文章编号： 1004-4353(2022)01-0041-07

测量误差情况下半参数单调回归模型的估计

李生彪， 彭建奎
(兰州文理学院 教育学院，兰州 730000)

摘要： 为了提高测量误差情况下半参数单调回归模型的估计效率，提出了一种新的估计方法. 首先利用核估计方法和纠偏的思想得到了参数的惩罚最小二乘估计，并在此基础上构造了非参数部分的单调估计；其次证明了参数部分估计的渐近分布为正态分布；最后通过随机模拟比较了考虑测量误差和忽略测量误差两种方法所得估计的有限样本性质，结果显示忽略测量误差所得的估计不具有相合性，说明了文中所提出的估计方法的有效性和优越性.

关键词： 半参数模型；单调回归；测量误差；渐近偏差
中图分类号： O212.1　　**文献标识码：** A

Estimation of semiparametric isotonic regression model with measurement error

LI Shengbiao， PENG Jiankui
(*College of Education*, *Lanzhou University of Arts and Science*, *Lanzhou* 730000, *China*)

Abstract: In order to improve the estimation efficiency of semiparametric isotonic regression model with measurement error, we propose a new estimation method. Firstly, the penalized least square estimation of parameters is obtained by using kernel estimation method and the idea of rectifying deviation, on this basis, the monotone estimation of nonparametric part is constructed. Secondly, the proposed estimator of the parametric component is shown to be root-n consistent and asymptotically normal. Finally, the finite sample properties of the estimation obtained by considering the measurement error and the neglect measurement error are compared by random simulation. The simulation results show that the estimation without the measurement error is not consistent, which shows the effectiveness and superiority of the estimation method.

Keywords: semiparametric models; isotonic regression; measurement error; asymptotic bias

0　引言

用半参数回归模型解决一些实际问题时不可避免地会出现一些复杂的数据类型，如测量误差数据、随机缺失数据、删除数据等. 由于测量误差数据具有复杂的结构，因此忽略其结构的统计方法往往会降低估计结果的有效性. 近年来，一些学者对测量误差下的半参数单调回归模型(EV 模型)进行了研究. 例如：Huang[1]研究了 EV 模型的估计问题，并借助经验过程的相关理论给出了估计的渐近性质；张文强等[2]在同时存在自变量和因变量的测量误差的条件下，证明了加权弦估计量具有强收敛和依分布收敛于标准正态分布的极限性质；Deng 等[3]在较弱的假设条件下研究了未知参数最小二乘估计的渐近

收稿日期： 2021 - 09 - 15
基金项目： 甘肃省自然科学基金(20JR5RA464)；甘肃省高等学校创新基金(2020B-255)
第一作者： 李生彪(1981—)，男，硕士，副教授，研究方向为数理统计及数学建模.

正态性,并证明了该最小二乘估计具有强相合性.在上述研究的基础上,本文研究半参数单调回归 EV 模型的估计问题,并通过模拟实验验证了本文方法的有效性.

1 半参数单调回归 EV 模型概述

非参数单调回归模型为:

$$\boldsymbol{Y}=h(\boldsymbol{W})+\varepsilon, \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{Y}$为响应变量,$h\in H$,H 为由单调函数的全体构成的集合.将参数回归模型和模型(1)结合起来即为半参数单调回归模型:

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+h(\boldsymbol{W})+\varepsilon, \tag{2}$$

其中:$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p)^{\mathrm{T}}$ 是协变量;$\boldsymbol{\beta}$ 是 p 维未知参数;ε 是随机误差,独立于$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})$.在一些实际问题中,$\boldsymbol{X}$ 往往带有测量误差.此时 $\boldsymbol{X}$ 无法被观测到,观测到的只是 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U}$,其中$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_p)^{\mathrm{T}}$为$p\times 1$ 维测量误差,且独立于$(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})$,$E(\boldsymbol{U})=0$,$\mathrm{Var}(\boldsymbol{U})=\Sigma_{UU}$.所以模型(2) 可写成:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+h(\boldsymbol{W})+\varepsilon,\\ \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U}.\end{cases} \tag{3}$$

模型(3) 即为半参数单调回归 EV 模型.

