

文章编号: 1004-4353(2022)02-0118-06

一类具有附加食物的 Leslic-Gower 捕食者-食饵模型的定性分析

吴罗义

(武夷学院 数学与计算机学院, 福建 武夷山 354300)

摘要: 研究了一类具有附加食物的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型平衡点的局部与全局渐近稳定性及其非双曲平衡点的分支行为, 并利用数值模拟验证了所得结论的正确性. 该研究结果可为应用额外食物进行生物防治提供参考.

关键词: 捕食者-食饵模型; 附加食物; 稳定性; 跨临界分支

中图分类号: O175

文献标识码: A

Qualitative analysis of a Leslic-Gower type predator-prey model with additional food

WU Luoyi

(School of Mathematics and Computer, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

Abstract: The locally and globally asymptotic stability of equilibria and bifurcation behavior of non-hyperbolic equilibria are studied in a class of Leslie-Gower type predator-prey model with additional food. The numerical simulation is given to show the validity of the obtained conditions. The results can provide a reference for the design of biological control methods to use additional food.

Keywords: predator-prey model; additional food; stability; transcritical bifurcation

0 引言

捕食者-食饵系统是生物数学研究的重要对象之一. 从捕食者的生长函数与捕食函数关系考虑, 可将相应的捕食者-食饵模型分为两类: 一类是捕食者的生长函数与捕食函数一致, 如经典的 Gause 型模型^[1]; 另一类是捕食者的生长函数与捕食函数不同, 如 Leslie-Gower 模型^[2]:

$$\begin{cases} \dot{u} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - kuv, \\ \dot{v} = nv \left(1 - \frac{v}{hu}\right), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别为食饵和捕食者的密度, 其他参数为正常数(生物意义参考文献[2]). Hsu 等^[3]研究表明, 模型(1)的唯一正平衡在所有生物学允许的参数内是渐近稳定的. 为了研究不同捕食功能函数以及物种在较大范围内的空间移动对模型(1)的影响, 一些学者对模型(1)进行了改进. 例如: Huang^[4]等提出了一类具有广义 Holling III 功能反应的 Leslie 模型, 并证明了该模型在两个退化平衡

收稿日期: 2022-04-23

基金项目: 福建省自然科学基金(2021J011148)

作者简介: 吴罗义(1978—), 男, 硕士, 讲师, 研究方向为生物数学.

点处分别经历了亚临界 Hopf 分支和 Bogdanov-Takens 分支;张丽娜等^[5]提出了一类修正的 Leslie-Gower 捕食者-食饵扩散模型,并研究了该模型正平衡点的全局渐近稳定性;鲁引儿等^[6]研究了一类具有非线性收获的 Leslie-Gower 捕食者-食饵扩散模型,并讨论了其 Hopf 分支的存在性.

在模型(1)中,如果食饵是害虫,则害虫是不可能被消灭的(模型(1)不存在食饵灭绝的平衡点).研究表明,给捕食者提供额外食物可使模型产生食饵灭绝的平衡点.例如:Basheer 等^[7]在 Holling-Tanner 模型的基础上建立了一类提供额外食物的 Holling-Tanner 模型,并研究了附加食物对食饵种群的影响.本文根据文献[7]的建模机理,在假定捕食者对食饵与附加食物的选择无偏好的基础上,将模型(1)改进为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{u} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{k}{1+\beta} uv, \\ \dot{v} = nv \left(1 + \frac{\beta - v}{\beta + hu}\right). \end{cases} \quad (2)$$

其中, β 为额外提供给捕食者的食物量, $\beta/(\beta + hu)$ 表示因提供额外食物而提高的捕食者的出生率.为简化计算,将模型(2)的参数(除 β 外)进行缩放.对 β 未进行缩放的原因是为了突出额外食物量对模型的影响.令 $\bar{u} = u/K$, $\bar{v} = nv/(rhK)$, $\bar{t} = rt$, $\bar{k} = hkK/n$, $\bar{n} = n/r$, $\bar{m} = 1/(hK)$,并将 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{t} 、 \bar{k} 、 \bar{n} 、 \bar{m} 等变量记为 u 、 v 、 t 、 k 、 n 、 m ,则模型(2)可改写为:

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - u) - \frac{k}{1+\beta} uv, \\ \dot{v} = v \left(n + \frac{nm\beta - v}{m\beta + u}\right). \end{cases} \quad (3)$$

本文将研究模型(3)的局部与全局渐近稳定性,以及非双曲平衡点在适当参数扰动下所产生的分支等动力学行为.

