$G(t,s) \geq \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-2}s(1-t)}{p\Gamma(p-1)} > 0. \quad (4)$$

设  $[\eta_1, \eta_2] \subseteq [0,1]$ , 则对于  $\eta_1 \leq t \leq \eta_2$  有  $t^{p-1}(1-t) > \eta_1^{p-1}(1-\eta_2)$ . 于是由式(4)可知:

$$\min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} G(t,s) \geq \frac{\eta_1^{p-1}(1-\eta_2)(1-s)^{p-2}s}{p\Gamma(p-1)} \triangleq m(s). \quad (5)$$

再由式(3)可知, 当  $0 \leq s \leq t \leq 1$  时有:

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1} + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2} - p(t-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} = \\ &= \frac{pt^{p-1}(1-s)^{p-1} - p(t-s)^{p-1} + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2} - (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-1}}{p\Gamma(p)} = \\ &= \frac{p(p-1) \int_{t-s}^{t(1-s)} u^{p-2} du + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2}s}{p\Gamma(p)} \leq \\ &= \frac{p(p-1)t^{p-2}(1-s)^{p-2}[t(1-s) - (t-s)] + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2}s}{p\Gamma(p)} \leq \\ &= \frac{p(p-1)(1-s)^{p-2}s + (p-1)(1-s)^{p-2}s}{p\Gamma(p)} = \frac{p+1}{p\Gamma(p-1)} (1-s)^{p-2}s \triangleq M(s); \end{aligned} \quad (6)$$

当  $0 \leq t \leq s \leq 1$  时有:

$$G(t, s) = \frac{t^{p-1}(1-s)^{p-1} + (p-1)t^{p-1}(1-s)^{p-2}}{p\Gamma(p)} \leq \frac{s[(1-s)^{p-1} + (p-1)(1-s)^{p-2}]}{p\Gamma(p)} \leq \frac{s[(1-s)^{p-2} + (p-1)(1-s)^{p-2}]}{p\Gamma(p)} = \frac{s(1-s)^{p-2}}{\Gamma(p)} \leq \frac{p+1}{p\Gamma(p-1)}(1-s)^{p-2}s = M(s). \quad (7)$$

由式(6)和式(7)可知,对于任意的  $s \in (0, 1)$  有  $\max_{0 \leq t \leq 1} G(t, s) \leq M(s)$ . 又由式(3)易知,对于任意的  $t, s \in [0, 1]$ ,  $G(t, s)$  是连续的. 于是由式(4)可得,对于任意的  $t, s \in (0, 1)$ ,  $G(t, s)$  为正的连续有界函数,因此结论 ① 成立.

根据式(5)和式(6)可得  $m(s) = \gamma M(s)$ , 其中  $\gamma = \frac{m(s)}{M(s)} = \frac{\eta_1^{p-1}(1-\eta_2)}{p+1}$ . 由此可得  $\min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} G(t, s) \geq m(s) = \gamma M(s)$ , 因此结论 ② 成立. 证毕.

**引理 4**<sup>[8]</sup> 设  $X$  是一个 Banach 空间,  $P$  是  $X$  中的一个锥,  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  是  $X$  中的开子集, 并且满足  $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ . 设  $A: P \rightarrow P$  是一个完全连续算子, 如果下列条件之一成立, 则  $A$  在  $P \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$  上至少存在一个不动点:

(A<sub>1</sub>)  $\|Aw\| \leq \|w\|$ ,  $w \in P \cap \partial\Omega_1$ ;  $\|Aw\| \geq \|w\|$ ,  $w \in P \cap \partial\Omega_2$ ;

(A<sub>2</sub>)  $\|Aw\| \geq \|w\|$ ,  $w \in P \cap \partial\Omega_1$ ;  $\|Aw\| \leq \|w\|$ ,  $w \in P \cap \partial\Omega_2$ .

