文章编号：1004-4353(2022)02-0107-05

二维量子态的相干值计算

孙柳[1]，陶元红[2]，李江鹏[1]
（1.延边大学 理学院，吉林 延吉 133002；2.浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘要：利用单量子比特混合态的 Bloch 球表示法给出 7 种常见的相干度量（l_1 范数相干度量、$l_{\bar{p}}$ 范数相干度量($\bar{p}\geqslant 2$)、相对熵相干度量、Tsallis-α 相对熵相干度量、Rényi-α 相对熵相干度量、α-亲和度相干度量和斜信息相干度量）下二维量子态的相干值解析表达式及其取值范围.该研究结果可为研究单量子比特系统上的不同相干度量的序关系提供参考.

关键词：量子相干性；相干值；Bloch 球表示法；单量子比特态
中图分类号：O177.3　　**文献标识码**：A

Calculation of quantum coherence for two-dimensional quantum state

SUN Liu[1]，TAO Yuanhong[2]，LI Jiangpeng[1]
（1.*College of Science*，*Yanbian University*，*Yanji* 133002，*China*；
2.*College of Science*，*Zhejiang University of Science and Technology*，*Hangzhou* 310023，*China*）

Abstract：Using the Bloch sphere representation of single-qubit mixed states，the analytical expressions and value ranges of coherence values of two-dimensional quantum states under seven common coherence measures are given (l_1-norm coherence measure，$l_{\bar{p}}$-norm coherence measure ($\bar{p}\geqslant 2$)，relative entropy coherence measure，Tsallis-α relative entropy coherence，Rényi-α relative entropy coherence，α-affinity coherence measureand skew information coherence measure)，the research results can provide a reference for studying the order relationship of different coherence measures in single-qubit system.

Keywords：quantum coherence；coherence value；Bloch sphere representation；single-qubit state

近年来，量子相干性作为一种重要的物理资源受到学者们的关注，并在量子信息与量子计算、纳米热力学、低温热力学和量子生物学等领域得到诸多应用[1-2].计算量子态在不同相干度量下的相干值对研究不同相干度量的序关系具有重要意义.2014 年，Shao 等[3]给出了保真度相干度量和迹距离相干度量下的单量子比特态的相干值解析式；2015 年，U.Singh 等[4]给出了几何相干度量下的单量子比特态的相干值解析式；2017 年，Liu 等[5]给出了改进的保真度相干度量下的单量子比特态的相干值解析式；同年，Zhang 等[6]给出了几何相干度量下的高维最大相干混合态的相干值解析式；2018 年，Chen 等[7]给出了迹距离相干度量下的高维最大相干混合态的相干值解析式.基于以上研究，本文利用单量子比特混合态的 Bloch 球表示法给出 7 种常见的相干度量（l_1 范数相干度量、$l_{\bar{p}}$ 范数相干度量($\bar{p}\geqslant 2$)、相对

收稿日期：2022-04-25
基金项目：国家自然科学基金(11761073)
第一作者：孙柳(1998—)，女，硕士研究生，研究方向为泛函分析及其应用、量子信息.
通信作者：陶元红(1973—)，女，博士，教授，研究方向为泛函分析及其应用、量子信息.

熵相干度量、Tsallis-α 相对熵相干度量、Rényi-α 相对熵相干度量、α-亲和度相干度量和斜信息相干度量)下的二维量子态的相干值解析表达式及其取值范围,以为相干性值的计算提供参考.