1 平衡点的局部稳定性

对模型(3)进行计算可知,其存在边界平衡点 $E_0(0,0)$ 、 $E_1(1,0)$ 和 $E_2(0,2nm\beta)$,且当 $2knm > 1$ 和 $\beta < \frac{1}{2knm-1}$ 时,存在内部平衡点 $E_3(u^*, v^*)$,其中 $u^* = \frac{1+\beta-2knm\beta}{1+\beta+nk}$, $v^* = nu^* + 2nm\beta$.系统(3)在平衡点 $E = (\bar{u}, \bar{v})$ 处的雅克比矩阵为:

$$J(E) = \begin{pmatrix} 1 - 2\bar{u} - \frac{k\bar{v}}{1+\beta} & -\frac{k\bar{u}}{1+\beta} \\ -\frac{(nm\beta - \bar{v})\bar{v}}{(m\beta + \bar{u})^2} & n + \frac{nm\beta - 2\bar{v}}{m\beta + \bar{u}} \end{pmatrix}.$$

对 $J(E_0)$ 和 $J(E_1)$ 的特征值进行计算可知, $E_0(0,0)$ 是不稳定的结点, $E_1(1,0)$ 是鞍点.

定理 1 (i) 当 $\beta > \frac{1}{2knm-1} > 0$ 时, E_2 是稳定的结点;(ii) 当 $0 < \beta < \frac{1}{2knm-1}$ 时, E_2 是鞍点;(iii) 当 $\beta = \frac{1}{2knm-1} > 0$ 时, E_2 是鞍结点,且在第一卦象内 E_2 附近是吸引的.

证明 E_2 处的雅克比矩阵为 $J(E_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2knm\beta}{1+\beta} & 0 \\ \frac{2n^2}{2n^2} & -2n \end{pmatrix}$,其对应的特征值分别为 $\lambda_1 = 1 - \frac{2knm\beta}{1+\beta}$ 和 $\lambda_2 = -2n$,所以(i)与(ii)成立.当 $\beta = \frac{1}{2knm-1}$ 时, $\lambda_1 = 0$,因此 E_2 是一个退化的平衡点.利用线性变换($U = u$, $V = v - 2nm\beta$)将系统(3)的平衡点 $E_2(0, 2nm\beta)$ 移至原点后再在原点处作泰勒展开可得:

$$\begin{cases} \dot{U} = -U^2 - \frac{k}{1+\beta}UV, \\ \dot{V} = 2n^2U - 2nV - \frac{2n^2}{m\beta}U^2 + \frac{3n}{m\beta}UV - \frac{1}{m\beta}V^2 + o(|U, V|^2). \end{cases} \quad (4)$$

对式(4)作线性变换($U=x, V=nx+y$)可得:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\left(1 + \frac{kn}{1+\beta}\right)x^2 - \frac{k}{1+\beta}xy, \\ \dot{y} = -2ny + \left(\frac{kn^2}{1+\beta} + n\right)x^2 + \left(\frac{n}{m\beta} + \frac{kn}{1+\beta}\right)xy - \frac{1}{m\beta}y^2 + o(|x, y|^2). \end{cases} \quad (5)$$

由于式(5)存在局部中心流形,且其展式是从 x 的二次项开始的,于是结合式(5)的第1个方程知,中心流上的方程中其所含的 x^2 项与 y 无关,所以式(5)在中心流上的方程为 $\dot{x} = -\left(1 + \frac{2nk}{1+\beta}\right)x^2 + o(x^3)$.

因 $-\left(1 + \frac{kn}{1+\beta}\right) < 0$,所以 E_2 是鞍结点,且在第一卦象内 E_2 附近是吸引的.证毕.

定理 2 当 $0 < \beta < \frac{1}{2knm-1}$ 时, E_3 为稳定的结点或焦点.

