文章编号：1004-4353(2022)01-0037-04

一类具强内射的正则环

刘云萍，　金海兰
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要：研究了正则环与强 CP-内射环的等价关系，证明了当 R 为 MELT 环时，R 的正则性与弱正则性是等价的，同时证明了当 R 为约化环时，R 的正则性与强 CP-内射性的等价关系，并得出了当 R 为半本原左拟-duo 环时，R 的正则性、弱正则性与强 CP-内射性是等价的.

关键词：正则环；弱正则环；强 CP-内射环；约化环；MELT 环
中图分类号：O153.3　　　　**文献标识码**：A

The regular rings with strongly injective

LIU Yunping，　JIN Hailan
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We studied the equivalence relationship between regular rings and strong completely principal injective rings. It is proved that the regularity of R is equivalent to weak regularity when R is MELT ring, and the regularity of R is equivalent to strong CP-injective when R is reduced ring. And it is concluded that when R is semiprimitive left quasi-duo ring, the regularity and weak regularity of R are equivalent to the strong CP-injective property.

Keywords: regular ring; weakly regular ring; strongly CP-injective ring; reduced ring; MELT ring

1974 年，Yue C M 在文献[1]中首次提出了 P-内射模的概念，并利用 P-内射模研究了正则环. 此后，一些学者又研究了其他一些特殊内射环的正则性[2-4]. 2002 年，Hong C Y 等研究了右 CP-内射环与正则环之间的关系[5]. 基于文献[5]的研究，本文将强 CP-内射环与正则环相结合来研究强 CP-内射环与正则环的等价条件.

本文中的环均指有单位元的结合环，环上的模均指酉模. 设 R 为环，M 为左 R-模，如果 R 的任意一个主左理想 I 到 M 的左 R-模同态都可以扩充到 R 到 M 的左 R-模同态，则称 M 为左主内射模，简记为左 P-内射模[1]. 如果左 R-模 ${}_RR$ 是 P-内射模，则称环 R 是左 P-内射环. 如果环 R 的每个环同态像都是左 P-内射的，则称 R 为完全左主内射环，简记为左 CP-内射环[6]. 左 CP-内射环一定是左 P-内射环，反之未必.

1　强正则环与弱正则环

设 R 为环，如果对 $\forall x \in R$，存在 $y \in R$，使得 $xyx = x$，则称 R 为 Von Neumann 正则环. 文献[1]

收稿日期：2021－10－17
第一作者：刘云萍(1997—)，女，硕士研究生，研究方向为代数学(环论).
通信作者：金海兰(1963—)，女，理学博士，教授，研究方向为代数学(环论).

的作者证明了环 R 是 Von Neumann 正则环当且仅当每个左 R-模是 P-内射模,同时还证明了环 R 是 Von Neumann 正则环当且仅当每个循环左 R-模是 P-内射模.由此可知 Von Neumann 正则环一定是左 P-内射环,但反之未必.设 R 为环,如果对 $\forall a\in R$,存在 $b\in R$ 使得 $a^2b=a$,则称 R 为强正则环.显然,强正则环一定是正则环,但反之未必.设 R 为环,如果对 $\forall a\in R$,都有 $aR=aRaR$,则称 R 为右弱正则环.类似的,如果对 $\forall a\in R$,都有 $Ra=RaRa$,则称环 R 为左弱正则环.若环 R 既是左弱正则环,又是右弱正则环,则称 R 为弱正则环.

引理 1[7] 环 R 是强正则环当且仅当 R 是阿贝尔正则环.

引理 2 ① 正则环一定是弱正则环;② 右弱正则环或左弱正则环一定是半素环.

证明 令 R 是正则环,则对 $\forall a\in R$,存在 $b\in R$ 使得 $a=aba\in aRa$.由此知 $aR=aRaR$,$Ra=RaRa$,因此 R 是弱正则环.引理 2 中的 ① 得证.

令 R 是一个右弱正则环,并设对 $\forall a\in R$,$aRa=0$.由于 R 是右弱正则环,因此有 $aR=aRaR=0$,$a=0$,由此知 R 是半素环.同理,当 R 为左弱正则环时,R 也一定是半素环.引理 2 中的 ② 得证.