## 2 主要结论及其证明

令  $E = C[0, 1]$ , 因此  $E$  为 Banach 空间. 在  $E$  上定义一个范数和一个锥, 分别为  $\|u\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$  和  $P = \{u \in E \mid u(t) \geq 0, \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} u(t) \geq \gamma \|u\|\}$ . 设算子  $A: P \rightarrow P$  是按如下定义的一个算子:

$$Au(t) = \int_0^1 G(t, s)\mu(s)f(u(s))ds,$$

且算子  $A$  满足  $A(P) \subseteq P$ . 事实上  $\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s)\mu(s)f(u(s))ds \leq \int_0^1 M(s)\mu(s)f(u(s))ds$ ,

所以根据引理 3 有  $\min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} Au = \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} \int_0^1 G(t, s)\mu(s)f(u(s))ds \geq \gamma \|Au\|$ , 因此  $A(P) \subseteq P$ .

**引理 5**  $A: P \rightarrow P$  是完全连续算子.

**证明** 根据  $\mu(s)$ ,  $G(t, s)$ ,  $f(s)$  的连续性易知  $A$  是连续算子. 首先证明  $A$  是一致有界的. 设  $\Omega$  是  $P$  上的有界集, 即存在  $M > 0$ , 使得对于任意的  $u \in \Omega$  有  $\|u\| \leq M$  成立. 令  $L = \max_{\|u\| \leq M} f(u(t)) + 1$ , 则对于  $\forall u \in \Omega$  有  $\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s)\mu(s)f(u(s))ds \right| \leq \frac{p+1}{p\Gamma(p-1)} \sup_{0 \leq s \leq 1} \mu(s)L$ . 根据算子一致有界的定义可知,  $A$  是一致有界的.

下证  $A$  是等度连续的. 由于  $G(t, s)$  在  $[0, 1]$  上是连续的, 所以对于  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists$  常数  $\delta > 0$ , 使得对于  $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$  且  $|t_1 - t_2| < \delta$ , 有  $|G(t_2, s) - G(t_1, s)| < \frac{\epsilon}{\sup_{0 \leq s \leq 1} \mu(s)L}$ . 于是由式(3)可知:

$$\begin{aligned} |Au(t_1) - Au(t_2)| &= \left| \int_0^1 G(t_1, s)\mu(s)f(u(s))ds - \int_0^1 G(t_2, s)\mu(s)f(u(s))ds \right| = \\ &= \left| \int_0^1 [G(t_1, s) - G(t_2, s)]\mu(s)f(u(s))ds \right| \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \mu(s)L \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)|ds < \epsilon, \end{aligned}$$

所以根据算子等度连续的定义可知  $A$  是等度连续的. 再由 Arzela-Ascoli 定理可知  $A$  为完全连续算子, 证毕.

为了方便证明本文的主要结论,引入如下符号:记  $F_0 = \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u}$ ,  $F_\infty = \limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u}$ ,  $f_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u}$ ,  $f_\infty = \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u}$ ,  $C_1 = \int_0^1 M(s)ds$ ,  $C_2 = \gamma^2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} M(s)ds$ .

**定理 1** 如果  $f_\infty C_2 > F_0 C_1$  成立,且对任意  $t \in [0, 1]$  有  $\frac{1}{f_\infty C_2} < \mu(t) < \frac{1}{F_0 C_1}$ , 则边值问题(1)和(2)至少存在 1 个正解.

**证明** 由  $\frac{1}{f_\infty C_2} < \mu(t) < \frac{1}{F_0 C_1}$  以及  $f_\infty, F_0$  的定义知,存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $\frac{1}{(f_\infty - \varepsilon)C_2} \leq \mu(t) \leq \frac{1}{(F_0 + \varepsilon)C_1}$  成立. 再由  $F_0$  的定义知,存在  $r_1 > 0$ , 使得对于  $u \in (0, r_1]$  有  $f(u) \leq (F_0 + \varepsilon)u$  成立. 于是当  $u \in P$  且  $\|u\| = r_1$  时,有:

$$\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \leq \int_0^1 M(s) \frac{1}{(F_0 + \varepsilon)C_1} (F_0 + \varepsilon) u(s) ds \leq \frac{1}{C_1} \|u\| \int_0^1 M(s) ds = \|u\|.$$

取  $\Omega_1 = \{u | u \in E, \|u\| < r_1\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_1$  时有  $\|Au\| \leq \|u\|$  成立.