本文假设$\boldsymbol{W}\in P$,P 为R 的闭子集,$h(\cdot)$ 在 P 上单调递增,$E(\varepsilon)=0$,$\mathrm{Var}(\varepsilon)=\sigma^2$.为了保证模型的可识别性,本文还假设 Σ_{UU} 为已知.在实际应用中,若 Σ_{UU} 是未知的,仍通常可以找到 Σ_{UU} 的相合估计[4-5],且此时本文的结论仍然成立.设$\{(\boldsymbol{Y}_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{W}_i),i=1,2,\cdots,n\}$是模型(3) 的一个独立同分布观测样本,由此模型(3) 可写成:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+h(\boldsymbol{W}_i)+\varepsilon_i,\\ \boldsymbol{Z}_i=\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{U}_i,\\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

对于模型(3) 的估计,其简单的方法就是忽略测量误差,即用$\boldsymbol{Z}$ 的观测值代替$\boldsymbol{X}$ 的值,以此将模型(3) 简化为模型(2) 进行估计,但由此得到的估计是不相合的.Huang[1] 给出了模型(2) 中 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $h(\cdot)$ 的估计,即:

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{h})=\arg\min_{\beta,h}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}-h(\boldsymbol{W}_i)]^2\,|\,\boldsymbol{\beta}\in B,h\in H\right\},$$

其中B 是R^p 的凸子集,H 为所有定义在P 上的单调递增函数的集合.本文在此结论的基础上,借助嵌入$\boldsymbol{Y}$ 和$\boldsymbol{Z}$ 关于$\boldsymbol{W}$ 条件期望的方法来构造参数部分的估计,以此给出非参数部分的单调约束最小二乘估计.

2 半参数单调回归 EV 模型的估计

首先用$(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})$ 的一个独立同分布观测样本$\{(\boldsymbol{Y}_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{W}_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 求出参数$\boldsymbol{\beta}$、σ^2 和 $h(\cdot)$ 的估计.由模型(3) 可得:

$$\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+h(\boldsymbol{W}_i)+\varepsilon_i-\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}. \tag{4}$$

给定$\boldsymbol{W}_i$,对式(4) 两边同时求条件数学期望可得:

$$E[\boldsymbol{Y}_i\,|\,\boldsymbol{W}_i]=E[\boldsymbol{Y}_i\,|\,\boldsymbol{W}_i]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+h(\boldsymbol{W}_i). \tag{5}$$

再由式(4) 可得:

$$\boldsymbol{Y}_i-E[\boldsymbol{Y}_i\,|\,\boldsymbol{W}_i]=[\boldsymbol{Z}_i-E[\boldsymbol{Y}_i\,|\,\boldsymbol{W}_i]]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_i-\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}. \tag{6}$$

记$\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i=\boldsymbol{Y}_i-E[\boldsymbol{Y}_i\,|\,\boldsymbol{W}_i]$,$\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i=\boldsymbol{Z}_i-E[\boldsymbol{Y}_i\,|\,\boldsymbol{W}_i]$,则式(6) 可化为$\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i=(\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i-\boldsymbol{U}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_i$,于是有

$$E(\varepsilon_i^2)=E(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i-(\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i-\boldsymbol{U}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2=E(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i-\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta}. \tag{7}$$

根据式(7) 可定义 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计为 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\arg\min\limits_{\beta}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i-\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2-n\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta}\right\}$，由此可计算出

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}-n\Sigma_{UU}\right]^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i. \tag{8}$$

因式(8) 中包含了未知的量 $E[\boldsymbol{Y}_i|\boldsymbol{W}_i]$ 和 $E[\boldsymbol{Z}_i|\boldsymbol{W}_i]$，故式(8) 还不能直接作为 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计. 记：

$$g_1(\omega)=E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{W}=\omega),\ g_2(\omega)=E(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{W}=\omega)=E(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{W}=\omega),$$

$$\hat{g}_1(\boldsymbol{W}_i)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{Y}_j,\ \hat{g}_2(\boldsymbol{W}_i)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{Z}_j,\ i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\tilde{\omega}_{nj}(\cdot)=\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_n)$ 是由 $\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_n$ 决定的权函数. 本文用核函数构造如下权函数：

$$\tilde{\omega}_{nj}(\omega)=\left[K\left(\frac{\omega-\boldsymbol{W}_j}{h_n}\right)\right]\Big/\left[\sum_{q=1}^{n}K\left(\frac{\omega-\boldsymbol{W}_q}{h_n}\right)\right],$$