证明 由平衡点的存在性可知,当 $0 < \beta < \frac{1}{2knm-1}$ 时,系统(3)存在内部平衡点 $E_3(u^*, v^*)$. E_3

$$\text{处的雅克比矩阵为 } J(E_3) = \begin{pmatrix} -u^* & -\frac{k}{1+\beta}u^* \\ \frac{nv^*}{m\beta+u^*} & -\frac{v^*}{m\beta+u^*} \end{pmatrix}, \text{ 且 } \text{Det}(E_3) = \frac{vu^*}{m\beta+u^*} + \frac{knu^*}{(1+\beta)(m\beta+u^*)} > 0,$$

$\text{Tr}(E_3) = -\left(u^* + \frac{v^*}{m\beta+u^*}\right) < 0$. 所以, E_3 是系统(3)的稳定结点或焦点.

注 1 从生物防控角度看,如果食饵是害虫类,则可以通过提供不超过 $\frac{1}{2knm-1}$ 的附加食物量使害虫呈指数数量减少,或将其消灭;如果物种需要共存,则可以通过提供超过 $\frac{1}{2knm-1}$ 的附加食物量使物种达到共存.

2 分支分析

由定理 1 知,对于任何参数 E_2 总是存在,且当 $\beta = \frac{1}{2knm-1}$ 时($\beta = \frac{1}{2knm-1}$ 是改变 E_2 稳定性的临界值), E_2 的雅克比矩阵有一个零特征根.由此可推测,当 $\beta = \frac{1}{2knm-1}$ 时,在 E_2 处可能产生跨临界分支.下面选取 $\beta_{TB} = \frac{1}{2knm-1}$ 为分支参数,以此探讨系统(3)是否存在跨临界分支.

定理 3 若 β 在 $\beta_{TB} = \frac{1}{2knm-1}$ 附近变化,则系统(3)在 E_2 附近经历跨临界分支.

证明 记 \mathbf{V} 和 \mathbf{W} 分别为 $J(E_2; \beta_{TB})$ 和 $J^T(E_2; \beta_{TB})$ 中的零特征根所对应的特征向量,即 $\mathbf{V} =$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ 记 } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-u) - \frac{k}{1+\beta}uv \\ v\left(n + \frac{nm\beta - v}{m\beta + u}\right) \end{pmatrix}, \text{ 对系统(3)的横截性条件及非退化条件}$$

进行验证可得:

$$\begin{aligned}
W^T F_\beta(E_2; \beta_{TB}) &= \frac{kuv}{(1+\beta)^2} \bigg|_{\substack{u=0 \\ v=2nm\beta \\ \beta=\beta_{TB}}} = 0, \\
W^T [DF_\beta(E_2; \beta_{TB})V] &= \\
(1,0) \left(\begin{array}{cc} \frac{kv}{(1+\beta)^2} & \frac{ku}{(1+\beta)^2} \\ \frac{nmv(m\beta+u)-2(nmu v + mv^2)}{(m\beta+u)^3} & \frac{nm^2\beta-2mv}{(m\beta+u)^2} \end{array} \right) \bigg|_{\substack{u=0 \\ v=2nm\beta \\ \beta=\beta_{TB}}} \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} &= \frac{2kmn-1}{2kmn} > 0, \\
W^T [D^2F(E_2; \beta_{TB})(V,V)] &= (1,0) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} V_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} V_1 V_2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} V_2^2 \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} V_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} V_1 V_2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} V_2^2 \end{array} \right)_{(E_2; \beta_{TB})} = \\
(1,0) \left(\begin{array}{c} -2 - \frac{2kn}{1+\beta} \\ \frac{2(nm\beta-v)v}{(m\beta+u)^3} - \frac{2n(nm\beta-2v)}{(m\beta+u)^2} - \frac{2n^2}{m\beta+u} \end{array} \right)_{(E_2; \beta_{TB})} &= -2 \left(1 + \frac{2kmn-1}{2m} \right) < 0.
\end{aligned}$$

于是由 Sotomayor 定理^[8]可知,系统在 $\beta=\beta_{TB}$ 处围绕 E_2 存在跨临界分支,即当参数 β 从 β_{TB} 的一端跨越到另一端时, E_2 的稳定性发生改变.

3 全局稳定性

引理 1 系统(3)是最终有界的,且 $\Omega = \{(u,v) | 0 < u \leq 1, 2nm\beta \leq v \leq 2n(m\beta+1)\}$ 是最终有界集.

