

文章编号: 1004-4353(2022)02-0179-07

# 一种新型可变增益高阶滑模跟踪微分器

赵左平, 于靖东, 金山海

( 延边大学 工学院, 吉林 延吉 133002 )

**摘要:** 针对传统高阶滑模跟踪微分器产生的超调较大和噪声抑制能力较差的问题, 提出一种新型可变增益高阶滑模跟踪微分器. 该微分器通过改进传统高阶滑模跟踪微分器的结构, 以此减少响应阶段的超调; 通过引入 Sigmoid 变增益函数使增益能够根据跟踪误差的大小进行自动改变, 以此平衡响应速度与滤波效果. 数值仿真结果表明, 该新型可变增益高阶滑模跟踪微分器所产生的超调不仅小于传统高阶滑模跟踪微分器所产生的超调, 而且其滤波效果在不降低响应速度的前提下也显著优于传统高阶滑模跟踪微分器. 因此, 该新型微分器在提高含噪声信号高阶导数的估计精度方面具有良好的应用前景.

**关键词:** 滑模跟踪微分器; 超调; 噪声抑制; 可变增益; 高阶导数

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

## A new high-order sliding mode tracking differentiator with variable gain

ZHAO Zuoping, YU Jingdong, JIN Shanhai

( College of Engineering, Yanbian University, Yanji 133002, China )

**Abstract:** Aiming at the problems that the traditional high-order sliding mode tracking differentiator has significant overshoot and the noise suppression ability is poor, a new variable gain high-order sliding mode tracking differentiator is proposed. The proposed differentiator improves the structure of the traditional high-order sliding mode tracking differentiator to reduce the overshoot in the response stage. By introducing the Sigmoid variable gain function, the gain can be automatically changed to the size of the tracking error, so as to balance the response speed and the filtering performance. Numerical simulation results show that the overshoot produced by the new variable gain high-order sliding mode tracking differentiator proposed in this paper is not only smaller than the overshoot produced by the traditional high-order sliding mode tracking differentiator, but its filtering performance is also significantly better than the traditional high-order sliding mode tracking differentiator without reducing the response speed. Therefore, the new differentiator has a good application prospect for improving the estimation accuracy of high-order derivatives of noisy signals.

**Keywords:** sliding mode tracking differentiator; overshoot; noise suppression; variable gain; derivativer of higher order

## 0 引言

在反馈控制系统中, 反馈回路通常由输入信号及其导数构成. 但由于受环境干扰和传感器精度等的

收稿日期: 2021-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(61963035); 吉林省教育厅科学技术研究项目(JJKH20210569KJ)

第一作者: 赵左平(1995—), 男, 硕士研究生, 研究方向为滑模跟踪微分器.

通信作者: 金山海(1982—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为滑模控制、外骨骼机器人.

影响,反馈回路中的输入信号易含有噪声,进而会降低系统的控制性能;因此,滤除输入信号中的噪声并正确估计其导数对系统控制具有重要意义.目前,数字滤波技术已被广泛应用于数字控制系统中,其中线性滤波器因具有结构简单的优点受到学者们的关注;但线性滤波器在强降噪的情况下会产生较大的相位滞后,进而会降低控制系统的稳定性.针对线性滤波器所存在的缺陷,一些学者对非线性滤波器进行了研究.1994年,韩京清等<sup>[1]</sup>提出了一类具有抛物线滑模面的2阶滑模跟踪微分器(TD-[1]),由于该滤波器的滤波效果显著优于线性滤波器,因此目前被广泛应用于各类控制系统中<sup>[2-4]</sup>.但TD-[1]存在易产生超调的缺陷,对此Jin等<sup>[5]</sup>对TD-[1]进行了改进并提出了TD-[5],该方法可有效对超调进行抑制.Lü等<sup>[6]</sup>在TD-[5]的基础上提出了一种快速收敛的2阶滑模跟踪微分器(TD-[6]),TD-[6]可在不影响滤波效果的前提下提高系统状态的收敛速度.由于上述微分器都只能估计输入信号及其1阶导数,而无法估计输入信号的高阶导数,因此Levant<sup>[7]</sup>研究了另一类能估计输入信号高阶导数的高阶滑模跟踪微分器(TD-[7]).TD-[7]虽具有高鲁棒性、高精确性等优点<sup>[8-10]</sup>,但其在响应阶段会产生较大超调,且在强噪声情况下无法平衡滤波效果和跟踪速度之间的权衡.为此,本文对TD-[7]进行改进,提出一种新型可变增益高阶滑模跟踪微分器,并对其性能进行了研究.