其中 $K(\cdot)$ 是对称核函数，$h_n\to 0$ 是窗宽序列. $\hat{g}_1(\boldsymbol{W}_i)$ 和 $\hat{g}_2(\boldsymbol{W}_i)$ 可作为 $g_1(\boldsymbol{W}_i)$ 和 $g_2(\boldsymbol{W}_i)$ 的估计，记 $\breve{\boldsymbol{Y}}_i=\boldsymbol{Y}_i-\hat{g}_1(\boldsymbol{W}_i)$，$\breve{\boldsymbol{Z}}_i=\boldsymbol{Z}_i-\hat{g}_2(\boldsymbol{W}_i)$. 用 $\breve{\boldsymbol{Y}}_i$ 和 $\breve{\boldsymbol{Z}}_i$ 分别替换式(8) 中的 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}_i$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i$ 即可得 $\boldsymbol{\beta}$ 的最终估计：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}-n\Sigma_{UU}\right]^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Y}}_i.$$

根据式(7) 可构造出 σ^2 的估计，为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\breve{\boldsymbol{Y}}_i-\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}]^2-\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\hat{\boldsymbol{\beta}}$. 令 $\xi_i=\varepsilon_i-\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，则式(4) 可写成 $\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+h(\boldsymbol{W}_i)+\xi_i,\ i=1,2,\cdots,n$. 依上式可定义 $h(\cdot)$ 的单调约束最小二乘估计为：

$$\hat{h}=\arg\min_{h}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}-h(\boldsymbol{W}_i)]^2\,|\,h\in H\right\}. \tag{9}$$

由于最优化问题(9) 是 H 凸集上的一个凸函数的最小化问题，因此式(9) 存在唯一解. 式(9) 中的 $h(\cdot)$ 的单调约束最小二乘估计可用 Zhou 等[6] 给出的方法求出：

$$\hat{h}(\omega)=\max_{s\leqslant\omega}\min_{\omega\leqslant t}\frac{\sum_{\{i:s\leqslant W_i\leqslant t,1\leqslant i\leqslant n\}}(\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{N_n([s,t])},$$

其中 $N_n([s,t])=\#\{i:s\leqslant W_i\leqslant t,1\leqslant i\leqslant n\}$. $\hat{h}(\omega)$ 可用保序回归算法(PAVA 算法) 计算出.

3　半参数单调回归 EV 模型估计的渐近性质

首先给出如下几个假设条件[7-8] 和引理.

(C_1) $\boldsymbol{X}$ 在 R^p 上具有紧支撑. $E(\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{W}))^{\otimes 2}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A}^{\otimes 2}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(C_2) $\boldsymbol{W}$ 在 P 上具有紧支撑. $\boldsymbol{W}$ 的密度函数为 $f(\omega)(0<f(\omega)<\infty)$，且 $f(\omega)$ 满足 Lipschitz 条件：$\exists M,\rho>0$，使得 $\forall\omega,\omega'\in P$，有 $|f(\omega)-f(\omega')|\leqslant M|\omega-\omega'|^{\rho}$ 成立.

(C_3) $\exists C>0,\gamma>0,C'>0,\gamma'>0$，使得 $E(\exp(\gamma|\varepsilon|))<C$，$E(\exp(\gamma'|\boldsymbol{U}|))<C'$.

(C_4) $g_1(\omega)$、$g_2(\omega)$ 和 $h(\omega)$ 满足一阶 Lipschitz 条件.

(C_5) 权函数满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)=1$，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{I}[|\boldsymbol{W}_j-\boldsymbol{W}_i|>h_n]=O_p(h_n)$，其中 $\boldsymbol{I}(\cdot)$ 为示性函数.

(C_6) $h(\cdot)$ 在 P 上可导和有界，且 $\forall\delta>0,\exists C,\gamma>0$ 使得 $\inf\limits_{|u-v|>\delta}|h(u)-h(v)|\geqslant C\delta^{\gamma}$ 成立.