1 单量子比特态的相干值计算

任意单量子比特混合态 $\boldsymbol{\rho}$ 都可以用 Bloch 球表示[8],即任意的量子比特的密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 都可表示为:

$$\boldsymbol{\rho}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}). \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{r}=(r_x,r_y,r_z)$, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$, $|\boldsymbol{r}|\leqslant 1$, $\boldsymbol{\sigma}_i=\begin{pmatrix}\delta_{i3} & \delta_{i1}-\mathrm{i}\delta_{i2}\\ \delta_{i1}+\mathrm{i}\delta_{i2} & -\delta_{i3}\end{pmatrix}$. 密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的矩阵形式为:

$$\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}\dfrac{1+r_z}{2} & \dfrac{r_x-\mathrm{i}r_y}{2}\\ \dfrac{r_x+\mathrm{i}r_y}{2} & \dfrac{1-r_z}{2}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

设密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的特征值分别为 λ_1 和 λ_2,则根据矩阵性质 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=\det(\boldsymbol{\rho})\end{cases}$ 可得:

$$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{2},\\ \lambda_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{2}.\end{cases} \tag{3}$$

设 λ_1 和 $\boldsymbol{\lambda}_2$ 对应的单位特征向量分别为 $|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle$ 和 $|\boldsymbol{\lambda}_2\rangle$,由此对 $\boldsymbol{\rho}$ 的特征多项式进行推导计算可得:

$$|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle=\frac{\boldsymbol{A}}{\|\boldsymbol{A}\|},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{r_z-1}{r_x+\mathrm{i}r_y}+\dfrac{(|\boldsymbol{r}|+1)\mathrm{i}}{\mathrm{i}r_x-r_y}\\ 1\end{pmatrix};\ |\boldsymbol{\lambda}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{B}\|},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{r_z-1}{r_x+\mathrm{i}r_y}-\dfrac{(|\boldsymbol{r}|-1)\mathrm{i}}{\mathrm{i}r_x-r_y}\\ 1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

由上式可知,密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的谱分解为 $\boldsymbol{\rho}=\lambda_1|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}_1|+\lambda_2|\boldsymbol{\lambda}_2\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}_2|$. 为了方便计算相对熵相干度量,利用 $\boldsymbol{\rho}^{\alpha}=\lambda_1^{\alpha}|\boldsymbol{\lambda}_1\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}_1|+\lambda_2^{\alpha}|\boldsymbol{\lambda}_2\rangle\langle\boldsymbol{\lambda}_2|$ 对其化简可得:

$$\boldsymbol{\rho}^{\alpha}=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_1^{\alpha}}{2}\left(1+\dfrac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)+\dfrac{\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\dfrac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right) & \dfrac{(\lambda_2^{\alpha}-\lambda_1^{\alpha})(-r_x+\mathrm{i}r_y)}{2|\boldsymbol{r}|}\\ \dfrac{(\lambda_2^{\alpha}-\lambda_1^{\alpha})(-r_x-\mathrm{i}r_y)}{2|\boldsymbol{r}|} & \dfrac{\lambda_1^{\alpha}}{2}\left(1-\dfrac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)+\dfrac{\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1+\dfrac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)\end{bmatrix}. \tag{5}$$

2 $l_{\bar{p}}$ 范数相干度量下单量子比特态的相干值计算

本文记 I 为非相干态集合. $l_{\bar{p}}$ 范数相干度量的表达式[9] 为:

$$C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})=\min_{\delta\in\mathrm{I}}\|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\delta}\|_{l_{\bar{p}}}=\Big(\sum_{i\neq j}|\langle \boldsymbol{i}\mid\boldsymbol{\rho}\mid\boldsymbol{j}\rangle|^{\bar{p}}\Big)^{1/\bar{p}},\ \bar{p}\geqslant 2. \tag{6}$$

由 $l_{\bar{p}}$ 范数相干度量的定义可知,$C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})$ 只与密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的非对角线元素有关,于是根据式(2)和(6)有:

$$C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})=\Big(\sum_{i\neq j}|\langle \boldsymbol{i}\mid\boldsymbol{\rho}\mid\boldsymbol{j}\rangle|^{\bar{p}}\Big)^{1/\bar{p}}=\left(2\times\left(\frac{\sqrt{|\boldsymbol{r}|^2-r_z^2}}{2}\right)^{\bar{p}}\right)^{1/\bar{p}}=2^{(1-\bar{p})/\bar{p}}\sqrt{|\boldsymbol{r}|^2-r_z^2}. \tag{7}$$

当单量子比特 $\boldsymbol{\rho}$ 取最大相干态 $\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时,$C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})$ 有最大值,即 $C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})_{\max}=2^{(1-\bar{p})/\bar{p}}$. 综上,在 $l_{\bar{p}}$ 范数相干度量下用 Bloch 球表示的单量子比特密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的相干性值为 $C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})=2^{(1-\bar{p})/\bar{p}}\sqrt{|\boldsymbol{r}|^2-r_z^2}$,且

$C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})\in[0,2^{(1-\bar{p})/\bar{p}}]$.