## 1 高阶滑模跟踪微分器

TD-[7]的连续时间表达式为:

$$\dot{w}_1(t) = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + w_2(t), \quad (1a)$$

...

$$\dot{w}_{n_f-1}(t) = -\lambda_{n_d+2} L^{\frac{n_f-1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d+2}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + w_{n_f}(t), \quad (1b)$$

$$\dot{w}_{n_f}(t) = -\lambda_{n_d+1} L^{\frac{n_f}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d+1}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + z_0(t) - u(t), \quad (1c)$$

$$\dot{z}_0(t) = -\lambda_{n_d} L^{\frac{n_f+1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + z_1(t), \quad (1d)$$

...

$$\dot{z}_{n_d-1}(t) = -\lambda_1 L^{\frac{k}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{1}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + z_{n_d}(t), \quad (1e)$$

$$\dot{z}_{n_d}(t) = -\lambda_0 L |w_1(t)|^0 \text{sgn}(w_1(t)). \quad (1f)$$

其中:  $n_f=1,2,3,\dots$ ;  $n_d=0,1,2,3,\dots$ ;  $k=1,2,3,\dots$ ;  $n_f+n_d=k$ ;  $u(t)$ 为输入信号;  $z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n_d}(t)$ 为输入信号  $u(t)$ 的  $n_d$ 阶导数估计;  $w_1(t), w_2(t), \dots, w_{n_f}(t)$ 为辅助变量;  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$ 是一组递归数列;  $L > 0$ 为系统增益; 符号函数  $\text{sgn}()$ 的表达式为:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0; \\ 0, & \text{if } x = 0; \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

图1为1阶TD-[7]在含噪声阶跃输入信号时的响应结果.由图1可以看出,系统增益  $L$ 取任何值时都会产生超调.另外,增大  $L$ 值虽然可加快系统的收敛速度,但同时会降低滤波效果,因此需要平衡系统的响应速度与滤波效果.

## 2 新型高阶滑模跟踪微分器

### 2.1 改进型高阶滑模跟踪微分器

本文提出的改进型高阶滑模跟踪微分器(TD-M)的连续时间表达式为:

$$\dot{w}_1(t) = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + w_2(t), \quad (3a)$$

...

$$\dot{w}_{n_f-1}(t) = -\lambda_{n_d+2} L^{\frac{n_f-1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d+2}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + w_{n_f}(t), \quad (3b)$$

$$\dot{w}_{n_f}(t) = -\lambda_{n_d+1} L^{\frac{n_f}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d+1}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + z_0(t) - u(t), \quad (3c)$$

$$\dot{z}_0(t) = \beta(-\lambda_{n_d} L^{\frac{n_f+1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + z_1(t)), \quad (3d)$$

...

$$\dot{z}_{n_d-1}(t) = \beta(-\lambda_1 L^{\frac{k}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{1}{k+1}} \text{sgn}(w_1(t)) + z_{n_d}(t)), \quad (3e)$$

$$\dot{z}_{n_d}(t) = \beta(-\lambda_0 L |w_1(t)|^0 \text{sgn}(w_1(t))), \quad (3f)$$

其中  $0 < \beta \leq 1$ .