为简化上述引理和定理的证明过程，记 $\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{X}_i-E[\boldsymbol{X}_i|\boldsymbol{W}_i]$，$\breve{\boldsymbol{X}}_i=\boldsymbol{X}_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{X}_j$，$\breve{\boldsymbol{U}}_i=\boldsymbol{U}_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{U}_j$，$\breve{\varepsilon}_i=\varepsilon_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_j$，$\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)=h(\boldsymbol{W}_i)-\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)h(\boldsymbol{W}_j)$，$g_2^k(\omega)=E[\boldsymbol{X}_k|\boldsymbol{W}=\omega]$，

$\breve{g}_2^k(\boldsymbol{W}_i)=g_2^k(\boldsymbol{W}_i)-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)g_2^k(\boldsymbol{W}_j)$, $k=1,2,\cdots,p$; $\Sigma=E(\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{W}))^{\otimes 2}$, $\Omega=(\sigma^2+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta})\times\Sigma+E\{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}-\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta})\}^{\otimes 2}+\Sigma_{UU}\sigma^2$.

引理 1 设 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是独立的随机变量序列,满足 $E(e_i)=0$, $E(e_i^2)<C<\infty$, C 为常数,则有 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}e_i\right|=O_p(n^{\frac{1}{2}}\log n)$. 若 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一置换,则有 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}e_{ji}\right|=O_p(n^{\frac{1}{2}}\log n)$.

引理 2 在条件 C_1—C_5 下,有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\breve{g}_2^k(\boldsymbol{W}_i)|=O_p(h_n)$, $k=1,2,\cdots,p$; $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)|=O_p(h_n)$.

引理 3 在条件 C_1—C_5 下,记 $\Sigma_n=n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}-n\Sigma_{UU}\right)$, 则有 $\Sigma_n\xrightarrow{p}\Sigma$.

证明 因为 $\breve{\boldsymbol{Z}}_i=\breve{\boldsymbol{U}}_i+\breve{\boldsymbol{X}}_i$, 所以有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{X}}_i\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{X}}_i\breve{\boldsymbol{U}}_i^{\mathrm{T}}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{U}}_i\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{U}}_i\breve{\boldsymbol{U}}_i^{\mathrm{T}}\triangleq J_{n1}+J_{n2}+J_{n3}+J_{n4}.$$

对 J_{n1} 的第 (l,s) $(l,s=1,2,\cdots,p)$ 个元素 $(J_{n1})_{ls}$ 进行变形可得:

$$\begin{aligned}(J_{n1})_{ls}={}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{li}-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)X_{lj}\right)\left(X_{si}-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)X_{sj}\right)=\\&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_{li}V_{si}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_{li}\breve{g}_{2s}(\boldsymbol{W}_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)V_{sj}\right)V_{li}+\\&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{g}_{2l}(\boldsymbol{W}_i)V_{si}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{g}_{2l}(\boldsymbol{W}_i)\breve{g}_{2s}(\boldsymbol{W}_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)V_{sj}\right)\breve{g}_{2l}(\boldsymbol{W}_i)-\\&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)V_{lj}\right)V_{si}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)V_{lj}\right)\breve{g}_{2s}(\boldsymbol{W}_i)+\\&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)V_{lj}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)V_{sj}\right)\triangleq\sum_{q=1}^{9}(J_{n1q})_{ls}.\end{aligned}$$

再由大数定律可得

$$(J_{n11})_{ls}\xrightarrow{p}(\Sigma)_{ls}. \tag{10}$$

由 $E(V_i)=0$、条件 C_1 以及引理 1、引理 2 有

$$\begin{aligned}|(J_{n12})_{ls}|={}&\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}V_{lm_i}\breve{g}_{2s}(W_{m_i})\right|\leqslant\frac{1}{n}\cdot\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|\breve{g}_{2s}(W_{lm_i})|\max_{1\leqslant q\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{q}V_{lm_i}\right|=\\&\frac{1}{n}\cdot O_p(h_n)\cdot O_p(n^{\frac{1}{2}}\log n)=o_p(1),\end{aligned}\tag{11}$$

式中 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一置换,使得 $\breve{g}_{2s}(W_{m_1})\geqslant\cdots\geqslant\breve{g}_{2s}(W_{m_n})$. 同理由引理 1 和引理 2 可得

$$|(J_{n1t})_{ls}|=o_p(1),\ t=3,4,\cdots,9. \tag{12}$$

由式(10)—(12)可得 $J_{n1}\xrightarrow{p}\Sigma$. 类似上述证明过程可证得 $J_{n2}\xrightarrow{p}o_p(1)$, $J_{n3}\xrightarrow{p}o_p(1)$, $J_{n4}\xrightarrow{p}\Sigma_{UU}$. 综上可得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}\xrightarrow{p}\Sigma+\Sigma_{UU}$, 引理 3 得证.