3　相对熵相干度量下单量子比特态的相干值计算

相对熵相干度量的表达式[10]为：

$$C_r(\boldsymbol{\rho})=\min_{\delta\in\mathrm{I}}S(\boldsymbol{\rho}\,\|\,\boldsymbol{\delta})=S(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{diag}})-S(\boldsymbol{\rho}),\tag{8}$$

其中 $S(\boldsymbol{\rho})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}\log_2\boldsymbol{\rho})$ 表示冯诺依曼熵. 首先求解 $S(\boldsymbol{\rho})$ 和 $S(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{diag}})$ 的表达式为：

$$S(\boldsymbol{\rho})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}\log_2\boldsymbol{\rho})=-\lambda_1\log_2\lambda_1-\lambda_2\log_2\lambda_2=-\left(\frac{1}{2}+\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\right)\log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\right)\log_2\left(\frac{1}{2}-\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\right)=-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-|\boldsymbol{r}|^2}{4}\right)-\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\log_2\left(\frac{1+|\boldsymbol{r}|}{1-|\boldsymbol{r}|}\right),\tag{9}$$

$$S(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{diag}})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{diag}}\log_2\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{diag}})=-\frac{1+r_z}{2}\log_2\left(\frac{1+r_z}{2}\right)-\frac{1-r_z}{2}\log_2\left(\frac{1-r_z}{2}\right)=-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-r_z^2}{4}\right)-\frac{r_z}{2}\log_2\left(\frac{1+r_z}{1-r_z}\right).\tag{10}$$

利用 $C_r(\boldsymbol{\rho})=S(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{diag}})-S(\boldsymbol{\rho})$ 进一步化简相对熵相干度量可得：

$$C_r(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-|\boldsymbol{r}|^2}{1-r_z^2}\right)+\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\log_2\left(\frac{1+|\boldsymbol{r}|}{1-|\boldsymbol{r}|}\right)-\frac{r_z}{2}\log_2\left(\frac{1+r_z}{1-r_z}\right).\tag{11}$$

当单量子比特 $\boldsymbol{\rho}$ 取最大相干态 $\boldsymbol{\rho}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，$C_r(\boldsymbol{\rho})$ 有最大值，此时 $r_x=1$，$r_y=0$，$r_z=0$. 将最大相干态 $\boldsymbol{\rho}$ 代入式(11)可得 $C_r(\boldsymbol{\rho})_{\max}=1$. 综上，在相对熵相干度量下用 Bloch 球表示的单量子比特密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的相干性值为 $C_r(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-|\boldsymbol{r}|^2}{1-r_z^2}\right)+\frac{|\boldsymbol{r}|}{2}\log_2\left(\frac{1+|\boldsymbol{r}|}{1-|\boldsymbol{r}|}\right)-\frac{r_z}{2}\log_2\left(\frac{1+r_z}{1-r_z}\right)$，且 $C_r(\boldsymbol{\rho})\in[0,1]$.