如果环 R 的每个极大左理想都是 R 的双边理想,则称 R 为左拟-duo 环.如果环 R 的每个极大本质左理想都是 R 的双边理想,则称 R 为 MELT 环.显然,左拟-duo 环一定是 MELT 环,但 MELT 环不一定是左拟-duo 环.

定理 1 令 R 是 MELT 环,则以下条件等价:①R 是正则环;②R 是左弱正则环;③R 是右弱正则环;④R 是弱正则环.

证明 ②⇒①.由于 R 是左弱正则环,因此由引理 2 可知,R 一定是半素环.由于 R 的每个非零极小左理想都是直和的形式,所以 $S=\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是一个正则环,其中 $\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是 R 的左基座.对于 R/S 的任意一个极大左理想 M/S,M 一定是 R 的本质左理想.此外,如果对 R 的一个非零理想 I,$M\cap I=0$,则有 $M\oplus I=R$ 且 $R/M\cong I$.由于 R/M 是单环,因此 $I\subseteq S\subseteq M$,这与 $M\cap I=0$ 矛盾.根据假设,M 是 R 的双边理想,因此 M/S 也是 R/S 的双边理想.故 R/S 是一个左-duo 环,同时也是一个左弱正则环.令 $\bar{R}=R/S$,对 $\forall\bar{a}\in\bar{R}$ 都有 $\bar{R}\bar{a}+l(a)=\bar{R}$.如果 $\bar{R}\bar{a}+l(a)\neq\bar{R}$,则一定存在极大左理想 $\bar{K}$ 使得 $\bar{R}\bar{a}+l(a)\subseteq\bar{K}$,进而有 $\bar{R}\bar{a}=\bar{R}\bar{a}\bar{R}\bar{a}\subseteq\bar{K}\bar{R}\bar{a}=\bar{K}\bar{a}$,所以 $\bar{a}\in\bar{K}\bar{a}$.由此可知 $(\bar{1}-\bar{b})\bar{a}=\bar{0}$,即 $\bar{1}-\bar{b}\in l(a)\subseteq\bar{K}$,这与 $\bar{1}\notin\bar{K}$ 矛盾.因此,$\bar{R}=R/S$ 是一个强正则环,故 R 是正则环.

③⇒①.由于 R 是右弱正则环,则由引理 2 可知,R 一定是半素环.因此 R 的每个非零极小右理想都是直和的形式,所以 $S=\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是一个正则环,其中 $\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是 R 的左基座.对于 R/S 的任意一个极大左理想 M/S,M 一定是 R 的本质左理想.此外,如果对 R 的一个非零理想 I,$M\cap I=0$,则有 $M\oplus I=R$ 且 $R/M\cong I$.由于 R/M 是单环,因此 $I\subseteq S\subseteq M$,这与 $M\cap I=0$ 矛盾.根据假设 M 是 R 的双边理想,因此 M/S 也是 R/S 的双边理想.故 R/S 是一个左-duo 环,同时也是一个右弱正则环.令 $\bar{R}=R/S$,对 $\forall\bar{a}\in\bar{R}$ 都有 $\bar{a}\bar{R}+r(a)=\bar{R}$.如果 $\bar{a}\bar{R}+r(a)\neq\bar{R}$,则一定存在极大右理想 $\bar{K}$ 使得 $\bar{a}\bar{R}+r(a)\subseteq\bar{K}$,进而有 $\bar{a}\bar{R}=\bar{a}\bar{R}\bar{a}\bar{R}\subseteq\bar{a}\bar{R}\bar{K}=\bar{a}\bar{K}$,所以 $\bar{a}\in\bar{a}\bar{K}$.由此可知 $\bar{a}(\bar{1}-\bar{b})=\bar{0}$,即 $\bar{1}-\bar{b}\in r(a)\subseteq\bar{K}$,这与 $\bar{1}\notin\bar{K}$ 矛盾.因此,$\bar{R}=R/S$ 是一个强正则环,故 R 是正则环.