图2为1阶TD-[7] ( $L=100$ )和1阶TD-M ( $L=375, \beta=0.5$ )在无噪声阶跃输入信号时的响应结果. 图2中,为了使TD-[7]和TD-M的收敛速度相同,本文增加了TD-M的增益取值. 由图2可以看出,在 $t_1$ 时刻之前,  $z_0(t) - u(t)$ 的符号未发生改变,因此 $w_1(t)$ 始终朝一个方向进行累积;在 $t_1$ 时刻之后,  $z_0(t) - u(t)$ 的符号发生改变,且此时 $w_1(t)$ 已经累积了一定数值,因此 $w_1(t)$ 的符号在 $t_2$ 时刻才能发生改变并需要一定的时间才能收敛到0. 由以上可知,TD-[7]和TD-M都会产生超调,但由于TD-M的各阶系统状态都增加了 $\beta$ 项,因此 $w_1(t)$ 的改变点相比TD-[7]出现得更早,且收敛到0的速度更快,即TD-M在系统响应阶段所产生的超调小于TD-[7].

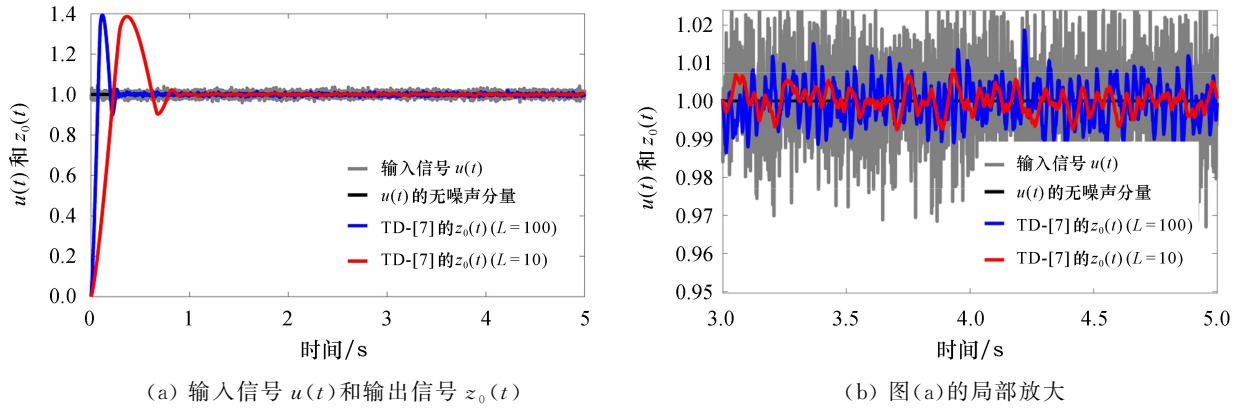


图1 TD-[7]在含噪声阶跃输入信号时的响应结果

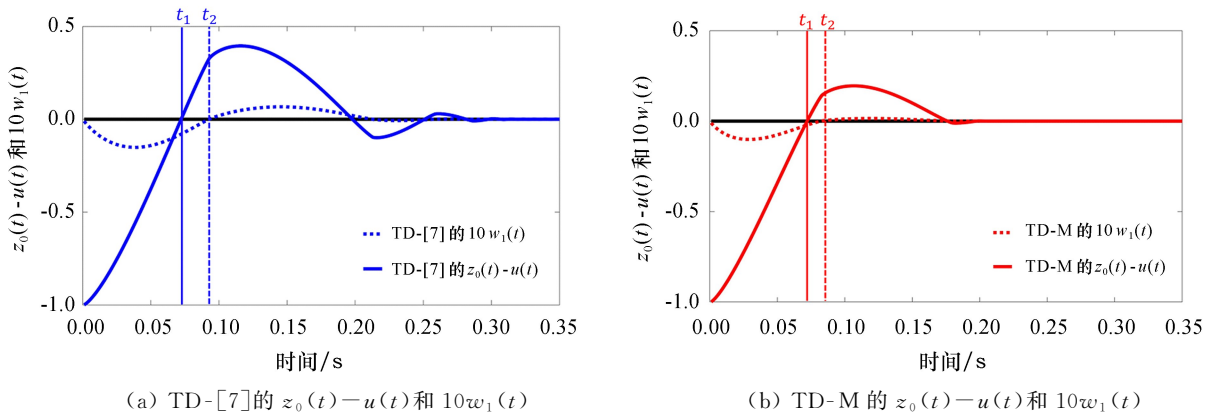


图2 1阶TD-[7]和1阶TD-M在无噪声阶跃输入信号时的响应结果

图 3 为 1 阶 TD-M 在无噪声阶跃输入信号下取不同  $\beta$  值的响应结果. 由图 3 可以看出, 增益  $L$  值不变时系统的收敛速度和超调均随  $\beta$  值的减小而减小.