定理 1 在条件 C_1—C_5 下,当 $n\to\infty$ 时,有 $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\xrightarrow{L}N(0,\Gamma)$, 其中 $\Gamma=\Sigma^{-1}\Omega\Sigma^{-1}$.

证明 因为 $\breve{\boldsymbol{Z}}_i=\breve{\boldsymbol{U}}_i+\breve{\boldsymbol{X}}_i$, $\breve{\boldsymbol{Y}}_i=\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\breve{\varepsilon}_i$, 所以有

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})=&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Y}}_i-\breve{\boldsymbol{Z}}_i\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta})=n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{X}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{X}_j\Big)\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{X}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{X}_j\Big)\Big(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_j\Big)+\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{U}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{U}_j\Big)\Big(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_j\Big)+\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{U}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{U}_j\Big)\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)-\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{X}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{X}_j\Big)\Big(\boldsymbol{U}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{U}_j\Big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}-\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\boldsymbol{U}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{U}_j\Big)\Big(\boldsymbol{U}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{U}_j\Big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\Big]+n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta}\triangleq\\
&\Delta_{n1}+\Delta_{n2}+\Delta_{n3}+\Delta_{n4}-\Delta_{n5}-\Delta_{n6}+\Delta_{n7}.
\end{aligned}
$$

对 Δ_{n1} 进行变形可得

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n1}=&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{V}_i-n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{V}_j\Big)\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\breve{g}_2(\boldsymbol{W}_i)\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)\triangleq\Delta_{n11}+\Delta_{n12}+\Delta_{n13}.
\end{aligned}
$$

再由引理 1—引理 3 和类似于式(11) 的证明方法可得：

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_{n11}|=n^{-\frac{1}{2}}\cdot O_p(1)\cdot O_p(h_n)\cdot O_p(n^{\frac{1}{2}}\log n)=o_p(1),\\
&|\Delta_{n12}|=n^{-\frac{1}{2}}\cdot O_p(1)\cdot n\cdot O_p((nh_n)^{-\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{2}}n)\cdot O_p(h_n)=o_p(1),\\
&|\Delta_{n13}|=n^{-\frac{1}{2}}\cdot O_p(1)\cdot n\cdot O_p(h_n^2)=o_p(1),
\end{aligned}
$$

故有 $|\Delta_{n1}|=o_p(1)$.

类似于上述方法对 Δ_{n2} 进行变形可得：

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n2}=&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i\varepsilon_i-n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_j\Big)\boldsymbol{V}_j+n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\breve{g}_2(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_i-\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_j\Big)\breve{g}_2(\boldsymbol{W}_i)-n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{V}_j\Big)\varepsilon_i+\\
&n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\boldsymbol{V}_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{nj}(\boldsymbol{W}_i)\varepsilon_j\Big)\triangleq\sum_{t=1}^{6}\Delta_{n2t}.
\end{aligned}
$$

再由引理 1—引理 3 和类似于式(11) 的证明可得 $|\Delta_{n2t}|=o_p(1)$，$t=2,3,4,5,6$. 从而有 $\Delta_{n2}=n^{-\frac{1}{2}}\times\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i\varepsilon_i+o_p(1)$.

类似上述证明过程可得：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n3}=n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{U}_i\varepsilon_i+o_p(1),\ |\Delta_{n4}|=o_p(1),\\
&\Delta_{n5}=n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+o_p(1),\ \Delta_{n6}=n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+o_p(1).
\end{aligned}
$$

由以上计算结果可得：

$$
n^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})=n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{V}_i\varepsilon_i+\boldsymbol{U}_i\varepsilon_i-\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta})+o_p(1).
$$

由中心极限定理知 $n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{V}_i\varepsilon_i+\boldsymbol{U}_i\varepsilon_i-\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta})\xrightarrow{L}N(0,\Omega)$,于是结合引理3和Slutsky定理可知定理1成立.证毕.