由于正则环一定是弱正则环,显然由条件 ① 可推出条件 ④.由于弱正则环既是左弱正则又是右弱正则,所以由条件 ④ 可推出条件 ② 和 ③.

2 强 CP-内射环与正则环

如果环 R 的每个环同态像为左(右)R-模时是 P-内射模,则称环 R 为强左(右)CP-内射环.由文献[1]中的证明(若 R 是正则环,则每个左(右)R-模都是 P-内射模)知 R 是强左(右)CP-内射环.

引理 3[8]　环 R 是左 P-内射环当且仅当 R 的每个主右理想是右零化子.

定理 2　正则环一定是左 P-内射环.

证明　令 R 是正则环，则对 $\forall a \in R$，一定存在 $b \in R$ 使得 $a = aba$，由此知 ba 是 R 中的幂等元. 设 $ba = e$，则 $aR = eR$，于是得 aR 是 $1-e$ 的右零化子. 由引理 3 知，R 是左 P-内射环，但左 P-内射环不一定是正则环.

引理 4[5]　令 R 是 MELT 环，则以下条件等价：①R 是正则环；②R 是强左 CP-内射环.

对于环 R，$P(R)$ 表示 R 的素根集，$N(R)$ 表示由所有幂零元构成的集合. 显然 $P(R) \subseteq N(R)$. 若 $P(R) = N(R)$，则称 R 为 2-primal 环. 若 R 是约化环，则根据约化环的概念可得 $P(R) = N(R) = 0$，由此知约化环一定是 2-primal 环.

引理 5[5]　令 R 是一个 2-primal 环，则以下命题等价：①R 是强正则环；②R 是强左 CP-内射环.

如果环 R 的每个非零左(右) 理想都包含一个 R 的双边理想，则称 R 为强左(右) 有界环.

引理 6[5]　以下命题等价：① 环 R 是强正则环；② 环 R 是强左有界环和强左 CP-内射环；③ 环 R 是强右有界环和强左 CP-内射环.

定理 3　对于约化环 R，以下条件等价：①R 是正则环；②R 是强左有界环和强左 CP-内射环；③R 是强右有界环和强左 CP-内射环；④R 是强左 CP-内射环.

证明　由于约化环一定是阿贝尔环，所以约化的正则环一定是强正则环，故由条件 ① 可推出条件 ② 和条件 ③.

②$\Rightarrow$①. 首先利用反证法证明 $R/{}_rZ(R)$ 是一个约化环，其中，${}_rZ(R)$ 表示 R 的左奇异理想. 如果 $R/{}_rZ(R)$ 不是一个约化环，则存在 $a^2 \in {}_rZ(R)$ 使得 $a \notin {}_rZ(R)$. 因此必存在环 R 的理想 K 使得 $l(a) \oplus K \in l(a^2)$ 是左本质的. 由于 R 是强左有界的，则必存在 R 的一个双边理想 I 使得 $I \subseteq K$. 由此可知 $Ia^2 = 0$，$Ia \subseteq l(a) \cap I \subseteq l(a) \cap K = 0$，所以有 $I \subseteq l(a)$，$I = 0$，这与 $I \neq 0$ 矛盾. 所以 $R/{}_rZ(R)$ 是一个约化环，即 $R/{}_rZ(R)$ 是一个强正则环. 由此可知，R 是一个左 P-内射环，于是有 ${}_rZ(R) = J(R)$，故 R 是一个左拟-duo 环，即 R 是一个强正则环.

③$\Rightarrow$①. 首先利用反证法证明 R 是一个约化环. 如果 R 不是一个约化环，设 $a^2 = 0$，但 $a \neq 0$，则 $r(l(a))$ 是 R 的一个非零右理想. 由此知必存在一个 R 的非零双边理想 I 使得 $I \subseteq r(l(a))$，所以有 $l(a) \subseteq l(I)$，故 $R/l(a)$ 是一个左 P-内射 R-模. 令 $f: Ra \to R/l(I)$，f 满足 $f(ra) = r + l(I)$，则 f 是一个左 R-同态映射. 因为 $R/l(a)$ 是左 P-内射模，所以存在 $c \in R$ 使得 $1 + l(I) = f(a) = ca + l(I)$，由此得 $1 - ca \in l(I)$，$1 \in l(I)$，这与 $I \neq 0$ 矛盾. 所以 R 是一个约化环，即 R 是一个强正则环.