4　其他熵相干度量下单量子比特态的相干值计算

Tsallis-α 相对熵相干度量的表达式[11]为：

$$C_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})=\min_{\delta\in\mathrm{I}}S_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho}\,\|\,\boldsymbol{\delta})=\min_{\delta\in\mathrm{I}}\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}^\alpha\boldsymbol{\delta}^{1-\alpha})-1}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}\{r^\alpha-1\},\ \alpha\in(0,1)\cup(1,2],\tag{12}$$

其中 $r=\sum_i\langle\boldsymbol{i}\,|\,\boldsymbol{\rho}^\alpha\,|\,\boldsymbol{i}\rangle^{1/\alpha}$. Rényi-$\alpha$ 相对熵相干度量的表达式[12]为：

$$C_\alpha^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho})=\min_{\delta\in\mathrm{I}}S_\alpha^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho}\,\|\,\boldsymbol{\delta})=\min_{\delta\in\mathrm{I}}\frac{1}{\alpha-1}\log_2\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}^\alpha\boldsymbol{\delta}^{1-\alpha})=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2 r,\ \alpha\in(0,1)\cup(1,2].\tag{13}$$

α-亲和度相干度量的表达式[13]为：

$$C_\alpha^{(\alpha)}(\boldsymbol{\rho})=1-\sum_i\langle\boldsymbol{i}\,|\,\boldsymbol{\rho}^\alpha\,|\,\boldsymbol{i}\rangle^{1/\alpha}=1-r,\quad\alpha\in(0,1).\tag{14}$$

显然，Tsallis-α 相对熵相干度量、Rényi-α 相对熵相干度量和 α-亲和度相干度量在解析表达式的结构上具有很大的相似性，即仅与变元 α 和 $r=\sum_i\langle\boldsymbol{i}\,|\,\boldsymbol{\rho}^\alpha\,|\,\boldsymbol{i}\rangle^{1/\alpha}$ 有关. 下面计算量子态在这 3 个相对熵相干度下的相干值. 由式(5)可知，r 可写为：

$$r=\sum_i\langle\boldsymbol{i}\,|\,\boldsymbol{\rho}^\alpha\,|\,\boldsymbol{i}\rangle^{1/\alpha}=\left(\frac{\lambda_1^\alpha}{2}\left(1+\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)+\frac{\lambda_2^\alpha}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right)^{1/\alpha}+\left(\frac{\lambda_1^\alpha}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)+\frac{\lambda_2^\alpha}{2}\left(1+\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right)^{1/\alpha}=$$

$$\left(\lambda_1^{\alpha}-\frac{\lambda_1^{\alpha}-\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right)^{1/\alpha}+\left(\lambda_2^{\alpha}+\frac{\lambda_1^{\alpha}-\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)\right)^{1/\alpha}. \tag{15}$$

设 $M=\frac{\lambda_1^{\alpha}-\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right)$，则 $r=(\lambda_1^{\alpha}-M)^{1/\alpha}+(\lambda_2^{\alpha}+M)^{1/\alpha}$.

1) Tsallis-α 相对熵相干度量下单量子比特态的相干值计算. 由式(3)、(12)、(15) 可知，在Tsallis-α 相对熵相干度量下用 Bloch 球表示的单量子比特密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的相干性值为：

$$C_{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{\alpha-1}\{[(\lambda_1^{\alpha}-M)^{1/\alpha}+(\lambda_2^{\alpha}+M)^{1/\alpha}]^{\alpha}-1\},\quad M=\frac{\lambda_1^{\alpha}-\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right). \tag{16}$$

令 $\boldsymbol{\rho}$ 为最大相干态，再将 $r_x=1, r_y=0, r_z=0$ 代入式(15) 可得 $C_{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})_{\max}=\frac{2^{\alpha-1}-1}{\alpha-1}$，于是可得Tsallis-$\alpha$ 相对熵相干度量下单量子比特的相干值范围为 $C_{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})\in\left[0,\frac{2^{\alpha-1}-1}{\alpha-1}\right]$.