定理2 在条件 C_1—C_5 下,当 $n\to\infty$ 时有 $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)\xrightarrow{L}N(0,\Lambda)$,其中 $\Lambda=E\{(\varepsilon-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2-(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta}+\sigma^2)\}^2$.

证明 由 $\breve{\boldsymbol{Z}}_i=\breve{\boldsymbol{U}}_i+\breve{\boldsymbol{X}}_i$ 可得

$$n^{\frac{1}{2}}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Y}}_i\breve{\boldsymbol{Y}}_i^{\mathrm{T}}-2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{Y}}_i\breve{\boldsymbol{Z}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}+n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{X}}_i\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}+$$

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{U}}_i\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}+n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{X}}_i\breve{\boldsymbol{U}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}+n^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\breve{\boldsymbol{U}}_i\breve{\boldsymbol{U}}_i^{\mathrm{T}}-\Sigma_{UU}\right]\hat{\boldsymbol{\beta}}-n^{-\frac{1}{2}}\sigma^2\triangleq\sum_{t=1}^{7}R_{nt}.$$

于是由定理1可知 $\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}=O(n^{-\frac{1}{2}})$.类似于定理1中的计算方法得:

$$R_{n1}=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\breve{\varepsilon}_i)(\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\breve{\varepsilon}_i)=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i+\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2+o_p(1),$$

$$R_{n2}=-2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\breve{\varepsilon}_i)(\breve{\boldsymbol{X}}_i+\breve{\boldsymbol{U}}_i)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})-$$

$$2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\breve{\varepsilon}_i)(\breve{\boldsymbol{X}}_i+\breve{\boldsymbol{U}}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$$

$$-2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\breve{\boldsymbol{X}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\breve{h}(\boldsymbol{W}_i)+\breve{\varepsilon}_i)(\breve{\boldsymbol{X}}_i+\breve{\boldsymbol{U}}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+o_p(1)=$$

$$-2n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i+\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{V}_i+\boldsymbol{U}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+o_p(1).$$

类似于 R_{n1} 和 R_{n2} 的计算方法可得:

$$R_{n3}=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2+o_p(1),\ R_{n4}=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+o_p(1),$$

$$R_{n5}=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+o_p(1),\ R_{n6}=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2-n^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta}+o_p(1).$$

综上有 $n^{\frac{1}{2}}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}[(\varepsilon_i-\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Sigma_{UU}\boldsymbol{\beta}-\sigma^2]+o_p(1)$,由此根据中心极限定理可知定理2得证.证毕.

4 模拟比较

为了检验本文所得估计的有限样本性质,利用随机模拟实验的方法对忽略测量误差的估计方法(SIME方法)和带有测量误差的单调回归估计方法(IEV方法)进行比较.设模型为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Y}_i=X_{1i}\beta_1+X_{2i}\beta_2+h(\boldsymbol{W}_i)+\varepsilon_i,\\ Z_{1i}=X_{1i}+U_{1i},\\ Z_{2i}=X_{2i}+U_{2i},\\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

其中 $X_{1i}\sim N(1,3)$, $X_{2i}\sim N(0,3)$, $\varepsilon_i\sim N(0,1)$, $\boldsymbol{W}_i\sim U[-2.5,2.5]$, $U_{1i}\sim N(0,1.5)$, $U_{2i}\sim N(0,1.5)$, $h(\omega)=\omega^3$, $\beta_1=\beta_2=1$, $\Sigma_{UU}=1.5\cdot\boldsymbol{I}_{2\times2}$.实验中:核函数取 $K(x)=0.75(1-x^2)\cdot\boldsymbol{I}$;在估计 $\boldsymbol{\beta}$ 时,由于窗宽的选择较为费时,且其仅用于参数部分的估计,因此本文在试验中没有采用交叉证实法选择窗宽,而是根据数据经验选取窗宽 $h_n=1.3\cdot n^{-1/3}$;样本量分别取 $n=50,100,150,200$,重复次