证明 由食饵方程可得, $\dot{u} = u(1-u) - \frac{k}{1+\beta}uv \leq u(1-u)$.再根据常微分方程比较原理可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup u \leq 1$,即当 t 充分大时 $u \leq 1$ 成立.

由捕食者方程可得, $\dot{v} = v \left(n + \frac{nm\beta-v}{m\beta+u} \right) \leq \frac{v}{m\beta+1} (2n(m\beta+1)-v)$.再根据比较原理可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup v \leq 2n(m\beta+1)$,即当 t 充分大时 $v \leq 2n(m\beta+1)$ 成立.做垂直于 v 轴的直线($l=v-\bar{v}=0$, $0 < \bar{v} \leq 2mn\beta$),于是由系统(3)可得:

$$\frac{dl}{dt} \bigg|_{v=\bar{v}} = \frac{dx}{dt} \bigg|_{v=\bar{v}} = v \left(n + \frac{nm\beta-\bar{v}}{m\beta+u} \right) \geq v \left(n - \frac{nm\beta}{m\beta+u} \right) > 0.$$

上式说明当 $v \leq 2mn\beta$ 时,捕食者总是递增的,即当 t 充分大时 $v \geq 2mn\beta$.

定理 4 当 $\beta \geq \frac{1}{2kmn-1} > 0$ 时, E_2 在 \mathbf{R}_+^2 上全局渐进稳定.

证明 构造李亚普洛夫函数 $V(t)=u(t)$,于是由引理1可知,当 t 充分大后沿系统(3)轨线的导数为 $\dot{V}(t)=\dot{u}=u(1-u)-\frac{k}{1+\beta}uv < u \left(1 - \frac{k}{1+\beta}v \right) \leq u \left(1 - \frac{2kmn\beta}{1+\beta} \right) \leq 0$.由此可得, $u \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$).再由系统(3)的捕食者方程可知,当 $u \rightarrow 0$ 时捕食者的极限方程为 $\dot{v} = v \left(2n - \frac{v}{m\beta} \right)$.解该方程可得 $v \rightarrow 2nm\beta$ ($t \rightarrow +\infty$),于是由 Lasalle 不变原理可知 E_2 在 \mathbf{R}_+^2 上是全局渐进稳定的.

引理 2 系统(3)在 \mathbf{R}_+^2 上不存在闭轨.

证明 取 Dulac 函数 $B(u,v)=u^{\alpha-1}v^{\gamma-1}$,其中 α 和 γ 为待定常数,则有:

$$\frac{\partial(BF_1)}{\partial u} + \frac{\partial(BF_2)}{\partial v} = u^{\alpha-1}v^{\gamma-1} \left\{ \alpha + \gamma n - (\alpha+1)u - \frac{\alpha kv}{1+\beta} - \frac{(\gamma+1)v}{m\beta+u} + \frac{\gamma nm\beta}{m\beta+u} \right\}.$$

在上式中取 $\alpha = \gamma = 0$ 可得 $\frac{\partial(BF_1)}{\partial u} + \frac{\partial(BF_2)}{\partial v} = -u^{a-1}v^{r-1}\left(u + \frac{v}{m\beta + u}\right) < 0$, 于是由 Bendixson-Dulac 定理可知, 系统(3) 在 \mathbf{R}_+^2 上不存在闭轨.

定理 5 当 $0 < \beta < 1/(2kmn - 1)$ 时, E_3 在 \mathbf{R}_+^2 上全局渐进稳定.

证明 由平衡点的存在性及局部稳定性可知, 当 $0 < \beta < \frac{1}{2kmn - 1}$ 时, 系统(3) 存在平衡点 E_0 、 E_1 、 E_2 和 E_3 , 其中 E_0 是不稳定结点, E_1 和 E_2 是鞍点, E_3 是稳定焦点或结点. 再由引理 1 和引理 2 知, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时轨线必进入 E_3 , 因此 E_3 在 \mathbf{R}_+^2 上是全局渐进稳定的.