2) Rényi-α 相对熵相干度量下单量子比特态的相干值计算. 由式(3)、(13)、(15) 可知，在Rényi-α 相对熵相干度量下用 Bloch 球表示的单量子比特密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的相干性值为：

$$C_{\alpha}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2[(\lambda_1^{\alpha}-M)^{1/\alpha}+(\lambda_2^{\alpha}+M)^{1/\alpha}],\quad M=\frac{\lambda_1^{\alpha}-\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right). \tag{17}$$

令 $\boldsymbol{\rho}$ 为最大相干态，再将 $r_x=1, r_y=0, r_z=0$ 代入式(15) 可得 $C_{\alpha}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho})_{\max}=1$，由此可得 Rényi-$\alpha$ 相对熵相干度量下单量子比特的相干值范围为 $C_{\alpha}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho})\in[0,1]$.

3) α-亲和度相干度量下单量子比特的相干值计算. 由式(3)、(14)、(15) 可知，在α-亲和度相干度量下用 Bloch 球表示的单量子比特密度算子 $\boldsymbol{\rho}$ 的相干性值为：

$$C_{\alpha}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\rho})=1-(\lambda_1^{\alpha}-M)^{1/\alpha}-(\lambda_2^{\alpha}+M)^{1/\alpha},\quad M=\frac{\lambda_1^{\alpha}-\lambda_2^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{r_z}{|\boldsymbol{r}|}\right). \tag{18}$$

令 $\boldsymbol{\rho}$ 为最大相干态，再将 $r_x=1, r_y=0, r_z=0$ 代入式(15) 可得 $C_{\alpha}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\rho})_{\max}=1-2^{(\alpha-1)/\alpha}$，由此可得 α-亲和度相干度量下单量子比特的相干值范围为 $C_{\alpha}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\rho})\in[0,1-2^{(\alpha-1)/\alpha}]$.

5 斜信息相干度量下单量子比特态的相干值计算

斜信息相干度量的表达式[14] 为：

$$C_{sk}(\boldsymbol{\rho})=\sum_i I(\boldsymbol{\rho},|\boldsymbol{i}\rangle\langle\boldsymbol{i}|)=1-\sum_i\langle\boldsymbol{i}|\sqrt{\boldsymbol{\rho}}|\boldsymbol{i}\rangle^2, \tag{19}$$

其中 $I(\boldsymbol{\rho},K)=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{[\sqrt{\boldsymbol{\rho}},K]^2\}$，它表示量子态$\boldsymbol{\rho}$ 与可观测量K 间的斜信息. 对比式(14)、(19) 可知 $C_{sk}(\boldsymbol{\rho})=C_{1/2}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\rho})$，于是将 $\alpha=\frac{1}{2}$ 代入式(18) 即可得到斜信息相干度量下单量子比特的相干性值，为 $C_{sk}(\boldsymbol{\rho})=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_z^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{1-|\boldsymbol{r}|^2}\left(1-\frac{r_z^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\right)$，且 $C_{sk}(\boldsymbol{\rho})\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

6 结论

本文利用单量子比特混合态的 Bloch 球表示法给出了 7 种常见的相干度量下单量子比特态的相干值解析表达式及其取值范围(见表 1)，该研究结果有助于研究单量子比特系统上的不同相干度量的序关系以及确定将纯态通过非相干操作转换为另一个纯态或混合态的条件. 在今后的研究中，我们将对 Tsallis-α 相对熵、Rényi-α 相对熵和α-亲和度相干度量下高维态的相干值进行研究，以为相干性值的计算以及研究量子态的相干度量的序关系提供参考.

