文章编号: 1004-4353(2022)02-0095-05

Banach 空间中分数阶微分方程 Robin 边值问题解的存在性

李小龙
(陇东学院 数学与统计学院, 甘肃 庆阳 745000)

摘要: 讨论了 Banach 空间 E 中分数阶微分方程边值问题: $-D_{0^+}^{\beta}u(t)=f(t,u(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $u(0)=u'(1)=\theta$ 解的存在性,其中 $1<\beta\leqslant 2$, $D_{0^+}^{\beta}$ 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶导数, $f:[0,1]\times E\to E$ 连续. 通过非紧性测度的估计技巧,在非线性项 f 满足较弱增长条件下利用凝聚映射的不动点定理获得了该边值问题解的存在性结果.

关键词: 分数阶边值问题; 不动点定理; 非紧性测度; 凝聚映射
中图分类号: O175.15 **文献标识码**: A

Existence of solutions for Robin boundary value problems of fractional differential equation in Banach spaces

LI Xiaolong
(*College of Mathematics and Statistics*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*)

Abstract: The existence of solutions for the boundary value problem of a class of the fractional differential equation $-D_{0^+}^{\beta}u(t)=f(t,u(t))$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $u(0)=u'(1)=\theta$ in Banach spaces E is discussed, where $1<\beta\leqslant 2$, $D_{0^+}^{\beta}$ is the standard Riemann-Liouville fractional derivative, $f:[0,1]\times E\to E$ is continuous. The existence of the solution of the boundary value problem is obtained by using the fixed point theorem of condensed mapping under the condition of weak growth of nonlinear terms, by using the estimation technique of noncompactness measure.

Keywords: fractional boundary value problem; fixed point theorem; noncompactness measure; condensing mapping

分数阶微分方程在流体力学、分数控制系统与分数控制器、电分析化学、神经的分数模型以及分数回归模型等领域有着广泛的应用. 近年来,许多学者应用锥拉伸与锥压缩不动点定理、Lexar-Schauder 不动点定理及上下解的单调迭代技巧等研究了分数阶边值问题解的存在性[1-7],但在一般的无穷维 Banach 空间中对该类问题的研究还比较少[8]. 与普通微分方程相比,研究 Banach 空间微分方程的最大难点是把微分方程转换为与之等价的积分方程后,相应的积分算子不再具有紧性. 2011 年,文献[5]的作者在实数空间中运用锥拉伸与锥压缩不动点定理讨论了非线性分数阶微分方程边值问题(式(1))解的存在性.

收稿日期: 2022-03-17
基金项目: 甘肃省自然科学基金(21JR1RM337); 甘肃省高等学校创新基金(2021B-270,2021B-262)
作者简介: 李小龙 (1976—),男,硕士,副教授,研究方向为抽象微分方程.

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\beta}u(t)=f(t,u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1; \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中 $1<\beta\leqslant 2$, $D_{0^+}^{\beta}$ 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶导数, $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续. 本文将在 Banach 空间 E 中利用凝聚映射的不动点定理, 讨论非线性分数阶微分方程边值问题(式(2))解的存在性.

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\beta}u(t)=f(t,u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 1; \\ u(0)=u'(1)=\theta. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $1<\beta\leqslant 2$, $D_{0^+}^{\beta}$ 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶导数, $f:[0,1]\times E\to E$ 连续.

1 预备知识

设 E 为 Banach 空间, 记 $J=[0,1]$. 设 $C(J,E)$ 为定义于 J 并取值于 E 的全体连续函数空间, $C(J,E)$ 是按范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t)\|$ 构成 Banach 空间.

定义 1[1] 设 $\beta>0$, 函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 β 阶 Riemann-Liouville 积分为 $I_{0^+}^{\beta}f(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^t f(s)(t-s)^{\beta-1}\mathrm{d}s$, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数.

定义 2[1] 设 $\beta>0$, 函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 β 阶 Riemann-Liouville 导数为

$$D_{0^+}^{\beta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t f(s)(t-s)^{n-\beta-1}\mathrm{d}s,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, $n=[\beta]+1$.

引理 1[2] 设 $\beta>0$, 假设 $u\in C(0,1)\cap L(0,1)$ 是分数阶微分方程 $D_{0^+}^{\beta}u(t)=0$ 的解, 则 $u(t)$ 具有如下形式: $u(t)=c_1t^{\beta-1}+c_2t^{\beta-2}+\cdots+c_Nt^{\beta-N}$, 其中 $c_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,N$ (N 是大于或等于 β 的最小正整数).