因约化环也是 2-primal 环，所以由引理 5 知条件 ① 与条件 ④ 等价.

令 R 为环，若 R 的所有极大理想的交 $J(R) = 0$，则称 R 为半单环[9]. 文献[10] 的作者证明了一个半单的单边拟-duo 环一定是约化环.

定理 4　令 R 是半单左拟-duo 环，则以下条件等价：①R 是正则环；②R 是强左有界环且是强左 CP-内射环；③R 是强右有界环且是强左 CP-内射环；④R 是强左 CP-内射环；⑤R 是弱左正则环；⑥R 是弱右正则环；⑦R 是弱正则环.

证明　由于一个半单的单边拟-duo 环一定是约化环，因此根据定理 3 知，定理 4 中的条件①—④等价. 由于左拟-duo 环是 MELT 环，进而根据定理 1 可以证得定理 4 中的条件①、⑤、⑥、⑦等价.

参考文献：

[1]　YUE C M. On (von Neumann) regular rings[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1974, 19(1): 89-91.

[2] 赵良.关于环的正则性研究[D].兰州:西北师范大学,2005.
[3] 鲁琦,殷晓斌,鲍宏伟.EP-内射性与环的 von Neumann 正则性[J].山东大学学报(理学版),2014,49(10):33-37.
[4] 鲁琦,李娜.模和环的 small-内射性的一些研究[J].辽宁师范大学学报(自然科学版),2020,43(3):294-297.
[5] HONG C Y, KIM N K, LEE Y. On rings whose homomorphic images are p-injective[J]. Communications in Algebra, 2002,30(1):261-271.
[6] NICHOLSON W K, YOUSIF M F. On completely principally injective rings[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1994,49(3):513-518.
[7] ARMENDARIZ E P. Review: Von Neumann regular rings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1980,3(1):752-757.
[8] IKEDA M, NAKAYAMA T. On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1954,5(1):15-19.
[9] HUNGERFORD T W. Algebra[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
[10] HUH C, JANG S H, KIM C O, et al. Rings whose maximal one-sided ideals are two-sided[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2002,39(3):411-422.

(上接第29页)

[2] 李忠.具反馈控制修正 Leslie-Gower 和 Holling-Ⅱ功能性反应捕食系统的持久性和全局吸引性[J].数学的实践与认识,2011,41(7):126-130.
[3] 陈江彬.具反馈控制和 Holling-Ⅲ类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统研究[J].延边大学学报(自然科学版),2017,43(3):189-194.
[4] LIN Q F. Stability analysis of a single species Logistic model with Allee effect and feedback control[J]. Advances in Different Equations, 2018,2018:190.
[5] 方侃,陈晓英.具有 Allee 效应单种群反馈控制模型的动力学分析[J].闽南师范大学学报(自然科学版),2021,34(3):39-45.
[6] 黄小燕,陈凤德.Allee 效应对阶段结构单种群模型的动力学行为影响[J].福州大学学报(自然科学版),2020,48(2):135-139.
[7] 关新宇,谢向东.Allee 效应对单种群模型的动力学行为影响研究[J].生物数学学报(自然科学版),2019,34(1):140-144.
[8] ZHU Z L, HE M X, LI Z, et al. Stability and bifurcation in a Logistic model with Allee effect and feedback control[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020,30(15):2050231.
[9] LÜ Y Y, CHEN L J, CHEN F D, et al. Stability and bifurcation in an Si Epidemic model with additive Allee effect and time delay[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2021,31(4):2150060.
[10] GUAN X Y, CHEN F D. Dynamical analysis of a two species amensalism model with Beddington-DeAngelis functional response and Allee effect on the second species[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2019,48:71-93.
[11] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等.微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,1985:49-158.
[12] CHEN F D. On a nonlinear non-autonomous predator-prey model with diffusion and distributed delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005,180(1):33-49.