数（M）为 1 000 次. 计算估计偏差和方差的公式为：

$$\bar{\boldsymbol{\beta}}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\hat{\boldsymbol{\beta}}_m,\ \mathrm{BIAS}(\bar{\boldsymbol{\beta}})=\bar{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta},\ \mathrm{VAR}(\bar{\boldsymbol{\beta}})=\frac{1}{M-1}\sum_{m=1}^{M}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m-\bar{\boldsymbol{\beta}})^2.$$

使用 SIME 和 IEV 方法对 β_1 和 β_2 进行模拟的结果见表 1. 由表 1 可以看出：随着样本量的增大，用 IEV 方法所得的 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计偏差和方差均逐渐减小，这说明用 IEV 方法所得的 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计随着样本量的增大而越来越精确；而用 SIME 方法所得的 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计值始终偏小，且 $\boldsymbol{\beta}$ 的方差随着样本量的增大逐渐减小，但偏差的绝对值却并没有逐渐变小，这说明用 SIME 方法所得的 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计不具有相合性. 该结果与本文理论结果相吻合，由此进一步说明对协变量的测量误差进行纠偏是必要的.

表 1　IEV 方法和 SIME 方法的 $\boldsymbol{\beta}_1$ 值

样本量	IEV 方法的 β_1 值			SIME 方法的 β_1 值		
	$\bar{\beta}_n$	BIAS($\bar{\beta}_n$)	VAR($\bar{\beta}_n$)	$\bar{\beta}_n$	BIAS($\bar{\beta}_n$)	VAR($\bar{\beta}_n$)
50	1.126 5	0.126 5	0.167 5	0.698 9	−0.301 1	0.032 3
100	1.094 1	0.094 1	0.156 2	0.701 2	−0.298 8	0.007 4
150	1.068 9	0.068 9	0.114 7	0.688 4	−0.311 6	0.002 9
200	1.031 2	0.031 2	0.098 5	0.672 5	−0.327 5	0.002 2

表 2　IEV 方法和 SIME 方法的 $\boldsymbol{\beta}_2$ 值

样本量	IEV 方法的 β_2 值			SIME 方法的 β_2 值		
	$\bar{\beta}_n$	BIAS($\bar{\beta}_n$)	VAR($\bar{\beta}_n$)	$\bar{\beta}_n$	BIAS($\bar{\beta}_n$)	VAR($\bar{\beta}_n$)
50	1.135 2	0.135 2	0.176 6	0.719 1	−0.280 9	0.021 9
100	1.116 3	0.116 3	0.152 1	0.695 7	−0.304 3	0.012 6
150	1.075 9	0.075 9	0.122 9	0.687 7	−0.312 3	0.005 6
200	1.044 7	0.044 7	0.089 9	0.705 9	−0.294 1	0.002 7

参考文献：

[1] HUANG J. A note on estimating a partly linear model under monotonicity constraints[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2002, 107: 345-351.

[2] 张文强，李开灿. EV 模型中参数的加权弦估计及其极限性质[J]. 湖北师范大学学报（自然科学版），2019，39(1)：46-53.

[3] DENG X, TIAN C Y, GE M M, et al. The asymptotic properties of least square estimators in the linear errors-in-variables regression model with φ-mixing errors[J]. 中国科学技术大学学报，2021，51(2)：164-172.

[4] LIANG H, WANG S, CARROLL R J. Partially linear models with missing response variables and error-prone covariates[J]. Biometrika, 2007, 94: 185-198.

[5] 刘强，薛留根. 核实数据下单指标 EV 模型的经验似然推断[J]. 工程数学学报，2010，27(2)：321-332.

[6] ZHOU Y, LIANG H. Statistical inference for semiparametric Varying-Coefficient partially linear models with error-prone linear covariates[J]. The Annals of Statistics, 2009, 37(1): 127-139.

[7] FAN J Q, LI R Z. New estimation and model selection procedures for semiparametric modeling in longitudinal data analysis[J]. J Amer Statist Assoc, 2004, 99: 710-723.

[8] YOU J H, ZHOU X, ZHOU Y. Series estimation in partially linear in-slide regression models[J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2011, 38(1): 89-107.