引理 2[2] 假设 $u\in C(0,1)\cap L(0,1)$ 有 $\beta>0$ 阶导数属于 $C(0,1)\cap L(0,1)$, 则

$$I_{0^+}^{\beta}D_{0^+}^{\beta}u(t)=u(t)+c_1t^{\beta-1}+c_2t^{\beta-2}+\cdots+c_Nt^{\beta-N},$$

其中 $c_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,N$ (N 是大于或等于 β 的最小正整数).

引理 3[8] 设 $1<\beta\leqslant 2$, 则对 $\forall h\in C(J,E)$, Banach 空间 E 中的线性分数阶边值问题

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\beta}u(t)=h(t),\ t\in J; \\ u(0)=u'(1)=\theta \end{cases}$$

存在唯一解:

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s \triangleq Th(t). \tag{3}$$

其中 $G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-2}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1; \\ \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$

引理 4[8] 由式(3)定义的算子 $T:C(J,E)\to C(J,E)$ 满足 $\|T\|<\dfrac{1}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}$.

本文中, E 与 $C(J,E)$ 中的有界集的 Kuratiwski 非紧性测度均由 $\alpha(\cdot)$ 表示. 对 $B\subset C(J,E)$, 记 $B(t)=\{u(t)\mid u\in B\}\subset E$, $t\in J$.

引理 5[9] 设 $B\subset C(J,E)$ 为等度连续的有界函数族, 则 $\alpha(B(t))$ 在 J 上连续, $\alpha(B)=$

$\max\limits_{t\in J}\alpha(B(t))$.

引理 6[9]（凝聚映射的 Leray-Schauder 不动点定理）　设 E 是 Banach 空间，$Q:E\to E$ 凝聚，若集合 $\{x\in E\,|\,x=\lambda Qx,0<\lambda<1\}$ 有界，则 Q 在 E 中必有不动点.

引理 7[9]（Sadovskii 不动点定理）　设 E 是 Banach 空间，$D\subset E$ 为有界凸闭集，若 $Q:D\to D$ 凝聚，则 Q 在 E 中必有不动点.

引理 8[10]　设 $B=\{u_n\}\subset C(J,E)$ 为可列集，若 $\exists\psi\in L^1(J)$ 使得 $\|u_n(t)\|\leqslant\psi(t)$，a. e. $t\in J$，$n=1,2,\cdots$，则 $\alpha(B(t))$ 在 J 上可积，且 $\alpha\left(\left\{\int_J u_n(t)\mathrm{d}t\right\}\right)\leqslant 2\int_J\alpha(B(t))\mathrm{d}t$.

引理 9[11]　设 $D\subset E$ 有界，则存在 D 的可列子集 D_0，使得 $\alpha(D)\leqslant 2\alpha(D_0)$.

引理 10[12]　若 $u\in C(J,E)$，$\psi\in L(J,\mathbf{R}^+)$，则 $\int_J u(s)\psi(s)\mathrm{d}s\in\left(\int_J\psi(s)\mathrm{d}s\right)\overline{Co}\,u(J)$，其中 $u(J)=\{u(t)\,|\,t\in J\}$.

定义算子 $Q:C(J,E)\to C(J,E)$ 为：

$$(Qu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\tag{4}$$

则 $Q:C(J,E)\to C(J,E)$ 连续，且边值问题(2) 的解等价于积分算子 Q 的不动点.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 E 为 Banach 空间，$f:J\times E\to E$ 连续. 边值问题(2) 至少存在一个解，若 f 满足以下条件：

(H_1)　$\exists b_0,b_1>0$，满足 $b_1<(\beta-1)\Gamma(\beta+1)$，使得 $\|f(t,x)\|\leqslant b_0+b_1\|x\|$，$\forall t\in J,x\in E$.

(H_2)　$\exists 0<L<\dfrac{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}{4}$，使得对 $\forall t\in J$，有界集 $D\subset E$，有 $\alpha(f(t,D))\leqslant L\alpha(D)$.

证明　由式(4) 可知 $Q:C(J,E)\to C(J,E)$ 连续. 下证由式(5) 定义的算子 $Q:C(J,E)\to C(J,E)$ 为凝聚映射. 由条件(H_1) 知，Q 将 $C(J,E)$ 中的有界集映为有界的等度连续集. 为证明 $\alpha(Q(B))<\alpha(B)$，任取 $C(J,E)$ 中非相对紧的有界集 B. 对于 $C(J,E)$ 中的有界集 B，由引理 9 知其存在可列集 $B_1=\{u_n\}\subset B$，使得 $\alpha(Q(B))\leqslant 2\alpha(Q(B_1))$. 故对任意 $t\in J$，由引理 8 及条件(H_2) 可得：