表 1　单量子比特态的相干值解析表达式以及相干值的取值范围

相干度量名称	单量子比特态的相干值解析表达式	相干值的取值范围
l_1 范数相干	$C_{l_1}(\boldsymbol{\rho})=\sqrt{\|\boldsymbol{r}\|^2-r_z^2}$	$[0,1]$
$l_{\bar{p}}$ 范数相干	$C_{l_{\bar{p}}}(\boldsymbol{\rho})=2^{(1-\bar{p})/\bar{p}}\sqrt{\|\boldsymbol{r}\|^2-r_z^2}$	$[0,2^{(1-\bar{p})/\bar{p}}]$
Tsallis-α 相对熵相干	$C_\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{\alpha-1}\{[(\lambda_1^\alpha-M)^{1/\alpha}+(\lambda_2^\alpha+M)^{1/\alpha}]^\alpha-1\}$ $M=\frac{\lambda_1^\alpha-\lambda_2^\alpha}{2}\left(1-\frac{r_z}{\|\boldsymbol{r}\|}\right)$	$\left[0,\frac{2^{\alpha-1}-1}{\alpha-1}\right]$
Rényi-α 相对熵相干	$C_\alpha^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho})=\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_2[(\lambda_1^\alpha-M)^{1/\alpha}+(\lambda_2^\alpha+M)^{1/\alpha}]$ $M=\frac{\lambda_1^\alpha-\lambda_2^\alpha}{2}\left(1-\frac{r_z}{\|\boldsymbol{r}\|}\right)$	$[0,1]$
α-亲和度相干	$C_\alpha^{(a)}(\boldsymbol{\rho})=1-(\lambda_1^\alpha-M)^{1/\alpha}-(\lambda_2^\alpha+M)^{1/\alpha}$ $M=\frac{\lambda_1^\alpha-\lambda_2^\alpha}{2}\left(1-\frac{r_z}{\|\boldsymbol{r}\|}\right)$	$[0,1-2^{(\alpha-1)/\alpha}]$
斜信息相干	$C_{sk}(\boldsymbol{\rho})=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_z^2}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{1-\|\boldsymbol{r}\|^2}\left(1-\frac{r_z^2}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\right)$	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$
相对熵相干	$C_r(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-\|\boldsymbol{r}\|^2}{1-r_z^2}\right)+\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{2}\log_2\left(\frac{1+\|\boldsymbol{r}\|}{1-\|\boldsymbol{r}\|}\right)-\frac{r_z}{2}\log_2\left(\frac{1+r_z}{1-r_z}\right)$	$[0,1]$

参考文献：

[1] HU M L, HU X Y, WANG J C, et al. Quantum coherence and geometric quantum discord[J]. Phys Rep, 2018, 762:56-74.

[2] ABERG J. Catalytic coherence[J]. Phys Rev Lett, 2014, 113:150402.

[3] SHAO L H, XI Z J, FAN H, et al. The fidelity and trace norm distances for quantifying coherence[J]. Phys Rev A, 2015, 91:042120.

[4] STRELTSOV A, SINGH U, DHAR H S, et al. Measuring quantum coherence with entanglement[J]. Phys Rev Lett, 2015, 115:020403.

[5] LIU C L, ZHANG D J, YU X D, et al. A new coherence measure based on fidelity[J]. Quant Inf Proc, 2017, 16:1-10.

[6] ZHANG H J, CHEN B, LI M, et al. Estimation on geometric measure of quantum coherence[J]. Commun Theor Phys, 2017, 67:166-170.

[7] CHEN B, FEI S M. Notes on modified trace distance measure of coherence[J]. Quant Inf Proc, 2018, 17:1-9.

[8] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. London: Cambridge University Press, 2010:1-15.

[9] BAI Z F, DU S P. Maximally coherent states[J]. Quantum Information & Computation, 2015[2022-01-12]. https://doi.org/10.48550/arXiv.1503.07103.

[10] BAUMGRATZ T, CRAMER M, PLENIO M B. Quantifying coherence[J]. Phys Rev Lett, 2014, 113(14): 140401.

[11] ZHANG F G, SHAO L H, LUO Y, et al. Ordering states with Tsallis relative α-entropies of coherence[J]. Quant Inf Proc, 2017, 16:1-17.

[12] SHAO L H, LI Y M, LUO Y, et al. Quantum coherence quantifiers based on the Rényi α-relative entropy[J]. Commun Theor Phys, 2017, 67(6):631-636.

[13] XIONG C H, Kumar A, WU J D. Family of coherence measures and duality between quantum coherence and path distinguishability[J]. Phys Rev A, 2018, 98:032324.

[14] YU C S. Quantum coherence via skew information and its polygamy[J]. Phys Rev A, 2017, 95:042337.