图 4 为 1 阶 TD-[7] ( $L=100$ ) 和 1 阶 TD-M ( $L=375, \beta=0.5$ ) 在含噪声阶跃输入信号时的响应结果. 由图 4 可见, 二者在响应速度相近时 TD-M 产生的超调小于 TD-[7], 但在稳态阶段下二者的滤波效果相似.

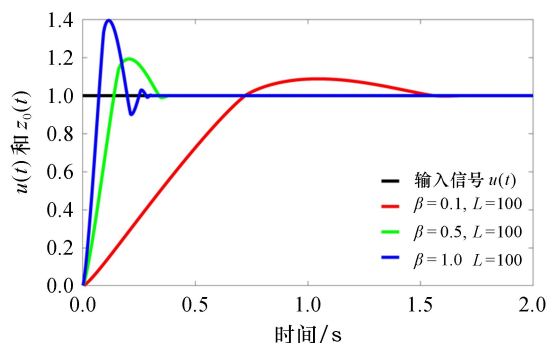


图 3 1 阶 TD-M 在无噪声阶跃输入信号下  $\beta$  取不同值时的响应结果

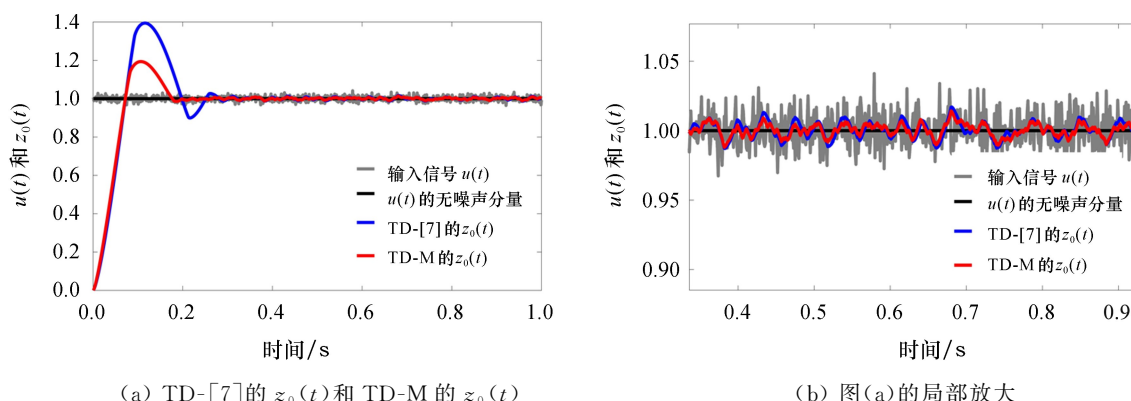


图 4 1 阶 TD-[7] 和 1 阶 TD-M 在含噪声阶跃输入信号时的响应结果

## 2.2 可变增益高阶滑模跟踪微分器

为了进一步提升 TD-M 的噪声抑制能力, 本文提出了一种可变增益高阶滑模跟踪微分器 (TD-N), 即用 Sigmoid 变增益函数代替常数增益  $L$  对系统的跟踪性能进行调整. 利用该方法可使系统在跟踪误差较大时, 能够通过增大增益来提高收敛速度, 而在跟踪误差较小时能够通过减小增益来提高滤波效果. TD-N 的连续时间表达式为:

$$\dot{w}_1(t) = -\lambda_k G(t)^{\frac{1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{k}{k+1}} \operatorname{sgn}(w_1(t)) + w_2(t), \quad (4a)$$

...