$$\begin{aligned}&\alpha(Q(B_1))=\alpha\left(\left\{\int_0^1 G(t,s)f(s,u_n(s))\mathrm{d}s\,|\,n=1,2,\cdots\right\}\right)\leqslant\\&2\int_0^1\alpha(\{G(t,s)f(s,u_n(s))\,|\,n=1,2,\cdots\})\,\mathrm{d}s=2\int_0^1 G(t,s)\alpha(f(s,B_1(s)))\mathrm{d}s\leqslant\\&2L\int_0^1 G(t,s)\alpha(B_1(s))\mathrm{d}s\leqslant 2L\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(B_1)\leqslant 2\frac{L}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\alpha(B_1).\end{aligned}$$

由于 $Q(B_1)$ 是等度连续的，因此由引理 5 知 $\alpha(Q(B_1))=\max\limits_{t\in J}\alpha(Q(B_1))\leqslant 2\dfrac{L}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\alpha(B_1)$，于是有 $\alpha(Q(B))\leqslant 2\alpha(Q(B_1))\leqslant 4\dfrac{L}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\alpha(B_1)\leqslant 4\dfrac{L}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\alpha(B)<\alpha(B)$，故 $Q:C(J,E)\to C(J,E)$ 为凝聚映射.

下证 $\Omega=\{u\in C(J,E)\,|\,u=\lambda Qu,0<\lambda<1\}$ 是 $C(J,E)$ 中的有界集. 事实上，对 $\forall u\in\Omega$，根据算子 Q 的定义有：

$$u(t)=\lambda Qu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\ 0<\lambda<1.\tag{5}$$

对式(5) 两边取范数并结合条件(H_1) 可得：

$$\|u(t)\|=\lambda\left\|\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant\int_0^1 G(t,s)(b_0+b_1\|u(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}+b_1T\|u(s)\|. \tag{6}$$

由式(3)知 $T\|u(t)\|=\int_0^1 G(t,s)\|u(t)\|\mathrm{d}s$，于是再结合式(6)可得：

$$(I-b_1T)\|u(t)\|\leqslant\frac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}.$$

再由引理4可得 $\|T\|<\frac{1}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}$，$\|b_1T\|<\frac{b_1}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}<1$，于是由微扰定理知 $I-b_1T$ 存在有界逆算子 $(I-b_1T)^{-1}$，且 $(I-b_1T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(b_1T)^n$ 为正算子.由以上可得：

$$\|u\|\leqslant\frac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}(I-b_1T)^{-1}=\frac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}(b_1T)^n.$$

由于 $b_1<(\beta-1)\Gamma(\beta+1)$，因此可取 $\varepsilon>0$，使得 $b_1+\varepsilon<(\beta-1)\Gamma(\beta+1)$，于是有 $\|b_1^nT^n\|\leqslant b_1^n\|T\|^n\leqslant\left(\frac{b_1}{b_1+\varepsilon}\right)^n$，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_1^n\|T\|^n$ 收敛.令 $M_0=\sum_{n=0}^{\infty}b_1^n\|T\|^n<+\infty$，则有 $\|u\|\leqslant\frac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}M_0$，即 $\Omega=\{u\in C(J,E)\mid u=\lambda Qu,0<\lambda<1\}$ 有界.于是由引理6知，Q 在 $C(J,E)$ 中必有不动点，且该不动点即为边值问题(2)的解.

定理2 设 E 为Banach空间，$f:J\times E\to E$ 连续.边值问题(2)至少存在一个解，若 f 满足定理1中的条件(H_1)及如下条件(H_3)：

(H_3) $\exists\, 0<L<\frac{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}{2}$，使得对任意有界集 $D\subset E$，有 $\alpha(f(J,D))\leqslant L\alpha(D)$.

证明 由条件(H_1)知，Q 把 $C(J,E)$ 中的有界集映为有界的等度连续集.为证明 $\alpha(Q(B))<\alpha(B)$，任取 $C(J,E)$ 中非相对紧的有界集 B.对 $C(J,E)$ 中的有界集 B，记 $D=B(J)$，则可得 $D\subset E$ 有界.再由引理9知，$\alpha(D)\leqslant 2\alpha(B)$.对 $\forall t\in J$，$u\in B$，由引理10中的条件可得：

$$(Qu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\in\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\overline{Co}\{f(s,u(s))\mid s\in J,u\in B\}\subset$$
$$\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\overline{Co}f(J\times D),$$

即 $Q(B(t))\subset\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\overline{Co}f(J\times D)$.将上式结合非紧性测度和条件($\mathrm{H}_3$)有：

$$\alpha(Q(B(t)))\leqslant\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(\overline{Co}f(J\times D))=\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(f(J\times D))\leqslant$$
$$L\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(D)\leqslant 2L\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(B).$$

由于 $Q(B)$ 是等度连续的，因此由 $0<L<\frac{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}{2}$ 及引理5可得：

$$\alpha(Q(B))=\max_{t\in J}\alpha(Q(B(t)))\leqslant 2\frac{L}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\alpha(B)<\alpha(B),$$

即 $Q:C(J,E)\to C(J,E)$ 为凝聚映射.类似于定理1的证明，用凝聚映射的Leray-Schauder不动点定理即可证明边值问题(2)解的存在性.