再由  $f_\infty$  的定义知,存在  $r_3 > 0$ , 使得对于  $u \in [r_3, +\infty)$  有  $f(u) \geq (f_\infty - \varepsilon)u$  成立. 取  $r_2 = \max\{2r_1, r_3\}$ , 于是当  $u \in P$  且  $\|u\| = r_2$  时有:

$$\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} G(t, s) \frac{1}{(f_\infty - \varepsilon)C_2} (f_\infty - \varepsilon) u(s) ds \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \gamma M(s) \frac{1}{C_2} \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} u(s) ds \geq \gamma^2 \|u\| \frac{1}{C_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} M(s) ds = \|u\|.$$

取  $\Omega_2 = \{u | u \in E, \|u\| < r_2\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_2$  时有  $\|Au\| \geq \|u\|$  成立.

由以上讨论可知,引理 4 中的条件(A<sub>1</sub>)成立,所以算子  $A$  在  $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$  上至少存在 1 个不动点  $u^*$ , 使得  $Au^* = u^*$ . 由此知边值问题(1)和(2)至少存在 1 个正解,证毕.

**定理 2** 如果  $f_0 C_2 > F_\infty C_1$  成立,且对任意  $t \in [0, 1]$  有  $\frac{1}{f_0 C_2} < \mu(t) < \frac{1}{F_\infty C_1}$ , 则边值问题(1)和(2)至少存在 1 个正解.

**证明** 由  $\frac{1}{f_0 C_2} < \mu(t) < \frac{1}{F_\infty C_1}$  以及  $f_0, F_\infty$  的定义知,存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $\frac{1}{(f_0 - \varepsilon)C_2} \leq \mu(t) \leq \frac{1}{(F_\infty + \varepsilon)C_1}$  成立. 再由  $f_0$  的定义知,存在  $r_1 > 0$ , 使得对于  $u \in (0, r_1]$  有  $f(u) \geq (f_0 - \varepsilon)u$  成立. 于是当  $u \in P$  且  $\|u\| = r_1$  时,有:

$$\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} G(t, s) \frac{1}{(f_0 - \varepsilon)C_2} (f_0 - \varepsilon) u(s) ds \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \gamma M(s) \frac{1}{C_2} \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} u(s) ds \geq \gamma^2 \|u\| \frac{1}{C_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} M(s) ds = \|u\|.$$

取  $\Omega_1 = \{u | u \in E, \|u\| < r_1\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_1$  时有  $\|Au\| \geq \|u\|$  成立.

再由  $F_\infty$  的定义知,存在  $r_3 > 0$ , 使得对于  $u \in [r_3, +\infty)$  有  $f(u) \leq (F_\infty + \varepsilon)u$  成立. 取  $r_2 = \max\{2r_1, r_3\}$ , 于是当  $u \in P$  且  $\|u\| = r_2$  时有:

$$\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \leq \int_0^1 M(s) \frac{1}{(F_\infty + \varepsilon)C_1} (F_\infty + \varepsilon) u(s) ds \leq$$

$$\frac{1}{C_1} \|u\| \int_0^1 M(s) ds = \|u\|.$$

取  $\Omega_2 = \{u | u \in E, \|u\| < r_2\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_2$  时有  $\|Au\| \leq \|u\|$  成立.

由以上讨论可知, 引理 4 中的条件  $(A_2)$  成立, 所以算子  $A$  在  $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$  上至少存在 1 个不动点  $u^*$ , 使得  $Au^* = u^*$ , 由此知边值问题(1) 和(2) 至少存在 1 个正解, 证毕.