4 数值模拟

令 $n = m = k = 1$, 则由此可得 $\frac{1}{2knm - 1} = 1$, 于是系统(3) 可变为:

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1-u) - \frac{1}{1+\beta}uv, \\ \dot{v} = v\left(1 + \frac{\beta-v}{\beta+u}\right). \end{cases} \quad (6)$$

情形 1 取 $\beta = 1.5$, 则 $\beta > \frac{1}{2knm - 1}$, $E_2 = (0, 3)$. 由定理 1 和定理 4 可知, E_2 是全局渐进稳定的. 情形 1 的仿真结果如图 1 所示. 由图可以看出, E_2 是全局渐进稳定的, 该结果与定理 1 和定理 4 的结论一致.

情形 2 取 $\beta = 1.0$, 则 $\beta = \frac{1}{2knm - 1}$, $E_2 = (0, 2)$. 由定理 1 和定理 4 可知, E_2 是鞍结点, 且在第一卦象是吸引的, 即从第一卦象出发的轨线最终渐进稳定于 E_2 . 情形 2 的仿真结果如图 2 所示. 由图可以看出, E_2 为鞍结点, 且在 \mathbf{R}_+^2 上是全局渐进稳定的, 该结果与定理 1 和定理 4 的结论一致.

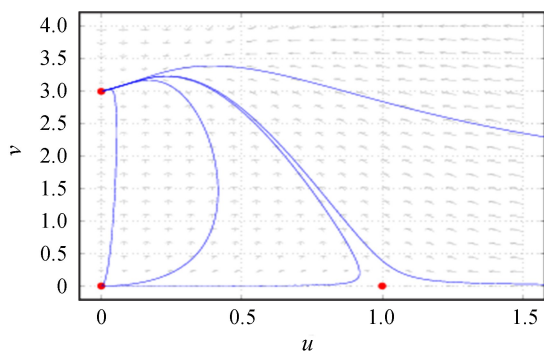


图 1 $\beta = 1.5$ 时系统(6) 的相图

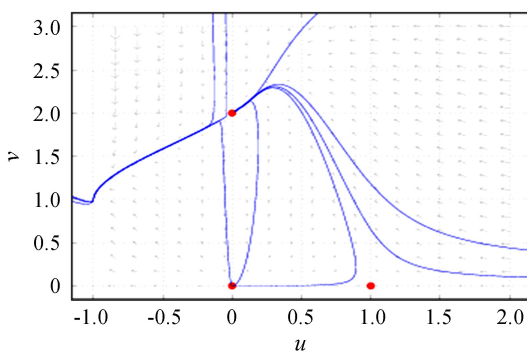


图 2 $\beta = 1.0$ 时系统(6) 的相图

情形 3 取 $\beta = 0.5$, 则 $\beta < \frac{1}{2knm - 1}$, 系统存在平衡点 $E_2 = (0, 1)$ 和 $E_3 = (0.2, 1.2)$. 由定理 2 和定理 5 可知, E_2 为鞍点, E_3 是全局渐进稳定的结点. 情形 3 的仿真结果如图 3 所示. 由图 3 可以看出, E_2 是全局渐进稳定的鞍点, E_3 是全局渐进稳定的结点, 该结果与定理 2 和定理 5 的结论一致.

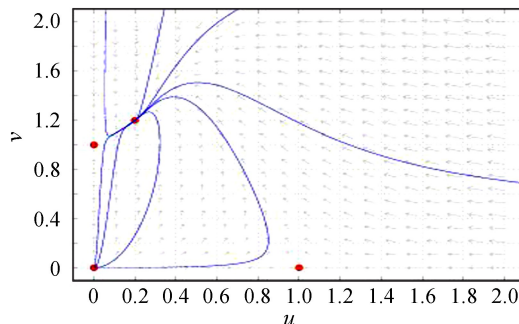


图 3 $\beta = 0.5$ 时系统(6) 的相图

(下转第 137 页)