定理3 设 E 为Banach空间，$f:J\times E\to E$ 连续.边值问题(2)至少存在一个解，若 f 满足定理1中的条件(H_1)及如下条件(H_4)：

(H_4) $\exists\, 0<L<(\beta-1)\Gamma(\beta+1)$，使得对任意有界集 $D\subset E$，有 $\alpha(f(J,D))\leqslant L\alpha(D)$.

证明 由条件(H_1)知，Q 将 $C(J,E)$ 中的有界集映为有界的等度连续集.取 $C(J,E)$ 中的闭球

$\Omega=\overline{B_c}(\theta,R)$，其中 $R\geqslant\dfrac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)-b_1}$，则显然可知 Ω 为 $C(J,E)$ 中的有界集. 对于 $\forall t\in J$，$u\in\Omega$，由条件(H_1) 知：

$$\|(Qu)(t)\|\leqslant\int_0^1 G(t,s)\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(t,s)(b_0+b_1\|u(s)\|)\mathrm{d}s<$$
$$\frac{b_0}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}+\frac{b_1}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}R\leqslant R,$$

即 $Q(\Omega)\subset\Omega$ 连续. 取 $\Omega_0=\overline{Co}\,Q(\Omega)$，则 Ω_0 为 $C(J,E)$ 中的有界凸闭集，且是等度连续的. 因为 $\Omega_0\subset\Omega$，故 $Q(\Omega_0)\subset Q(\Omega)\subset\Omega_0$，即 $Q:\Omega_0\to\Omega_0$ 连续.

下证 $Q:\Omega_0\to\Omega_0$ 为凝聚映射. 任取 Ω_0 中非相对紧的有界集 B，则 B 和 $Q(B)$ 均是等度连续的. 对于 $\forall t\in J$，$u\in B$，由引理 10 及条件(H_4) 有：

$$\alpha(Q(B(t)))\leqslant\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(\overline{Co}f(J\times B(J)))=\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(f(J\times B(J)))\leqslant$$
$$L\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(B(J))=L\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\,\alpha(B).$$

由 $0<L<(\beta-1)\Gamma(\beta+1)$ 及引理 5 知 $\alpha(Q(B))=\max\limits_{t\in J}\alpha(Q(B(t)))\leqslant\dfrac{L}{(\beta-1)\Gamma(\beta+1)}\alpha(B)<\alpha(B)$，即 $Q:\Omega_0\to\Omega_0$ 为凝聚映射. 于是由引理 7 知，Q 在 Ω_0 中必有不动点，且该不动点即为边值问题(2) 的解.

参考文献：

[1] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.

[2] BAI Z B, LÜ H S. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractionl differential equation[J]. J Math Anal Appl, 2005, 311(2): 495-505.

[3] BAI Z B. On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem[J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(2): 916-924.

[4] JIANG D Q, YUAN C J. The positive properties of the Green function for Dirichlet-type boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its application[J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(2): 710-719.

[5] WANG Y Q, LIU L S, WU Y H. Positive solutions for a nonlocal fractional differential equation[J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(11): 3599-3605.

[6] LIN L G, LIU X P, FANG H Q. Method of upper and lower solutions for fractional differential equations[J]. Electronic J Differential Equations, 2012, 100: 1-13.

[7] LAN K Q. Linear first order Riemann-Liouville fractional differential and perturbed Abel's integral equations[J]. J Differential Equations, 2021, 306(3): 28-59.

[8] 李小龙，张丽丽. 有序 Banach 空间分数阶 Robin 边值问题的正解[J]. 宁夏大学学报(自然科学版)，2019，40(2)：111-115.

[9] 郭大钧，孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南：山东科学技术出版社，1989：188-222.

[10] HEINZ H R. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions[J]. Nonlinear Anal, 1983, 7(12): 1351-1371.

[11] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]. 数学学报，2005，48(6)：1103-1108.

[12] 李永祥，汪璇. 有序 Banach 空间常微分方程的正周期解[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2002，38(1)：1-5.