**定理 3** 假设存在  $r_2 > r_1 > 0$ , 使得  $\max_{0 \leq u \leq r_2} f(u) \leq \frac{r_2}{\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_1}$  和  $\min_{\gamma r_1 \leq u \leq r_1} f(u) \geq \frac{r_1}{\min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_2}$  成立, 则边值问题(1) 和(2) 至少有 1 个正解  $u$ ,  $u \in P$  且  $r_1 \leq \|u\| \leq r_2$ .

**证明** 当  $u \in P$  且  $\|u\| = r_1$  时, 有:

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \min_{\eta_1 \leq t \leq \eta_2} G(t, s) \min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) f(u(s)) ds \geq \\ &\gamma \min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) \int_{\eta_1}^{\eta_2} M(s) \min_{\gamma r_1 \leq u \leq r_1} f(u(s)) ds \geq \gamma^2 \min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) \frac{r_1}{\min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} M(s) ds = r_1 = \|u\|. \end{aligned}$$

取  $\Omega_1 = \{u | u \in E, \|u\| < r_1\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_1$  时有  $\|Au\| \geq \|u\|$  成立.

当  $u \in P$  且  $\|u\| = r_2$  时, 有:

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) \int_0^1 M(s) \max_{0 \leq u \leq r_2} f(u(s)) ds \leq \\ &\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) \frac{r_2}{\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_1} \int_0^1 M(s) ds = r_2 = \|u\|. \end{aligned}$$

取  $\Omega_2 = \{u | u \in E, \|u\| < r_2\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_2$  时有  $\|Au\| \leq \|u\|$  成立.

由以上讨论可知, 引理 4 中的条件  $(A_2)$  成立, 所以算子  $A$  在  $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$  上至少存在 1 个不动点  $u^*$ , 使得  $Au^* = u^*$ . 由此可知边值问题(1) 和(2) 至少存在 1 个正解  $u^*$  满足  $r_1 \leq \|u^*\| \leq r_2$ , 证毕.

在定理 4 之前先给出条件(B):  $\sup_{r > 0} \min_{u \in (\gamma r, r)} f(u) > 0$ , 并定义  $\lambda_1 = \sup_{r > 0} \frac{r}{C_1 \max_{0 \leq u \leq r} f(u)}$ . 由此易知有  $0 < \lambda_1 \leq +\infty$  成立.

**定理 4** 若条件(B) 成立, 且  $f_0 = +\infty$ ,  $f_\infty = +\infty$ ,  $\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) < \lambda_1$ , 则边值问题(1) 和(2) 至少有 2 个正解.

**证明** 定义  $a(r) = \frac{r}{C_1 \max_{0 \leq u \leq r} f(u)}$ , 于是由  $f(u)$  的连续性和  $f_0 = +\infty$ ,  $f_\infty = +\infty$  可知,  $a(r): (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  是连续的, 并且满足  $\lim_{r \rightarrow 0} a(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} a(r) = 0$ . 因此存在  $r_0 \in (0, +\infty)$ , 并使得  $a(r_0) = \sup_{r > 0} a(r) = \lambda_1$ . 由于  $\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) < \lambda_1$ , 因此存在  $c_1$  和  $c_2$  ( $0 < c_1 < r_0 < c_2 < +\infty$ ), 并使得  $a(c_1) = a(c_2) = \max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s)$ , 即:

$$f(u) \leq \frac{c_1}{\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_1}, u \in [0, c_1]; \quad (8)$$

$$f(u) \leq \frac{c_2}{\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_1}, u \in [0, c_2]. \quad (9)$$

此外, 由  $f_0$  和  $f_\infty$  的定义易知存在  $d_1$  和  $d_2$  ( $0 < d_1 < c_1 < r_0 < c_2 < d_2 < +\infty$ ), 使得  $\frac{f(u)}{u} \geq$

$\frac{1}{\gamma C_2 \min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s)}, u \in (0, d_1) \cup (\gamma d_2, +\infty)$  成立. 于是有:

$$\min_{\gamma d_1 \leq u \leq d_1} f(u) \geq \frac{d_1}{\min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_2}; \quad (10)$$

$$\min_{\gamma d_2 \leq u \leq d_2} f(u) \geq \frac{d_2}{\min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_2}. \quad (11)$$