- 理学对经典名方竹茹汤中葛根的质量标志物(Q-Marker)预测分析[J]. 中草药, 2021, 52(20): 6197-6207.
- [15] 宗阳, 丁美林, 贾可可, 等. 基于网络药理学和分子对接法探寻达原饮治疗新型冠状病毒肺炎(COVID-19)活性化合物的研究[J]. 中草药, 2020, 51(4): 836-844.
- [16] 裴超, 邵霖霖, 刘晶, 等. 基于网络药理学与分子对接技术探讨红花治疗视网膜静脉阻塞的作用机制研究[J]. 天然产物研究与开发, 2020, 32(11): 1844-1851.
- [17] 刘翠翠, 杨晨, 杨涛, 等. 基于网络药理学和分子对接探讨银杏叶治疗高血压病潜在作用机制[J]. 天然产物研究与开发, 2021, 33(3): 468-478.
- [18] 陈廷玉, 陈德顺, 何帅兵, 等. ROS/JNK 通路在槲皮素抑制异烟肼诱导肝细胞凋亡中的作用[J]. 湖州师范学院学报, 2021, 43(8): 59-64.
- [19] 费曜, 段恒, 牛亚珍, 等. 藏药“松蒂”(篦齿虎耳草)中黄酮类成分对 L02 肝细胞氧化损伤的影响[J]. 中药新药与临床药理, 2021, 32(9): 1260-1267.
- [20] HUNG W L, YANG G, WANG Y C, et al. Protective effects of theasinensin A against carbon tetrachloride-induced liver injury in mice[J]. Food & Function, 2017, 8(9): 3276-3287.
- [21] BINMOWYNA M N, ALFARIS N A. Kaempferol suppresses acetaminophen-induced liver damage by upregulation/activation of SIRT1[J]. Pharmaceutical Biology, 2021, 59(1): 146-156.
- [22] WANG H, CHEN L, ZHANG X, et al. Kaempferol protects mice from d-GalN/LPS-induced acute liver failure by regulating the ER stress-Grp78-CHOP signaling pathway[J]. Biomedicine & Pharmacotherapy, 2019, 111: 468-475.
- [23] XU T, HUANG S, HUANG Q, et al. Kaempferol attenuates liver fibrosis by inhibiting activin receptor-like kinase 5[J]. Journal of Cellular and Molecular Medicine, 2019, 23(9): 6403-6410.
- [24] 张亦凡, 刘功关, 刘茜, 等. 圣草酚抑制自由基诱导的生物大分子损伤及对肝癌细胞 HepG2 毒性的作用[J]. 食品科学, 2013, 34(17): 126-130.
- [25] 王招玉. 葡萄糖醛酸化代谢在圣草酚减弱对乙酰氨基酚肝毒性中的作用研究[D]. 广州: 南方医科大学, 2018.
- [26] 李庆勇, 姜春菲, 张黎, 等. β -谷甾醇、豆甾醇诱导人肝癌细胞 SMMC-7721 凋亡[J]. 时珍国医国药, 2012, 23(5): 1173-1175.
- [27] 张忠泉, 邢煜君, 胡国强, 等. β -谷甾醇诱导人肝癌 HepG2 细胞凋亡机制研究[J]. 中国中药杂志, 2011, 36(15): 2145-2148.

~~~~~  
(上接第 122 页)

## 参考文献:

- [1] FREEDMAN H I. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology[M]. New York: Marcel Dekker, 1980: 119.
- [2] LESLIE P H, GOWER J C. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species[J]. Biometrika, 1960, 47: 219-234.
- [3] HSU S B, HUANG T W. Global stability for a class of predator-prey system[J]. SIAMJ Appl Math, 1995, 55: 763-783.
- [4] HUANG J, RUAN S, SONG J. Bifurcations in a predator-prey system of Leslie type with generalized Holling type III functional response[J]. J Differential Equations, 2013, 257: 1721-1752.
- [5] 张丽娜, 李月霞. 修正的 Leslie-Gower 捕食者-食饵扩散模型正平衡点的全局渐近稳定[J]. 应用数学, 2014, 27(2): 381-386.
- [6] 鲁引儿, 徐菲, 张丽娜. 具有非线性收获的 Leslie-Gower 捕食者-食饵扩散模型的 Hopf 分支分析[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2019, 34(1): 101-106.
- [7] BASHEER A, QUANSAH E, PARSHAD R. The effect of additional food in Holling Tanner type models[J]. Int J Dyn Control, 2019, 7: 1195-1212.
- [8] PERKO L. Differential Equations and Dynamical Systems, in Texts in Applied Mathematics[M]. New York: Springer-Verlag, 2001: 338.