$$\dot{w}_{n_f-1}(t) = -\lambda_{n_d+2} G(t)^{\frac{n_f-1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d+2}{k+1}} \operatorname{sgn}(w_1(t)) + w_{n_f}(t), \quad (4b)$$

$$\dot{w}_{n_f}(t) = -\lambda_{n_d+1} G(t)^{\frac{n_f}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d+1}{k+1}} \operatorname{sgn}(w_1(t)) + z_0(t) - u(t), \quad (4c)$$

$$\dot{z}_0(t) = \beta (-\lambda_{n_d} G(t)^{\frac{n_f+1}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{n_d}{k+1}} \operatorname{sgn}(w_1(t)) + z_1(t)), \quad (4d)$$

...

$$\dot{z}_{n_d-1}(t) = \beta (-\lambda_1 G(t)^{\frac{k}{k+1}} |w_1(t)|^{\frac{1}{k+1}} \operatorname{sgn}(w_1(t)) + z_{n_d}(t)), \quad (4e)$$

$$\dot{z}_{n_d}(t) = \beta (-\lambda_0 G(t) |w_1(t)|^0 \operatorname{sgn}(w_1(t))). \quad (4f)$$

其中:  $G(t)$  为 Sigmoid 变增益函数,  $G(t) = \frac{R}{1 + \exp(-a(e(t) - b))}$ ;  $e(t) = |z_0(t) - u(t)|$ ;  $a, b, R > 0$ .

图 5 为参数  $a$  和  $b$  取不同值时 Sigmoid 变增益函数的变化曲线. 由图 5 可以看出, 通过调节参数  $a$  可改变 Sigmoid 变增益函数的斜率, 通过调节参数  $b$  可改变 Sigmoid 变增益函数的下限.

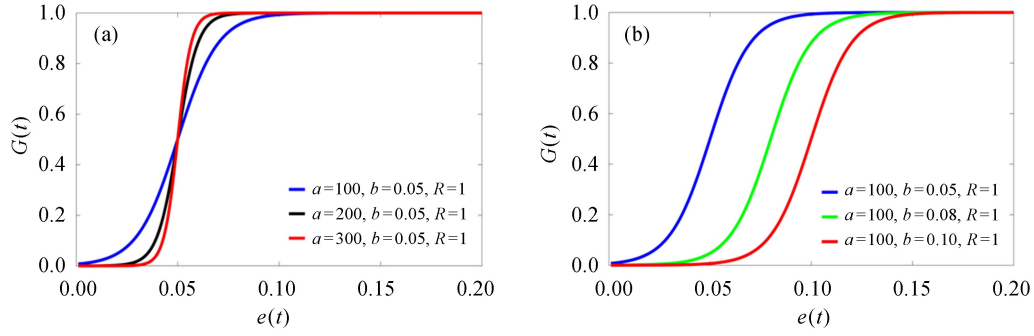
图5 参数  $a$  和  $b$  取不同值时 Sigmoid 变增益函数的曲线变化

图6为TD-N在无噪声阶跃输入信号时的响应结果.从图可以看出,当跟踪误差较大时,系统处于响应阶段.此时函数  $G(t)$  的值无限趋近于上限,从而可加快系统的状态收敛.而当系统趋于稳态和跟踪误差较小时,函数  $G(t)$  的值趋于下限,从而可提高滤波效果.

### 3 仿真验证

本文采用如下三角波、方波及变频正弦波输入信号对TD-N的有效性进行验证:

$$u(t) = a \sin\left(\left|\sin\left(\frac{t+0.5\pi}{3}\right)\right| - \frac{\pi}{2}\right) + 0.02\delta(t); \quad (5)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1+0.02\delta(t), & \text{if } t < 6, \\ 0+0.02\delta(t), & \text{if } 6 \leq t < 8, \\ 1+0.02\delta(t), & \text{if } 8 \leq t < 20; \end{cases} \quad (6)$$

$$u(t) = \begin{cases} \cos(0.5t) + 0.02\delta(t), & \text{if } t < 10, \\ \cos(2t+1) + 0.02\delta(t), & \text{if } 10 \leq t < 20. \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\delta(t) \sim N(0,1)$  是均值为零的单位高斯白噪声. TD-[7]和TD-N的参数取值见表1,仿真采样周期取  $T=0.001$  s.此外,由于TD-[7]的连续时间表达式(1)和TD-N的连续时间表达式(4)无法在数字处理器中直接运行,因此采用前进欧拉离散法对其进行离散化后再在数字处理器中进行运行<sup>[12]</sup>.