由式(8)易得  $\max_{0 \leq u \leq c_1} f(u) \leq \frac{c_1}{\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_1}$ . 于是再根据定理3的结论和式(10)可得边值问题(1)和(2)

至少存在1个不动点  $u^*$ , 并且满足  $d_1 \leq \|u^*\| \leq c_1$ . 此外, 由式(9)易得:

$$\max_{0 \leq u \leq c_2} f(u) \leq \frac{c_2}{\max_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_1}. \quad (12)$$

下面利用式(11)和式(12)证明边值问题(1)和(2)存在第2个不动点  $u^{**}$ , 且满足  $c_2 \leq \|u^{**}\| \leq d_2$ . 事实上, 当  $u \in P$  和  $\|u\| = c_2$  时, 有:

$$\|Au\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \leq \int_0^1 M(s) \frac{c_2}{C_1 \max_{0 \leq u \leq c_2} f(u)} \max_{0 \leq u \leq c_2} f(u) ds = c_2 = \|u\|.$$

取  $\Omega_1 = \{u | u \in E, \|u\| < c_2\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_1$  时有  $\|Au\| \leq \|u\|$  成立.

当  $u \in P$  和  $\|u\| = d_2$  时, 有:

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G(t, s) \mu(s) f(u(s)) ds \right| \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \gamma M(s) \min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) \frac{d_2}{\min_{0 \leq s \leq 1} \mu(s) C_2} ds \geq \\ &\gamma^2 \frac{d_2}{C_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} M(s) ds = d_2 = \|u\|. \end{aligned}$$

取  $\Omega_2 = \{u | u \in E, \|u\| < d_2\}$ , 于是当  $u \in P \cap \partial\Omega_2$  时有  $\|Au\| \geq \|u\|$  成立.

由以上讨论可知, 引理4中的条件(A<sub>1</sub>)成立, 所以算子A在  $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$  上至少存在1个不动点  $u^{**}$ , 使得  $Au^{**} = u^{**}$ . 由此可知边值问题(1)和(2)在  $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$  上至少存在1个正解  $u^{**}$ , 且满足  $c_2 \leq \|u^{**}\| \leq d_2$ . 综合上述讨论可知, 边值问题(1)和(2)至少存在2个正解  $u^*$  和  $u^{**}$ , 且满足  $d_1 \leq \|u^*\| \leq c_1$ ,  $c_2 \leq \|u^{**}\| \leq d_2$ . 证毕.

## 参考文献:

- [1] XPL A, HFA B, EAA B, et al. Application of piecewise fractional differential equation to COVID-19 infection dynamics[J]. Results in Physics, 2022, 2022(39): 1-12.
- [2] BASKONU H M, BULUT H. On the numerical solutions of some fractional ordinary differential equations by fractional Adams-Bashforth-Moulton method[J]. Open Mathematics, 2015, 13(1): 547-556.
- [3] IBRAHIM R W. Stability for univalent solutions of complex fractional differential equations[J]. Proceedings of the Pakistan Academy of Sciences, 2012, 49(3): 227-232.
- [4] BHRAWY A H, THARWAT M M, YILDIRIM A. A new formula for fractional integrals of Chebyshev polynomials: Application for solving multi-term fractional differential equations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4245-4252.
- [5] ABU-ARQUB O, LEWIS R W, ZEIDAN D. Numerical solutions for the Robin time-fractional partial differential equations of heat and fluid flows based on the reproducing kernel algorithm[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 2018, 28(4): 828-856.
- [6] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016: 28-35.
- [7] ZHANG S. Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations[J]. Electron Journal of Differential Equations, 2006, 2006(36): 1-12.
- [8] ZHAO Y, SUN S, HAN Z, et al. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(16): 6950-6958.
- [9] 甘亦苗, 侯成敏. 一类 Hilfer 型分数阶微分方程解的存在和唯一性[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2020, 46(2): 95-100.