表1 TD-[7]和TD-N的参数取值

不同滑模跟踪微分器	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$L$	$\beta$	$a$	$b$	$R$
1阶TD-[7]	1.10	2.12	2.00			100				
1阶TD-N	1.10	2.12	2.00				0.50	100	0.05	400
2阶TD-[7]	1.10	4.57	9.30	10.03	5.00	100				
2阶TD-N	1.10	4.57	9.30	10.03	5.00		0.50	100	0.05	700

使用以下两个评估函数定量评估系统的滤波效果和超调量:

$$AE = \frac{1}{6-5} \int_5^6 |u_s(t) - z_0(t)| dt, \quad MO = \max_{t \in [0,2]} (|z_0(t)| - |u_s(t)|).$$

式中:  $AE$  是平均误差,  $u_s(t)$  为输入信号的无噪声分量,  $MO$  是最大超调量.

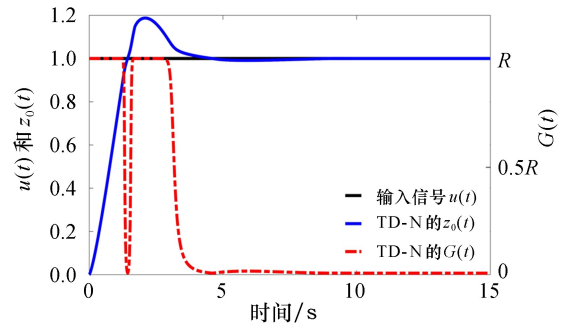


图6 TD-N在无噪声阶跃输入信号时的响应结果

图 7—图 15 分别为 TD-[7]、TD-N 在输入信号为式(5)—(7) 时的性能. 由图可以看出, 在该 3 种输入信号下, TD-N 和 TD-[7] 的收敛速度虽然接近, 但 TD-N 的最大超调量明显小于 TD-[7]. 此外, 在稳态阶段 TD-N 的滤波性能也显著优于 TD-[7]. 由此可知, 在不影响收敛速度的前提下 TD-N 的超调抑制能力和噪声滤除能力均优于 TD-[7].

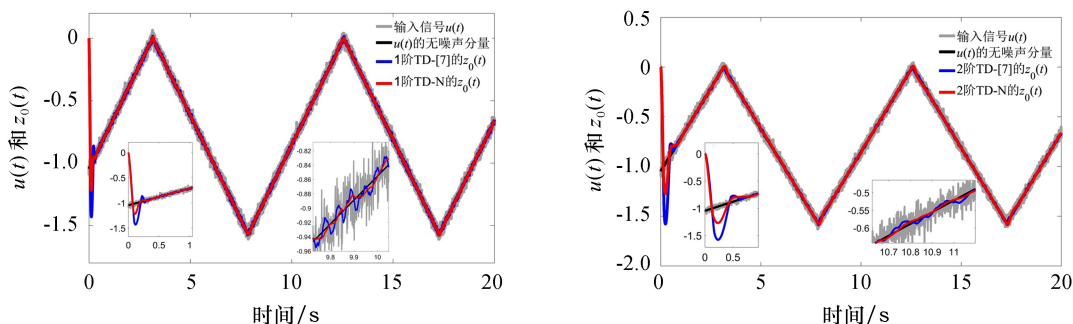


图 7 输入信号为式(5) 时 TD-[7] 和 TD-N 的响应结果

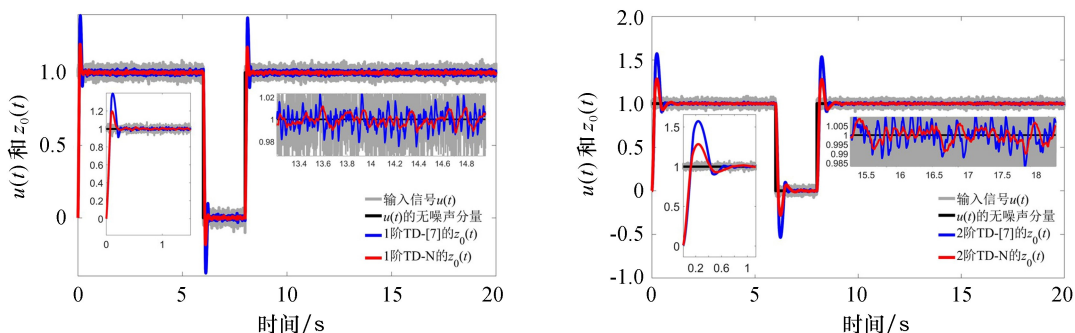


图 8 输入信号为式(6) 时 TD-[7] 和 TD-N 的响应结果

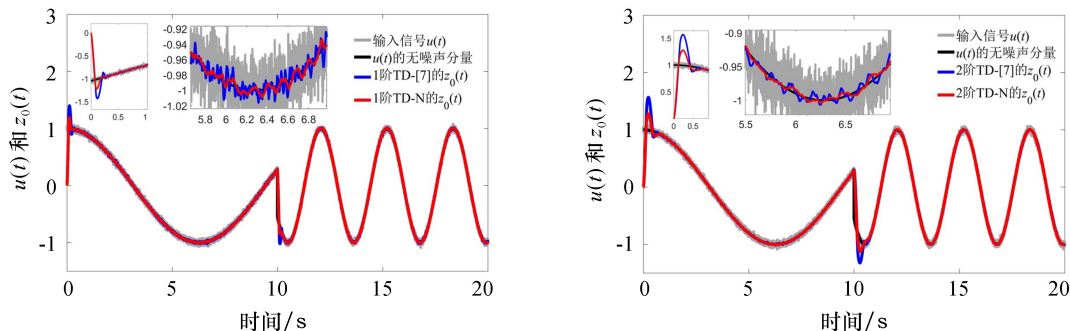


图 9 输入信号为式(7) 时 TD-[7] 和 TD-N 的响应结果

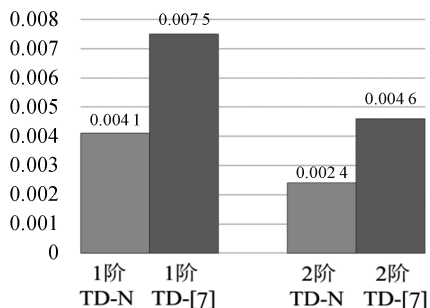


图 10 输入信号为式(5) 时 TD-[7] 和 TD-N 的平均误差

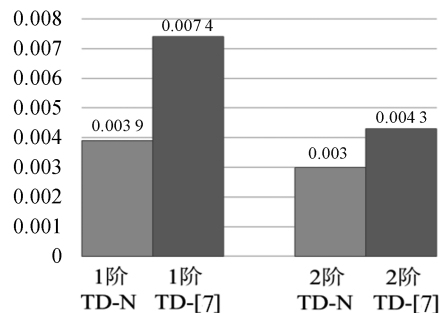


图 11 输入信号为式(6) 时 TD-[7] 和 TD-N 的平均误差



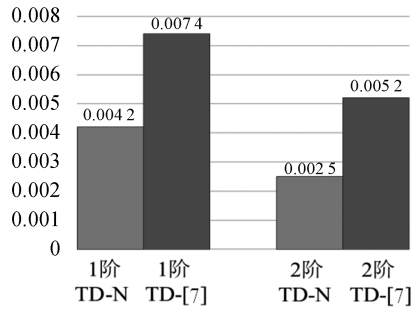


图 12 输入信号为式(7)时 TD-[7] 和 TD-N 的平均误差

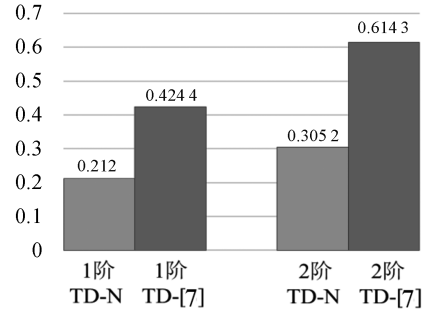


图 13 输入信号为式(5)时 TD-[7] 和 TD-N 的最大超调量

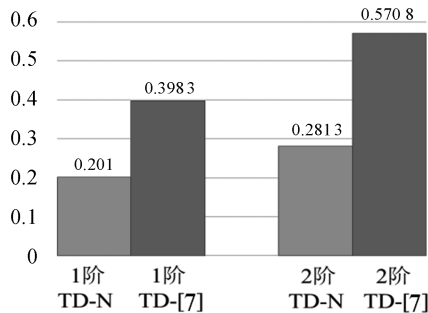


图 14 输入信号为式(6)时 TD-[7] 和 TD-N 的最大超调量

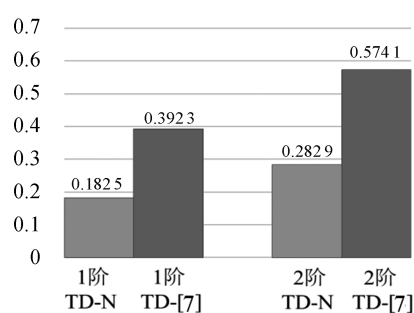


图 15 输入信号为式(7)时 TD-[7] 和 TD-N 的最大超调量

## 4 结论

研究表明,本文提出的新型可变增益高阶滑模跟踪微分器(TD-N)产生的超调不仅小于 TD-[7],而且在不影响收敛速度的前提下可有效提高滤波效果;因此,TD-N 的性能显著优于 TD-[7],并有望在强噪声和宽输入信号频率的环境下得到应用. 本文在研究中仅对 TD-N 的部分参数进行了分析,因此在今后的工作中我们将进一步研究其他参数对 TD-N 的性能的影响,以得到更好的 TD-N.

## 参考文献:

- [1] 韩京清,王伟. 非线性跟踪:微分器[J]. 系统科学与数学,1994,14(2):177-183.
- [2] 甄红涛,齐晓慧,夏明旗,等. 四旋翼无人机鲁棒自适应姿态控制[J]. 控制工程,2013,20(5):915-919.
- [3] 谢惠藩,张尧,林凌雪,等. 基于时间最优和自抗扰跟踪的广域紧急直流功率支援控制[J]. 电工技术学报,2010,25(8):145-153.
- [4] 杨尧,王民钢,闫杰,等. 一种数字电动舵机的非线性 PID 控制算法研究[J]. 西北工业大学学报,2010,28(3):323-326.
- [5] JIN S, KIKUUWE R, YAMAMOTO M, et al. Real-time quadratic sliding mode filter for removing noise[J]. Advanced Robotics, 2012,26(8/9):877-896.
- [6] LÜ Z, JIN S, XIONG X, et al. A new quick-response sliding mode tracking differentiator with its chattering-free discrete-time implementation[J]. IEEE Access, 2019,7:130236-130245.
- [7] LEVANT A. Filtering differentiators and observers[C]//2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). Graz: IEEE, 2018:174-179.
- [8] LEVANT A. Homogeneous filtering and differentiation based on sliding modes[C]//2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC). Nice: IEEE, 2019:6013-6018.
- [9] LEVANT A, LIVNE M. Robust exact filtering differentiators[J]. European Journal of Control, 2020,55:33-44.
- [10] JBARA A, LEVANT A, HANAN A, et al. Filtering homogeneous observers in control of integrator chains[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021,31(9):3658-3685.
- [11] RAMEZANI-AL M R, SERESHKI Z T. A novel adaptive sliding mode controller design for tracking problem of an AUV in the horizontal plane[J]. International Journal of Dynamics and Control, 2019,7(2):679-689.